N 3296
8752
22.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMBRIE 1946

SUMARUL

1. Lista membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Asupra unei ecuaţii algebrice . . . . . *N. Galu*
4. Proprietăţi ale punctelor isogonale, depe diametrele cercului circumscris unui triunghiu . . . . . *G-l Gh. I. Popescu*
5. Premiile, bursele şi publicaţiile societăţii „Gazeta Matematică" . . . . . *Al. Roşu, D. Stan*
6. Donaţii pentru „Gazeta Matematică" . . *Gazeta Matematică*
7. Concursul „Gazetei Matematice" din 1947 *Delegaţia Societăţii*
8. Raport pentru acordarea premiului „General Scarlat Panaitescu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
9. Note matematice: 1—2.
10. Chestiuni de examen.
11. Bibliografie.
12. Cereri.
13. Diverse.
14. Probleme rezolvate: 5708, 5724, 5972, 5993, 6092, 6178.
15. Exerciţii: 1—3.
16. Probleme propuse: 6270—6279.

BIBLIOTECA CENTRALĂ A ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1946

9676
83506

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 50 (cincizeci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 100

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 4.500

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 10.000

8752

GAZETA MATEMATICĂ

4676
83506

GAZETA MATEMATICA

FOAIE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL LII

15 SEPTEMBRIE 1946 — 15 AUGUST 1947

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1946

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1946 *)

ION S. ANTONIU, ȘERBAN A. GHEORGHIU; AL. D. BUNESCU (Casier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ"

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO și G. SIMIONESCU. Raportori.

G-L GH. BUICLIU, G-L GH. I. LITEANU și D. V. STOICA. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și reclamațiuni privitoare la tipărire.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare și pentru imprimarea revistei.

GENERAL GH. BUICLIU. Membru delegat pentru adunarea, repartizarea și coordonarea materiei de tipărit.

TIB. POPOVICIU. Membru delegat pentru Aritmetică și Teoria Numerelor.

ȘERB. GHEORGHIU. Membru delegat pentru Geometrie.

G-L G. I. LITEANU. Membru delegat pentru Trigonometrie.

D. V. IONESCU. Membru delegat pentru Algebră.

AL. STOENESCU. Membru delegat pentru Mecanică.

N. I. CIORĂNESCU. Membru delegat pentru Calculul integral și diferențial.

TH. ANGHELUȚĂ. Membru delegat pentru Teoria Funcțiilor.

ADRIAN GHEORGHIU. Membru delegat pentru Descriptivă și Perspectivă.

P. SERGESCU. Membru delegat pentru Istoria și Filosofia Matematică.

GABRIELA ȚIȚEICA. Membru delegat pentru Chestiuni de Examen.

V. CLAUDIAN și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru Probleme și Exerciții de propus.

C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru întocmirea Tablei de Materii a Vol. LI.

N. GEORGESCU-ROEGEN, C. IONESCU-BUJOR, MAIOR C. IONESCU-ȚIU și N. N. MIHĂILEANU. Membri delegați pentru corecturi.

G-L GH. BUICLIU, VIRGIL CLAUDIAN, AND. DOBRESCU, LT.-COL. M. I. FOCȘENEANU, ADRIAN GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, MAIOR ING. C. IONESCU-ȚIU, G-L GH. I. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, GH. D. SIMIONESCU, LOCOT.-C-DOR A. STAN, AL. STOENESCU, D. V. STOICA, E. VIȘA. Membri delegați pentru redijarea problemelor propuse de corespondenți.

Membrii societății își redijează singuri problemele propuse de ei.

MAIOR ING. C. IONESCU-ȚIU, bibliotecar.

*) *Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri* și un casier. (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1907, Iulie 1*	ABRAMESCU NICOLAE. Doctor în Matematici. — Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Brătianu 4 Cluj.
2	1945, Febr. 19	ADAM MIRCEA. Inginer. Direcţia Generală P. T. T. Bucureşti. Str. Ţepeş Vodă Nr. 86. Bucureşti.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1946, Aug. 26	ALBESCU C. NICOLAE. Profesor. Str. Aurel Vlaicu, 166, Bucureşti.
5	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
6	1945, Dec. 3	ALEXANDRESCU OCTAV. Profesor Şcoala Normală din Constanţa. B-dul Domniţa Ileana; 1. Constanţa.
7	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice. — Şef de birou tehnic în Direcţiunea de Poduri C. F. R., Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Mihail Cornea, 41. Bucureşti 2.
8	1943, Febr. 18	AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL. Inginer Constructor. Diplomat al Politehnicei din Bucureşti. Inginer C.F.R. — Str. Calea Impăratul Traian 11. Craiova.
9	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Director General, Ministerul Minelor şi Petrolului. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3. Telefon 2.41.30.
10	1946, Febr. 18	ANDREI ŞTEFAN. Inginer, S.S.A. Str. Vasile Lascăr, 23. Bucureşti.
11	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Fost Rectorul Politehnicei din Timişoara.
12	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii „Regele Ferdinand I". — Universitatea-Cluj.
13	1946, Febr. 18	ANIŢESCU NICOLAIE. Prof. Lic. T. Vladimirescu, Tg. Jiu. Str. Victoriei, 54. Tg. Jiu.
14	1945, Dec. 3	ANTONESCU FILOFTEIA. Licenţiată în matematici. Profesoară. Str. Ismail, 30. Bucureşti.
15	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer Inspector General. — Profesor la Politehnica „Gh. Asachi". — Directorul Direcţiei Podurilor în Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2. Tel. 7.14.71.
16	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer electromecanic, diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer electrician, diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Şeful departamentului de studii şi proecte al Societăţii Generale de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Calea Floreasca, 150. (Telefon 2.94.37).
17	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Politehnica din Timişoara.

*) Data admiterii.

18	1945, Dec. 3	ARMEAN ION. Profesor Lic. Gh. Lazăr, Sibiu. Str. Tribunei, 7. Sibiu.
19	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii din Cluj. Str. Regală, 109. Cluj.
20	1946, Febr. 18	ATANASIU MARCEL A. D. Inginer C. F. R. Asistent Politehnica Bucureşti. Calea Griviţei, 158. Bucureşti, II.
21	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer, — Inginer şef de serviciu la Soc. Generală de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. Conferenţiar definitiv la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sft. Constantin, 24. Bucureşti 3. Tel. 5.21.41.
22	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a *Drumurilor*. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2. Telefon 7.56.33.
23	1946, Aug. 26	BĂDESCU EM. AUREL. Maior. Str. B. P. Haşdeu Nr. 33. Bucureşti.
24	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Jianu 38 Bucureşti, 2. Telefon 7.38.42.
25	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Calea Dorobanţilor Nr. 232 Bucureşti. Telefon 7.35.86.
26	1942, Aug. 27	BĂDULESCU ALEXANDRA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară la Liceul din Târgul-Ocna.
27	1945, Dec. 3	BĂDULESCU I. VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor Lic. Aurel Vlaicu, Bucureşti. Aleea Carmen-Sylva, 6. Bucureşti.
28	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo, 560. Republica Argentina.
29	1940, Aug. 28	BĂLAN G. ŞTEFAN. Doctor Inginer. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. Str. Lt. Negel, 59, Bucureşti. Telefon 4.83.76.
30	1941, Sept. 18	BALLAN EUGEN. Inginer şi Licenţiat în Matematici. — Secretar General la Ministerul de Finanţe. — Str. Brezoianu, 29 (Alee). Telefon 471.84.
31	1946 Febr. 18	BARAN FRANCISC. Inginer. Str. Nicolae Iorga No. 31. Bucureşti.
32	1945, Dec. 3	BARBĂLAT B. Profesor. Str. Popa Petre, 25. Bucureşti.
33	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
34	1944, Febr. 9	BAZACOV GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Traian, Turnu-Severin. — Str. Adrian 119. Turnu-Severin.
35	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Bibliotecar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti. Telefon 2.93.90.
36	1945, Dec. 3	BERCOVICI MARTIN. Inginer. Subdirector G-ral Soc. Gaz şi Electricitate. Str. Heleşteului No. 14. (Parc. Jianu). Bucureşti.
37	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer S. N. P. S.. — Licenţiat în Matematici. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Soc. „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49.

38	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer şef. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Şef de serviciu în Administraţia Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe apă (P. C. A.). — Aleea Alexandru, 11. Bucureşti 3. Telefon 2.67.66.
39	1945, Dec. 3	BOTEZ GUSTAV. Licenţiat. Profesor Lic. Matei Basarab. Str. Vasile Lascăr, 154. Bucureşti.
40	1935 Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar definitiv la Politehnica „Gh. Asachi". — Str. Gh. Asachi, 7. Iaşi.
41	1945, Dec. 3	BRATU I. MARIANA. Licenţiată în matematici. Profesoară Lic. Aurel Vlaicu. B-dul Schitu Măgureanu. 17. Bucureşti. Telefon 5.58.23.
42	1926, Iunie 28	BRENNER M. AVRAM. Inginer. — Viitorului, 22. Bucureşti.
43	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Lt. C-dor. Licenţiat în Matematici. — Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Asistent universitar la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Aviator Th. Iliescu, 31. Telefon 239.96,
44	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
45	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General de Divizie în rezervă, din Artilerie. — Str. M. Kogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
46	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General.— Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
47	1924, Ian. 30	BUNESCU D. ALEXANDRU. Inginer.. — Str. Arcului 26. Bucureşti 1. Telefon 1.13.57 şi 2.24.33.
48	1943, Aug. 26	BUNESCU D. EUGEN. Inginer. — Str. Argentina, 50. Bucureşti.
49	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Col. de Artilerie. Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioarede Război din Paris. — Str. Franzelari, 19. Bucureşti. Telefon 2.67.57.
50	1920, Ian 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Director C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48, Bucureşti 6. Telefon 4.62.59.
51	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General de Divizie în rezervă. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. — Str. General Berthelot, 95. Telefon 4.39.83.
52	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer-Şef. — Subşef de serviciu. Direcţiunea Atelierelor C. F. R. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti — Str. Vaselor, 40 Bis. Bucureşti 4. Telefon 1.30.75.
53	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Tache Ionescu, 27.
54	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Directorul Intreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3. Bucureşti 1. Tel. 5.30.55.
55	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. V. Inginer Inspector General. — Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2. Telefon 7.41.88.

56	1946, Aug. 26	CANCIU GH. Profesor. Str. Stănică Marin, 22. Ploeşti.
57	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Cometa, 33. Bucureşti 3. Telefon 2.11.96.
58	1942, Aug. 27	CARACOSTEA D. ANDREI. Inginer absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inspector ajutor în Direcţiunea de Poduri C.F.R. — B-dul Lascăr Catargiu, 28. Bucureşti 3. Telef. 2.28.12.
59	1946, Febr. 18	CARACUDOVICI ST. FLORICA. Profesoară. — Str. Petre Liciu, 22. Bucureşti.
60	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Vasile Conta, 3. Bucureşti 3.
61	1920, Mart. 1	CARAMAN EMIL. Licenţiat în Matematici. — Directorul Liceului „V. Alecsandri" din Galaţi. — Str. General Berthelot, 81. Galaţi.
62	1944, Febr. 9	CARANFIL G. NICOLAE. Inginer. — Aleia Modrogan, 17. Bucureşti. Telefon 7.26.01 şi 2.35.92.
63	1944, Febr. 16	CÂRLĂNESCU C. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Calea Dudeşti, 102. Bucureşti.
64	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Antreprenor. — Intrarea Tudor Ştefan, 4. Bucureşti 2. Tel. 2.97.16.
65	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. General de Artilerie în rezervă. — Str. G-ral Ipătescu, 20. Bucureşti 4. Telefon 1.05.82.
66	1920, Ian. 10	CAZACU N.C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2. Telefon 4.58.37.
67	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE, Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. Str. I. C. Brătianu, 50. Craiova.
68	1945, Aug. 27	CEAUŞESCU F. VASILE. Locot. Inginer. Intrarea Popa Nan Nr. 5 B Bucureşti.
69	1945, Febr. 19	CETĂŢEANU STELIAN. Inginer Constructor de la Şc. Politehnică. Bucureşti. — Fabrica de Poduri. Uzinele Reşiţa Jud. Timiş.
70	1945, Dec. 3	CHELEŞ EUGEN. Licenţiat în matematici, referent la Direcţia de Studii C. A. M. — Str. Ing. I. D. Teodoru No. 37 bis. Bucureşti.
71	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1. Telefon 2.54.95.
72	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Director General al Silozurilor. — Str. Marin Serghiescu Nr. 6. Telef. 2-3729. Bucureşti.
73	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer Inspector General în Direcţia Generală C. F. R. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti Str. Iancu Căpitanu 44. Tel. 2-4318.
74	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice şi particulare. Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1. Telefon 3.58.51.

75	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Profesor Şcoala Politehnică. — Stradela Bucovina, 7. Bucureşti 2. Telefon 3.51.46.
76	1940, Febr. 8	CIORAPCIU F. MIRCEA. Inginer Constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Vâlcov, 56. Bucureşti 4.
77	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici al Universităţii din Bucureşti.— Directorul Liceului „Mihai Viteazul" din Bucureşti. Membru al Societăţii „Mathematical Association of America (U.S.A.).
78	1946, Aug. 26	CLIMESCU ALEXANDRU. Profesor. Şcoala Politehnică Iaşi.
79	1945, Dec. 3	COATU CONSTANTIN. Inginer. — Licenţiat în matematici. — Str. Apolodor, 26. Et. III. Bucureşti.
80	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer diplomat al S. P. B. Director General. — Str. N. Iorga, 22. Bucureşti 3. Telefon 4.61.12.
81	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Doctor în Matematici. — Str. Radu dela Afumaţi 71, ap. 3. Bucureşti.
82	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. Telefon 7.09.67.
83	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer dela Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Inspector conducător al Atelierelor E. C. F. R. Filaret. — Str. Gh. Popescu, 1. Bucureşti 6. Telefon 4.67.54.
84	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer la Uzinele I. A. R. din Braşov. — Fabrica de Avioane I. A. R. Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
85	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Lt.-C-dor. — Căpitan de lungă cursă.—Str. Călăraşi 57. Constanţa.
86	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Str. Polonă, 57. Bucureşti 3. Telefon 1.16.16.
87	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. C-dor-Ing. — B-dul Mărăşti, 47. Bucureşti 2. Telefon 7.48.37.
88	1946, Aug. 26	CRĂCIUNESCU MIOARA. Profesoară. — Şoseaua Giurgiului, 5. Bucureşti.
89	1945, Dec. 3	CREANGĂ IOAN. Profesor la Politehnica Gh. Asachi Iaşi. — Liceul Ortodox de fete Iaşi.
90	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor titular. Liceul Ferdinand R.-Sărat. Str. Principele Ferdinand 35. R.-Sărat.
91	1943, Aug. 26	DAVIDESCU ANA. Inginer constructor. Diplomat Politehnica Bucureşti. — Inginer constructor la Dir. Silozuri din P. C. A.
92	1946, Febr. 18	DIACONESCU ION. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Comercial Regele Carol I. — Str. Arhitect Mincu, 9. Bucureşti, II. Telefon 7.55.71.

*) Data fondării revistei *„Gazeta Matematică"*. Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

93	1941, Iunie 5	DINESCU P. ALEX. TUDOR. Inginer Constructor.— Asistent suplimentar la Şcoala Politehnică Bucureşti. Şef de Secţie la C.F.R. — Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti 4. Telefon 0.83.38.
94	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Liceul Industrial de Construcţii Civile şi Edilitare din Bucureşti. —Str. Nerva Traian, 36.. Bucureşti 5.
95	1939, Aug. 31	DOBRESCU D. PAUL. Locot. Inginer. Str. Eliade Rădulescu, 32. Bucureşti.
96	1945, Aug. 27	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici. — Profesor titular la Colegiul Naţional Militar „N. Filipescu". Predeal.
97	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Lt.-Col. de Artilerie, brevetat de Stat Major.— Profesor de Muniţiuni şi Construcţii de guri de foc la Şcolile de Artilerie. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe.— Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti, 2. Tel. 5.34.90.
98	1946, Febr. 18	DRĂNICEANU EUGENIA. Profesoară şi asistentă la Politehnica Gh. Asachi. Iaşi. — Str. Leonida Varnali, 15. Bucureşti.
99	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al Uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3. Telefon 2.21.09.
100	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef, — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
101	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti, 6. Telefon 3.72.51.
102	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Malaxa. — Calea Victoriei 139. Telefon 5.91.09.
103	1945, Dec. 3	DUMITRESCU I. TH. Maior. — Licenţiat în matematici. Inginer chimist. Str. General Leca, 41. Bucureşti. Telefon. 5.92.65.
104	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
105	1945, Dec. 3	FLEXI CUŞUŢĂ SOFIA. Profesoară. — Str. Adrian, 30. Bucureşti.
106	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor S. P. B.. — Inginer C. F. R. Asistent la Politehnica Bucureşti. — Str. Vaselor, 28. Bucureşti 4. Telefon 2.52.36.
108	1946, Febr. 18	FOCŞA VLADIMIR. Inginer. Şef de Serviciu C. F. R. — Str. Gr. Alexandrescu, 78 et. I. Bucureşti.
109	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Lt.-Col. de Artilerie. Brevetat de Stat Major. Licenţiat în Matematici. Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe. — Profesor la Şcoala Superioară de Război. — Str. Porumbaru, 33. Bloc C. Etaj III. Telefon 7.15.83. Bucureşti 3.
110	1946, Febr. 18	FRÂNCU DUMITRU. Licenţiat în matematici, actuar titular C.A.S.— Profesor Secundar. Str. Lt. Niculescu Bazar, 17. Bucureşti.
111	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Calea Victoriei, 70. Bucureşti, 1.
112	1943, Aug. 26	GAFENCU RODICA. Licenţiată în Matematici. Profesoară. — Str. Unirii, 99. Buzău.

113	1946, Aug. 26	GAIU NICOLAE. Profesor. Colegiul „Nicolae Filipescu", Predeal.
114	1946, Febr. 18	GALBURĂ GHEORGHE. Doctor în matematici. Asistent la Universitate. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti.
115	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer. — Str. Wilson, 13. Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1. Tel. 3.48.13. B-dul Brătianu, 25.
116	1944, Mai 8	GEORGESCU CALIPSO. Licenţiată în Matematici. — Profesoară. — Str. Vasile Stroescu 10. Bucureşti.
117	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
118	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General. — Director Fab. de Chibrite. — Str. Şos. Jianu, 70. Bucureşti 1.
119	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Director în Ministerul Economiei Naţionale. Profesor la Institutul de Statistică, Actuariat şi Calcul. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
120	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici. — Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3. Tel. 2.03.03.
121	1934, Dec. 19	GEORGESCU VAL. N. ION. Lt.-Col. din. C.T.M. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice. — Directorul Arsenalului Armatei. Com. Băneşti Jud. Prahova.
122	1945, Dec. 3	GEREANU ANA. Licenţiată în matematici. — Str. Locot. C. Ionescu-Baican, 58. Bucureşti.
123	1939, Dec. 7	GERMANI DIONISIE. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Diplomat al Şcoalei Sup. de Electricitate din Paris. — Membru onorar al Academiei Române. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Paris, 45. Bucureşti 3. Tel. 2-1162.
124	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General de divizie din Artilerie în rezervă. — Str. Mântuleasa, 5. Bucureşti.
125	1936, Febr 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. Turda, 209. Bucureşti 2.
126	1941, Iunie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. Inginer constructor. — Directorul Soc. Anonime de Mine de granit, din Poeni. Asistent la Şcoala Politehnică. — Calea Victoriei, 128. Bucureşti. Tel. 4-5580.
127	1932. Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. — Profesor Şcoala Politehnică Timişoara.
128	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Piaţa Lahovary, 3. Bucureşti 3. Tel. 2.95.18.
129	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Matematici şi diplomat al Institutului de Statistică din Paris. — Subdirector general al Institutului Central de Statistică. Str. Av. Iliescu, 44. Bucureşti 2.
130	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Lalescu, 3. Timişoara, 3.
131	1942, Febr. 19	GHICA AL. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Aleea Alexandru, 16. Bucureşti 3.

132	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Col., Inginer Radio-electrician. E. S. E. (Paris). — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2. Telef. 5.45.47.
133	1944, Mai 8	GHIOLU D. STAVRI. Inginer. — Director Banca Românească. — Profesor suplimentar Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Nicolae Ionescu, 17. Bucureşti 2. Telef. 7-4159.
134	1939, Febr 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici. — Asistent universitar la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Mico 40. Cluj.
135	1936, Aug 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer U. D. R. Bucureşti. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3. Telef. 2.75.74.
136	1942, Aug. 27	GHIŢESCU SPIRIDON. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Comercial „Petru Rareş" din Bucureşti. — Str. Al. Constantinescu, 1. Parcul Domeniilor, Bucureşti. Telefon 7.12.32.
137	1931, Mart 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
138	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4. Telef. 4-7828.
139	1944, Mai 8	GRIGORESCU ION. Inginer. — Subdirector Ministerul Culturii Naţionale. — Bucureşti.
140	1945, Dec. 3	GROSU ION. Inginer. — Licenţiat în matematici. — Director General al Uzinelor I. A. R. — Str. Cometa, 33. Bucureşti.
141	1936, Febr. 27	GUŢU I. AL. Inginer. — Inginer la Societatea Petroşani. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
142	1941, Iunie 5	GUŢU ION. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R. — Str. Vişinilor, 2. Bucureşti 4. Tel. 4.47.95.
143	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Director C. A. M. — Bucureşti 6.
144	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris.— Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Şos. Jianu, 56. Bucureşti. Telef. 7.49.79.
145	1946, Febr. 18	HARET G. SPIRU. Inginer. — Profesor Şc. de subingineri din Bucureşti. — B-dul Lascăr Catargiu No. 14. Bucureşti.
146	1945, Dec. 3	IACOB CAIUS. Profesor. — Doctor în matematici. Universitatea Cluj.
147	1945, Aug. 27	IACOB ŞT. EUGEN. Maior de Artilerie. — Str. Maria Roseti, 20. Bucureşti.
148	1946, Aug. 26	IACOVACHE AURELIAN. Licenţiat în Matematici. — Str. Cuţitu de Argint, 5. Bucureşti.
149	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer Inspector General. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6. Telef. 4.06.C0.
150	1928, Aug. 29	ILIESCU TRAIAN. General de Artilerie în rezervă.— Str. G-ral Manu, 28. Bucureşti.
151	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer dela Şcoala Politehnică Bucureşti.— Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2. Telef. 5.45.31.
152	1945, Dec. 3	IOAN ANA. Licenţiată în matematici. — Profesoară şi Asistentă. Str. Columb, 10. Bucureşti.

153	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3. Telef. 2.28.10.
154	1945, Dec. 3	IONESCU Z. ALEXANDRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Ştirbey-Vodă. Str. Bucureşti, 165. Călăraşi.
155	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Sorbona. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. — Decan al Facultăţii de Ştiinţe. — Cluj.
156	1946, Febr. 18	IONESCU V. FLORIN. Inginer C. F. R. — Str. Elena Matei Voevod, 7. Bucureşti.
157	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Ştiinţele Matematice. — Asistent la Facultatea de Arhitectură din Bucureşti. Profesor secundar. — Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti 4.
158	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU ION. Inginer Inspector General — Profesor onorific al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Pensionar. — Str. Răsuri, 25. Bucureşti. Telefon 1.17.64.
159	1945, Dec. 3	IONESCU N. MIHAI. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Radu Greceanu. Str. Dealul Viilor, 19. Slatina.
160	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor de Matematici la Liceul Comercial „Gh. Chiţu". — Str. Banu Mihalcea, 29. Craiova.
161	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Inspector şcolar. — Calea Rahovei, 40. Bucureşti. Telef. 5.76.88.
162	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici. — Profesor — Str. Petrescu IX. Nr. 30. Bucureşti.
163	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Maior în rezervă. Inginer constructor. Licenţiat în Matematici. — Profesor Şc. Ofiţeri de Geniu. Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
164	1932, Apr. 20	IONESCU-ZANE D. GH. Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti, (Secţia Mine şi Metalurgie). Inginer Şef cl. I. — Director al Fabricei de Timbre Min. Finanţelor. — Str. Fabrica de Chibrituri, 28. Bucureşti. Telefon 3.80.70.
165	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Comandor-Inginer. Bd. Pache 107—Bucureşti.
166	1946, Febr. 18	IVANCEA I. MIRCEA. Inginer C. F. R. — Subşef de serviciu. Aleea Grand No. 11. Bucureşti.
167	1929, Ian. 30	KAUFMANN NORBERT. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele Bucureşti, — Inginer-Consilier, Direcţia Construcţiilor C. F. R. — Str. General Manu 26, Bucureşti 2. Telefon 110.74.
168	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6. Telef. 3.83.18.
169	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Directorul Şcoalei de Electricieni şi Mecanici. — Bul. Brâncoveanu, 6. Bucureşti. Telef. 4.06.34.
170	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de Corp de Armată în rezervă. — Str. Spătarului, 54. Bucureşti 1. Telefon 2.09.40.

171	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — St. Dr. Mirinescu, 23. Bucureşti.
172	1946, Aug. 26	LUCULESCU CONSTANTIN. Inginer. — Str. Vasile Lascar, 27. Bucureşti.
173	1945, Dec. 3	MACOVEI ION. Profesor de matematici la Colegiul Naţional „Carol I". Craiova. Str. Elena Doamna, 38. Craiova.
174	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară de matematici şi Directoarea Şcolii Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti 3.
175	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. Telef. 7.39.45.
176	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. Fost Director General al Regiei Monopolurilor Statului. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3. Telefon 2.54.10.
177	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Str. Sandu Aldea, 98. Bucureşti. Tel. 4.92.66.
178	1946, Aug. 26	MANGÉRON I. DUMITRU. Profesor. Şcoala Politehnică Iaşi.
179	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer S. N. P. S. — Bd. Dacia, 41. Bucureşti.
180	1946, Febr. 25	MANU IOAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Şcoala Normală de băieţi — Gherla.
181	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Str. Dr. Pasteur, 65. Bucureşti. Telef. 4.36.37.
182	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3. Telef. 2.45.84.
183	1939, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Conferenţiar la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Hajdeu, 1. Cluj.
184	1946, Aug. 26	MARINESCU S. DUMITRU. Inginer. — Str. Alexandru II, 15. Ploeşti.
185	1922, Mai 10	MATEESCU CRISTEA. Doctor Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Inginer liber profesionist. — Str. Dorobanţilor, 1. B. (Alee). Bucureşti. Telefon 2.25.70.
186	1945, Dec. 3	MATEESCU I. ION. Inginer. — Şef de secţie C. F. R. Şos. Jianu, 3. Bucureşti.
187	1943, Aug. 26	MATEESCU DAN. Inginer diplomat.—Politehnica Berlin Strasburg. Inginer la Uzinele Reşiţa. Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Gh. Lazăr, Nr. 5. Reşiţa.
188	1943, Aug. 26	MĂTIEŞ V. ION. Licenţiat în Matematici la Universitatea din Cluj. Profesor secundar-Cluj. — Str. D-trie Cantemir, 17. Cluj.
189	1944 Aug. 21	MAVRODIN D. DUMITRU. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Arhitectură din Bucureşti. — Str. Antim 62. Bucureşti.
190	1943, Febr. 18	MEHEDINCU VASILE. Licenţiat în Matematici. Profesor titular definitiv la Liceul Comercial „N. Bălcescu", Bucureşti.—Str. Alex. Constantinescu, Nr. 24. Parcul Domeniilor. Bucureşti 2.

191	1939, Aug. 31	MEREUȚĂ EM. Licențiat în Matematici. — Str. Niculescu Bazar, 7. Parcul Iancului. București. Telef. 5.88.61.
192	1927, Mai 11	MEREUȚĂ V. Inginer. — Subdirector Direcțiunea de Întreținere C. F. R. — Str. Ștefan Burcuș, 12. București 2. Telef. 7.13.91.
193	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Lt.-Col. de Artilerie. Licențiat în Științele Fizico-chimice și Drept, brevetat al Școalei Superioare de Război din Paris. — Profesor la Școala Superioară de Război. — Str. Delea Veche, 15 bis. București 4. Tel. 4-3514.
194	1942, Aug. 27	MIHĂIESCU S. ȘTEFAN. Inginer, Diplomat al Școlii Politehnice din București. — Uzinele Metalurgice Concordia. Ploești.
195	1945, Dec. 3	MIHĂILĂ N. Licențiat în matematici. — Profesor Liceul Comercial Carol I, București. — Str. Av. Sănătescu, 8. București.
196	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul Matei Basarab București. — Str. Vulturi, 63. București 4. Telef. 4-3425.
197	1921, Febr 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenței, 63. București 6. Telef. 4.07.18.
198	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE. Doctor în Matematici. — Conferențiar la Facultatea de Științe București. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Gogu Cantacuzino, 14. București 4.
199	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Inginer-Electro-Mecanic diplomat al Școalei Politehnice din București. Licențiat în Științele Matematice. — Inginer la Atelierele Grivița. — Str. Paleologu, 7. București. 4.
200	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer. — Inginer-Șef la Societatea „Concordia", Str. Roma, 18. București. Telef. 2.66.88.
201	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licențiat în Matematici. — Profesor. Secr. G-ral Min. Ed. Naționale. Str. Vasile Conta, Intr. A, ap. 6. București.
202	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer Inspector General. Licențiat în Matematici. — Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piața Lahovari, 1 A. București 3. Telef. 2.53.43.
203	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. București. Telef. 2.45.91.
204	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. Licențiat în Matematici. — Inginer la Direcția Poduri C. F. R. Str. Mihai Bravu Nr. 160 bis. București.
205	1939, Febr. 23	MORȚUN EMIL. Licențiat în Matematici. — Profesor la Liceul „I. C. Brătianu". Pitești.
206	1932, Febr. 21	NEAMȚU PETRE. Inginer. — Str. Roma, 59. București 3.
207	1946, Aug. 26	NECULCE EUGENIU. Profesor. Str. Popa Tatu, 61. București.
208	1944, Feb. 9	NEGOESCU NICOLAE. Licențiat în Matematici. — Asistent la Catedra de Calcul Diferențial și Integral din Iași. Facultatea de Științe Iași.
209	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licențiat în Matematici dela Facultatea de Științe din București. — Profesor definitiv la Liceul Codreanu din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.

210	1944, Feb. 9	NEICU MIRCEA. Inginer. Dipl. al Şcoalei Politehnice din Berlin.— Inginer la Direcţia D. C. F. R. — Şoseaua Jianu 34. Bucureşti III.
211	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. Agricultori, 15. Bucureşti 4.
212	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. Şcoala Politehnică Timişoara. — B-dul T. Ionescu, 22, Bucureşti 1. Telef. 2.12.31.
213	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industrial. Absolvent al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Str. Ştefan cel Mare, 44. Piatra Neamţ.
214	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Coordonării în Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Constructori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6. Telef. 3.10.94.
215	1929, Ian. 31	NICOLESCU MIRON. Ministru Subsecretarar de Stat la Ministerul Educaţiei Naţionale. Fost elev al Şc. Normale Superioare din Paris. — Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Paris 14. Bucureşti 3. Telef. 2.28.78.
216	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor de Marină în rezervă.— Pensionar. — Str. Dr. C. Gr. Romniceanu 7. Tel. 5.32.12.
217	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti. — Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
218	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Paris 10 b. Bucureşti 2. Telef. 2.54.09.
219	1944, Mai 8	NOVACU VALER. Licenţiat în Matematici. Doctor în fizică. — Şef de lucrări la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Cluj.
220	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Director al Institutului de Statistică, Actuariat şi Calcul. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6. Tel. 3.48.85.
221	1945, Dec. 3	ONIGA GH. THEODOR. Inginer, funcţionar S. S. A.— Str. Anton Pan, 16 B. Etaj II. Bucureşti.
222	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti (Secţia Electro-Mecanică). — Directorul Docurilor Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi.
223	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer constructor, cadastral, hotarnic. Topometru autorizat. — Licenţiat în Matematici. Profesor de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii Voevozi, 9. Bucureşti 2. Telef. 3.47.11.
224	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4. Telef. 4.32.48.
225	1942, Aug. 27	PANAITE N. THEODOR. Maior, Inginer S. S. T. A. A. — Bucureşti.
226	1929, Ian. 21	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. – Profesor Politehnica Bucureşti. Profesor la Institutul de Statistică, Actuariat şi Calcul. Inspector General actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Prelungirea Negoiului, 16. Bucureşti.

227	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C.F.R. — Str. Dr. Istrate, 44. Bucureşti 5. Telef. 4.45.36.
228	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici. — Sub-director în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — Splaiul Independenţei, 56. Bucureşti. Telef. 5.18.20.
229	1945, Dec. 3	PĂTRAŞCU A. GHEORGHE. Inginer. Profesor Şcoala Subingineri. Str. Av. Gh. Mărăşoiu, 18. Bucureşti.
230	1945, Dec. 3	PĂTROIANU MIHAIL. Inginer. Licenţiat în matematici. Str. Calomfirescu, 6. Bucureşti.
231	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. — Profesor la Politehnica Bucureşti. — Str. Dr. Severeanu, 26. Bucureşti 6. Telef. 6.12.52.
232	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer C. F. R. — Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6. Telef. 3.61.56.
233	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti. Telef. 3.22.31.
234	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Şef de lucrări la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 38. Bucureşti 6.
235	1945, Aug. 27	PETRESCU IULIAN. Licenţiat în matematici. — Asistent universitar. Str. Inişor, 4. Bucureşti.
236	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie. — Str. Roma (Intrarea Roma, 5). Bucureşti 3. Telef. 2.03.91.
237	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
238	1945, Dec. 3	POP ALEXANDRU. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Comercial „Regele Mihai I", Bucureşti. Str. Episcopul Ilarion, 28. Bucureşti, IV.
239	1936, Febr. 18	POPESCU N. CORNELIU. Licenţiat în matematici. Profesor. — Str. Griviţei, 120. Călăraşi.
240	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Licenţiat în Matematici. Lt.-Col. Brevetat de Stat Major. — Incadrează Marele Stat Major — Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti 6.
241	1945, Dec. 3	POPESCU OVIDIU. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Referent C. A. M. — Str. Stupinei, 34, scara C. ap. 1, parter. Bucureşti.
242	1935, Apr. 10	POPESCU A. VICTOR. Inginer — Conferenţiar Politehnica Bucureşti. Str. Comand. E. Botez, 12. Bucureşti 3. Telef. 2.38.30.
243	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. — Fost Director al Fabricei de Motoare de Aviaţie I. A. R. — Str. General Berthelot 65. — Bucureşti.
244	1944, Febr. 16	POPESCU-ZORICA AL. Licenţiat în Matematici al Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti pe lângă catedra de Algebră Superioară şi Calculul Probabilităţilor. — Str. Dr. N. Staicovici 21. Bucureşti. Telef. 3.21.13.

245	1944, Febr. 9	POPOVICI C. CONST. Inginer în Serv. Construcţiilor şi Instalaţiilor C. A. M. — Piaţa Lahovari 1 A. Bucureşti. Telef. 2.76.30.
246	1946, Febr. 18	POPOVICIU I. GAVRIL. Inginer C. F. R. — Str. Virgil Pleşoianu, 53. Bucureşti, II. Telef. 7.47.37.
247	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Profesor Universitatea din Cluj.
248	1931, Mart. 11	POPP N. Comandor — Inginer. — Str. Viitor, 16. Bucureşti 3. Telef. 2.65.72.
249	1927, Mai 11	POPP I. TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Inspector general didactic, Min. de Război. — Profesor la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Str. Clucerului, 10. Bucureşti 2. Tel. 7-1125.
250	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor. — Intr. Tighina, 11. Bucureşti 2. Telef. 3.58.52.
251	1945, Dec. 3	POSTELNICESCU MIRCEA. Inginer. Uzina electrică Griviţa C. F. R. Str. Dr. Demostene, 9. Bucureşti.
252	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Divizie. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
253	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. — Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi. — Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2. Telef. 7.46.00.
254	1945, Dec. 3	PREDOIESCU M. TRAIAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Gimnaziul Comercial Regele Ferdinand I. — Str. Eroina dela Jiu No. 14. Bucureşti.
255	1944, Febr. 9	PROFIRI N. Inginer Inspector General. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — B-dul Elisabeta 24. Bucureşti. Telef. 3.25.91.
256	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. General de Artilerie în rezervă. — Consilier technic pentru armament la Creditul Naţional Industrial. — B-dul Lascăr Catargiu, 16. Bucureşti 3. Telef. 2.49.46.
257	1941, Iunie 5	PROVINCEANU MIHAIL. Inginer electromecanic. Diplomat al Şc. Politehnice Bucureşti şi al Şcolii Superioare de Electricitate Paris. — Parcul Jianu. Str. Q (Heleşteului), 24. Bucureşti. Telef. 7.39.13.
258	1946, Febr. 18	RĂDULESCU MARCEL. Inginer C. F. R. Gara de Sud. — Ploeşti.
259	1941, Febr. 20	RĂDULESCU I. MIRCEA. Inginer constructor, diplomat al Şcoalei Politehnice. Şef de secţie în Direcţiunea Construcţii C. F. R. Secţia I Poduri C. F. R. Sinaia.
260	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Consilier în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti. Telef. 2.82.04.
261	1946, Febr. 18	RIZESCU T. GHEORGHE. Inginer Inspector General. Director General al Uzinelor N. Malaxa. — B-dul Brătianu, 32. Bucureşti.
262	1945, Dec. 3	RIZESCU T. ION. Licenţiat în matematici. — Profesor Liceul Mircea cel Bătrân — Constanţa. — Str. Ştefan Mihăileanu, 18. Constanaţa.
263	1946, Aug. 26	ROCIU MARGARETA. Profesoară. — Str. Horei, 32. Bucureşti.

264	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Doctor în Ştiinţele Politico-Economice. — Licenţiat în Drept. — Avocat. — Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6. Telef. 4.66.32.
265	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1. Telef. 3.62.54.
266	1941, Febr. 20	RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer Direcţia Podurilor C. F. R. — Bd. G-ral Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5. Telef. 4.53.91.
267	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Cartierul C. A. M. Filaret Str. B. 28. Bucureşti 6. Telef. 5.18.20.
268	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
269	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer Constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5 (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
270	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer-Şef. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3. Telef. 2.14.30.
271	1944, Febr. 16	SAUR I. Inginer electromecanic. — Inginer Soc. „Seta" Sibiu. Subdirector Ministerul Afaceri Interne. — Str. Ion Maiorescu, 47. Bucureşti. Telef. 1.11.98.
272	1938, Aug. 31	SAVIN I. C. Căpitan. Licenţiat în Matematici. — Str. Dr. Severeanu, 35. Bucureşti 3. Telef. 4.78.02.
273	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer Şef — Profesor titular Şcoala Politehnică Timişoara. Director General P. T. T. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti. Telefon 3.41.41.
274	1945, Dec. 3	ŞERBĂNESCU FLORICEL. Licenţiat în matematici. Actuar şi Asistent la Acad. Comercială. — Str. M. Iot. 359. Vatra Luminoasă. — Bucureşti.
275	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer Inspector General. Referent la Consiliul Tehnic Superior. — Str. Paleologul, 3 bis. Bucureşti. Telefon 3.46.06.
276	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie. — Rector Politehnica din Bucureşti. Fost profesor la Universitatea din Cluj. Membru corespondent al Academiei Române — Calea Plevnei, 56. Bucureşti 2.
277	1921, Febr. 6	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Facultatea de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Şos. Kiseleff 25. Bucureşti 2. Telef. 7.10.01.
278	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. — Inspector în învăţământul secundar. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti. Telefon 4.92.49.
279	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer constructor. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti 3. Telefon 2.25.55.

280	1945, Dec. 3	SIRINIAN MENDREY. Licenţiată în matematici.— Profesoară lic. din Constanţa. — Str. Ion Grădişteanu, 17. Constanţa.
281	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Diplomat Şcoala Politehnică Bucureşti 928. — Soc. Comunală Locuinţe ieftine Bucureşti. — Parcul Iancului II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti. Telef. 4.92.13.
282	1910, Aug. 3	SMÂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General. Pensionar. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
283	1946, Aug. 26	ŞOVA C. ION. Inginer. — Str. Ion Ghica, 6. Cluj.
284	1943, Febr. 18	STAMATE I. IONEL. Licenţiat în Matematici. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.
285	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3. Telef. 2.35.75.
286	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3. Telef. 2.16.76.
287	1938, Febr. 17	STAN I. AURELIAN. Lt. Comandor Inginer, diplomat Politehnicei Bucureşti. Licenţiat în Matematici. Membru corespondent al Academiei Române de Ştiinţe. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei (Fontainebleau—Franţa). — Str. Atena, 3. Bucureşti. Telefon 5.59.74.
288	1920, Ian. 10	STAN A. D-TRU. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Str. Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti. Telefon 3.84.89.
289	1945, Dec. 3	STAN V. ILIE. Inginer — Min. Lucr. Publice şi Comunicaţii. — Calea Dorobanţ, 82. Bucureşti. Telef. 2.84.08.
290	1941, Febr. 20	STANCU S. MARIN. Inginer constructor, diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer, Secţia I Poduri C. F. R. — Staţia Ploeşti-Triaj.
291	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Şef de Şantiere la Soc. Comunală de Locuinţe ieftine, Bucureşti. — Calea Şerban Vodă, 272. Bucureşti.
292	1943, Aug. 26	STĂNCULESCU I. ION. Inginer constructor. — Inginer în Adm. Com. P. C. A. Asistent suplinitor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Romană 182. Bucureşti.
293	1943, Febr. 18	STĂNCULESCU-ROMAŞCAN GEORGETA. Inginer constructor. — Inginer în M. L. P. C. — Str. Romană 182, Bucureşti.
294	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Sublocotenent. Ofiţer de Transmisiuni. Instructor la Şcoala de Ofiţeri de Transmisiuni. — Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti 4.
295	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R.. — Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
296	1943, Febr. 18	STOICA D. ALEXANDRU. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Str. Eminescu, 27. Bucureşti 2.

297	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Directorul Societăţii Comunale pentru Construirea de Locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Eminescu, 27. Bucureşti 2. Telefon 7.18.04.
298	1941, Iunie 5	STOIKA V. VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Paris, 12. Bucureşti 3. Telef. 2.03.19.
299	1945, Dec. 3	STOILOV S. Doctor în matematici. — Profesor universitar. — Ambasadorul României la Paris. — Piaţa Roseti, 3. Bucureşti.
300	1946, Aug. 26	STUPARU CONSTANTIN. Profesor. — Str. Plevnei, 21. Turnu-Severin.
301	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de Artilerie în rezervă. — Str. Frumoasă, 54. Bucureşti 2. Telef. 3.39.31.
302	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici. Doctor Inginer mecanic. — Profesor de Radio-Comunicaţii la Politehnica din Bucureşti. — Str. Cazărmei, 52. Bucureşti 6. Telef. 4.50.78.
303	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Profesor onorar. Pensionar. — Str. Dionisie, 76. Bucureşti.
304	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Profesor la Politehnica din Bucureşti. Directorul Laboratorului de Rezistenţă şi Incercări de materiale. Calea Griviţei 132. Telefon 3.94,40.
305	1945, Dec. 3	TEODORESCU ST. IOAN. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Referent C. F. R. — Str. Chişinăului, 16. Bucureşti.
306	1945, Dec. 3	TEODORESCU D. IOANA. Licenţiată în matematici. — Profesoară la Lic. Carmen-Sylva. — Str. Sandu Aldea, 16. Bucureşti.
307	1937, Ian. 28	THEODORU G. HENRI. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Intreprinzător de lucrări publice şi particulare. Birou de studii hidraulice. — Str. Alex. Donici, 27. Telefon 2.37.89.
308	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Aleea Matei Corbescu, 8. Bucureşti. Telef. 2.73.57.
309	1945, Dec. 3	TILICĂ ŞTEFAN. Locot. de Geniu · — Str. Elena Doamna, 78. — Bucureşti.
310	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4. Telef. 4.74.74.
311	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION. Inginer diplomat. Doctor-Inginer, de la Şcoala Politehnică Berlin. — Inginer la S. S. A. — Profesor la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie şi la Şcoala de Sub-Ingineri. — Str. Leova, 42. Bucureşti 4. Telef. 5.46.79.
312	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3. Telef. 2.80.64.
313	1939, Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică., Licenţiat în Matematici, Inginer. — Profesor la Labor. Optică, Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti 3. Telef. 2.80.64.
314	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în Matematici, licenţiat în Ştiinţe Fizico-Chimice, doctor în Ştiinţe. — Str. Vovidenie, 23. Iaşi.

315	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN. Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti 3. Telef. 2.35.82.
316	1944, Feb. 9	TUDORAN MIHAIL. Inginer Inspector General din C. F. R. — Str. Maramureş 2. Bucureşti. Telef. 5.39.48.
317	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer diplomat. — Inginer Inspector General în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Av. Th. Iliescu, 69. Bucureşti 3. Telef. 2-4361.
318	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6. Telef. 4.92.08.
319	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice şi Mecanice. — Membru Corespondent al Academiei Române. — Membru al Academiei de Ştiinţe. — Profesor de Mecanică la Universitatea din Bucureşti. — Directorul Institutului de Aerodinamică. Str. Londra, 44. Bucureşti. Telef. 2-3399.
320	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Inginer Inspector General. — Preşedintele Comitetului de Direcţie P. C. A. şi al Consiliului Superior al Apelor. — Str. Wilson, 15. Bucureşti 1. Telef. 4.32.85.
321	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial Nr. 1. — Str. Viitorului, 48. Bucureşti 3. Telef. 1.26.84.
322	1932, Mart. 26	VASILESCU GR., Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi Industriale din Bucureşti. — Profesor Politehnica din Bucureşti. — B-dul Pache, 120. Bucureşti 3. Telef. 6.05.06.
323	1920. Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Bucureşti.
324	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer constructor.
325	1944, Febr. 9	VASILESCU-STABU AL. MIRCEA. Sublocotenent de Artilerie. — Str. Iancu Căpitanul 35. Bucureşti.
326	1945, Mart. 26	VASILIU M. CONST. Inginer diplomat. Licenţiat în Matematici. — Diplomat în Statistică. — Inginer C. F. R. Timişoara. — Profesor de Matematici, la Liceul Militar „Mihai Viteazu". Str. Gh. Asachi. 4. Timişoara.
327	1931, Apr. 10	VASILIU G. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Director Ministerul de Finanţe. — Str. N. Bălcescu, 17. Bucureşti. Telef. 3.28.70.
328	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4. Telef. 3.23.55.
329	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodezie. — Str. Vespasian, 44. Bucureşti.
330	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer Şef. — Sub Şef Serviciu C. F. R. Calea Griviţei, 150. Bucureşti.

331	1925, Aug. 26	VASILIU MIHAI. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Profesor titular la Politehnica „Gh. Asachi" Iaşi şi Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. Str. Vaselor, 70. Bucureşti. Telef. 2.46.60.
332	1945, Aug. 27	VASU VASILE. Licenţiat în matematici. Profesor secundar. Str. Ilie Măgeanu Nr. 9 Sibiu.
333	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. Profesor Cluj. Piaţa Malinovschi Nr. 1.
334	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar Mihai Viteazul. — Asistent la Facultatea de Ştiinţe. — Str. Eliade Rădulescu, 25. Cluj.
335	1944, Febr. 9	VIŞA EUGEN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul de băieţi C.F.R. Aurel Vlaicu. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Str. Dr. Lister, 7 B. Bucureşti.
336	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Calea Moşilor, 133. Bucureşti 3. Telef. 5.53.07.
337	1945, Dec. 3	ZAHARIA O. IOAN. Licenţiat în matematici. — Profesor Lic. Comercial Constanţa. — Str. Tudor Vladimirescu, 11. Constanţa.
338	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Maior de Artilerie. — Inginer Subsecretariatul pentru Industria de Stat. Direcţia Tehnică. Bd. Elisabeta, 97.
339	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti. — Directorul Institutului Psihotehnic din Bucureşti. Str. Gh. Lazăr, 4. Bucureşti (Telef. 4-9337).
340	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. General de Escadră - Inginer. — Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris). — Profesor la Şcoala de Sub-Ingineri. — Str. Pasteur, 44. Bucureşti 6. Telefon 4.39.29.
341	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich. — Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 59. Bucureşti 2. Telefon 3.49.11.

†

MEMBRII DECEDAŢI [1]

	Data admiterii	Data morţii
1. ABASON E.	1922 Martie 1	1942 Dec. 17
2. BANCIU I.	1911 Februarie 20	1940 Sept. 16
3. BRATU GH.	1920 August 15	1941 Sept. 1
4. BRUCKNER VICTOR	1910 Iunie 21	1946 Iulie 20
5. BUNGEŢIANU D. PREDUŢA	1938 Februarie 27	1940 August 21
6. BUŞILĂ G. ION	1921 Mai 4	1944 Martie 10
7. FLORIAN D. ZAHARIA	1938 Februarie 17	1945 Aprilie 5
8. FUNDĂŢEANU C. I.	1928 Mai 9	1940 Sept. 23
9. GHEORGHIU A. MIRCEA	1913 August 30	1944 Decembrie 21
10. IOACHIMESCU GH. ANDREI	1895 Septemvrie 15	1943 Martie 13
11. LINTEŞ ION, C-DOR	1919 Septemvrie 12	1946 Iulie 21
12. NICHIFOR A. GH	1910 Mai 21	1946 Aprilie 3
13. SERGESCU BARBU	1928 August 29	1944 Iulie 29
14. STOICESCU T. T.	1936 August 25	1945 Mai 1
15. TEODORESCU V. N.	1911 Mai 18	1943 Ianuarie 23
16. ZAMFIRESCU C. GRIGORE	1924 Ianuarie 30	1943 Iunie 8

[1]) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*" până la sfârşitul vieţii lor.

ASUPRA UNEI ECUAȚII ALGEBRICE

Ne propunem să studiem ecuația:

$$P(x) \equiv x^m + x^{m-1} + \ldots + x^{p+1} - x^p - \ldots - x - 1 = 0, \quad (1)$$

de gradul $m \geqq p+1$. Pentru $m = p+1$, avem ecuația propusă, în problema 4319 și întâlnită de d-l Prof. TH. ANGHELUȚĂ într'un studiu [1] relativ la modulele rădăcinilor unei ecuații algebrice.

Vom determina mai întâiu numărul rădăcinilor reale ale ecuației considerate. Pentru aceasta, înmulțim primul membru al acestei ecuații cu $x-1$ și găsim ecuația

$$x^{m+1} - 2x^{p+1} + 1 = 0, \quad (2)$$

căreia îi aplicăm teorema lui DESCARTES [2].

1° *m și p impari.* Ecuația (1) are trei rădăcini reale: -1 și alte două simetrice.

2° *m și p pari.* Ecuația (1) are două rădăcini reale și de semne contrare.

3° *m par, p impar.* Urmează aceeași concluzie ca în cazul precedent.

4° *m impar, p par.* Ecuația (1) are o singură rădăcină reală. In toate cazurile, ecuația (1) are numai o rădăcină pozitivă pe care o notăm cu a. Din egalitățile

$$P(1) = m - 2p - 1 \quad , \quad P(2) = 2^{m+1} - 2^{p+2} + 1,$$

pentru $m < 2p+1$, rezultă $1 < a < 2$. Pentru $m = 2p+1$, avem $a = 1$ și ecuația (2) devine

$$(x^{p+1} - 1)^2 = 0.$$

Dacă $m > 2p+1$, atunci $a < 1$.

Vrem să arătăm că *o limită superioară, pentru modulele rădăcinilor complexe ale ecuației* (1), *este unitatea.* Știm că o astfel de *limită este și a* [3]. *Prin urmare, rămâne de arătat proprietatea numai* pentru $m < 2p+1$. In acest scop, punem ecuația (2) sub forma [4]

$$x^{m+1} + 1 = 2x^{p+1}.$$

---

1) Una extensione di una teorema di HURWITZ (Boll. Un. Mat. It., An. XII, N. 5, 1933).

2) TH. ANGHELUȚĂ, *Curs de Albegră Superioară*, vol. 3, p. 285.

3) Idem p. 303.

4) „ vol. I, p. 355, Exerc. 42.

Notând cu r modulul unei rădăcini oarecare x, a ecuației (1) avem

$$r^{m+1} + 1 \geqq 2r^{p+1}.$$

Observăm că semnul egal nu convine [1] decât lui a și rădăcinilor negative din cazurile 1^0 și 3^0. Urmează că polinomul $r^{m+1} - 2r^{p+1} + 1$ este pozitiv pentru modulele celorlalte rădăcini. Insă, acest polinom ia valori pozitive sau negative după cum r este în primul sau în al 2-lea din intervalele $(0, 1)$ și $(1, a)$. Proprietatea este astfel dovedită, căci modulele rădăcinilor complexe sunt inferioare lui a.

O limită inferioară rădăcinilor ecuației (1) *este* $\dfrac{a}{a+1}$.

Impărțind $P(x)$ cu $x - a$, obținem ecuația

$$x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} = 0, \qquad (3)$$

ai cărei coeficienți sunt pozitivi, căci polinomul $P(x)$ are o singură variație. De altfel, avem egalitățile

$$a_1 = a + 1 \quad , \quad a_2 = aa_1 + 1, \ldots, a_{m-p-1} = a_{m-p-2} + 1,$$

$$a_{m-p} = aa_{m-p-1} - 1, \ldots, a_{m-1} = aa_{m-2} - 1 \quad , \quad a_m = aa_{m-1} - 1.$$

Din primele $m - p - 1$ egalități, rezultă că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{m-p-1}$ sunt pozitive și crescătoare. Din aceste egalități mai rezultă

$$\frac{a_h}{a_{h-1}} = \frac{aa_{h-1} + 1}{aa_{h-2} + 1}, \; p = 2, \ldots, m - p - 1 \text{ și } a_0 = 1$$

de unde

$$a_h - a_{h-1} = a\,(a_{h-1}^2 - a_h a_{h-2}).$$

Prin urmare, rapoartele

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_{m-p-1}}{a_{m-p-2}}$$

formează un șir descrescător.

Iar din ultimele $p+1$ egalități deducem că $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_{m-p-1}$ au aceeași proprietate, deoarece avem

$$a_{m-1} = a\,(a_{m-2} - a_{m-1}), \ldots, a_{m-p} - a_{m-p+1} = a\,(a_{m-p-1} - a_{m-p}).$$

---

1) Th. Angheluță, *Curs de Algebră Superioară*, vol. I, p. 179.

Ca mai sus, deducem că rapoartele

$$\frac{a_{m-p-1}}{a_{m-p-2}}, \ldots, \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}$$

sunt descrescătoare. Aşa dar, şirul de numere pozitive

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}$$

este descrescător. După teorema lui HURWITZ [1] ultimul din aceste numere este o limită inferioară, pentru modulele rădăcinilor ecuaţiei (3). Propoziţia este astfel dovedită.

N. GAIU
Profesor Colegiul Naţional „N. Filipescu".

PROPRIETĂŢI ALE PUNCTELOR ISOGONALE, DEPE DIAMETRELE CERCULUI CIRCUMSCRIS UNUI TRIUNGHIU

1. *Cercurile circumscrise triunghiurilor podare, ale punctelor depe un diametru al cercului circumscris triunghiului* ABC, *trec prin ortopolul acestui diametru.*

Fie puntele A, B, C şi M pe o iperbolă echilateră (E) de centru ω; fie A', B' şi D' mijloacele laturilor BC, AC şi MC iar *a*, *b* şi *c*, proecţiile punctului N pe laturile triunghiului ABC.

Pentru a arăta că cercul (F), circumscris triunghiului podar *abc*, trece prin ω, este destul să se arate că unghiul $a\omega b$ = unghiul *abc*.

Din triunghiurile formate, se deduc relaţiile:

unghiul M*ca* = unghiul MB*a* = unghiul D'A'C

şi

unghiul M*cb* = unghiul MA*b* = unghiul D, B'C.

Cum cercurile EULER ale triunghiurilor înscrise în o iperbolă echilateră, trec prin centrul său ω, în triunghiul B*c*M, unghiul $a\omega D' =$ unghiul D'A'C iar în triunghiul CAM, unghiul $b\omega D' =$ unghiul BDC şi deci

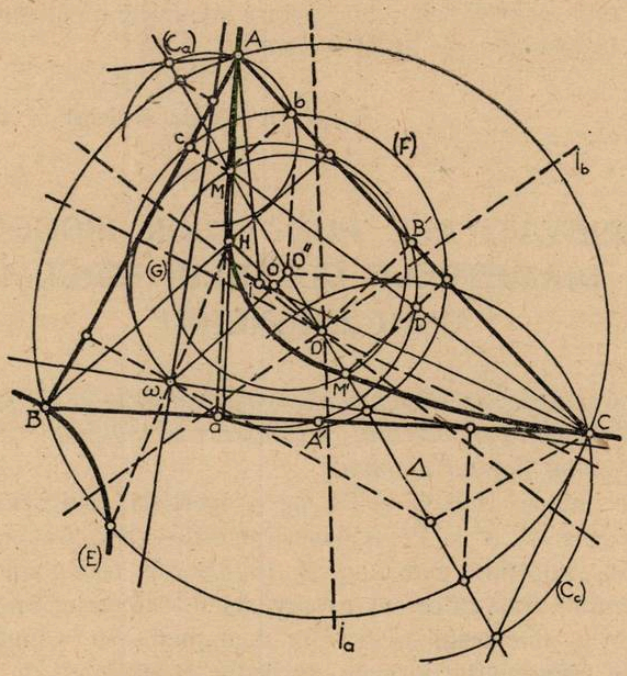
$$\sphericalangle\, a\omega b = \sphericalangle\, a\omega D' + \sphericalangle\, b\omega D' = \sphericalangle\, D'A'C + \sphericalangle\, D'B'C = \sphericalangle\, acb.$$

1) *The Thohoku Mathematical Journal*, vol. 4, p. 89, 1913.

Iperbola echilateră (E) de centru ω, este inversa isogonală a diametrului Δ, al cercului ABC de centru O.

Şi atunci, inversul isogonal al punctului M' depe iperbola echilateră (E) este punctul M' depe diametrul Δ. Ori, triunghiurile podare ale punctelor M şi M', faţă de ABC, *sunt înscrise în acelaşi cerc* (F) *şi deci, acest cerc, trece prin centrul* ω *al iperbolei* (E).

Centrul ω al iperbolei echilatere (E), este *ortopolul diametrului* Δ, faţă de triunghiul ABC [1]).



a) In patrulaterul complect, format de triunghiul ABC şi diametrul Δ, *Cercurile descrise pe diagonale ca diametre, trec prin* ω. Aceste cercuri, sunt circumscrise triunghiurilor podare, ale punctelor, intersecţiile lui Δ, cu laturile tr. ABC.

Mai rezultă că, *al 2-lea punct de întâlnire ale acestor cercuri, se găseşte pe cercul* ABC, fiindcă coarda lor comună trece prin

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XL, Nr, 12, pag. 536: « *Din Geometria triunghiului* » de G-L' Gh. I. Popescu.

H şi acesta este, C_a centrul de similitudine al cercurilor ABC şi EULER şi centrul de inversiune.

b) Pentru punctele, unde diametrul Δ, tae cercul ABC, cercurile (F) se reduc la 2 drepte SIMSON, perpendiculare care trec prin ω.

Ele sunt asimptotele iperbolei echilatere (E).

c) Isogonalul punctului dela infinit, pe diametrul Δ, se găseşte pe cercul ABC şi pe iperbola (E) în al 4-lea punct al lor de intersecţie, iar cercul (F), se reduce în acest caz la dreapta SIMSON, care trece prin ω şi relativă la acest punct. Această dreaptă este perpendiculară pe Δ, fiindcă centrul cercului (7) este la infinit pe Δ.

2. *Cercul* (F), *circumscris triunghiurilor podare ale perechii de puncte isogonale* M *şi* M′, *ce se găsesc la intersecţia iperbolei* (E) *şi a diametrului* Δ, *este tangent în ortopolul* ω *al acestui diametru, la cercul* EULER, *relativ la triunghiul dat* ABC.

Considerăm că în triunghiul ABC, avem două puncte isogonale M şi M′. La diametrul OM, corespunde ca inversă isogonală, iperbola echilateră E iar la diametrul OM′ iperbola E′.

Cercul circumscris triunghiului podar al punctului M trece prin ortopolul ω al diametrului OM şi al punctului M′, va trece prin ω′. Punctele ω şi ω′, se găsesc pe cercul EULER de centru O.

Cele două cercuri podare, se confundă în cercul (F), fiindcă punctele M şi M′ sunt isogonale şi deci cercul (F) taie cercul EULER, în punctele ω şi ω′.

In cazul când punctele M şi M′ isogonale, sunt intersecţia iperbolei echilatere (E) cu diametrul Δ, transformata sa isogonală, diametrele OM şi OM′ se confundă cu Δ, ortopolurile ω şi ω′ se confundă cu ω, ortopolul lui Δ, de unde se deduce că *cercul* (F), *este tangent în* ω, *la cercul* EULER.

a). Fie O″ centrul cercului (F) şi deci mijlocul segmentului MM′. Cercul (F) va mai trece prin punctele de intersecţie ale diametrului Δ, cu asimptotele iperbolei (E), O″ fiind şi centrul segmentului determinat de asimptote pe Δ. Rezultă că, *punctele* ω, O′ *şi* O″ *sunt în linie dreaptă*, după cum şi în cele două grupe, punctele O, O″, M şi M′ ; O, O′ şi H, sunt tot în linie dreaptă.

b) De unde reese şi *construcţia cercului* (F).

Punctul O″, se găseşte la intersecţia dreptelor Δ şi ωO′ iar raza cercului (F) este ωO″.

Dacă acest cerc, taie toate trei laturile triunghiului ABC *punctele* N şi M″ *sunt reale şi deci* Δ, *taie iperbola* (E).

c) Determinarea punctelor M *şi* M′.

Cercul (F), construit ca mai sus, taie laturile triunghiului în câte 2 puncte, ridicând perpendiculare pe laturi, trei câte trei, se taie în punctele M şi M′ depe diametrul Δ.

3. *Cazuri particulare ale poziţiilor punctelor inverse* M *şi* M′, *pe diametrele* Δ.

a) Teorema lui FEUERBACH. *Cercurile:* înscrise şi exînscrise, sunt tangente la cercul EULER.

Punctele M şi M′ se confundă, în cazul când diametrul Δ, trece prin punctele I, I_a, I_b, I_c, centrele cercurilor considerate.

Cercurile (F), vor fi confundate cu aceste cercuri, şi deci, tangente la cercul EULER.

Ortopolurile acestor diametre Δ, sunt punctele lui FEUERBACH.

In acest caz, iperbola (E) va fi tangentă, la diametrul Δ, respectiv în centrele I, I_a, etc. care se confundă cu O″, centrele cercurilor (F).

b) Determinarea conicii, înscrise în triunghiul ABC, *şi având centrul în* O. Punctele isogonale M şi M′ sunt focarele conicei înscrise în triunghiul ABC iar cercul (F) este concentric cu cercul ABC de centrul O — în cazul considerat — ortopolul ω, este la intersecţia dreptei OO′, cu cercul EULER iar Oω este raza cercului (F). Se va lua numai punctul ω, pentru care cercul F, taie toate laturile triunghiului ABC, fiindcă OO′, taie cercul EULER, în două puncte.

Punctele M şi M′, se construesc, cum s'a arătat mai sus, sau ca la punctul 4), se determină Δ, etc.

c) Determinarea cercului (F), *ca să fie o dreaptă, tangentă la cercul* EULER. Pentru ca cercul F să devină o dreaptă tangentă la cercul EULER în ω, va trebui ca centrul O″ să fie la infinit pe direcţia ωO′. Cum O‴ ce găseşte şi pe diametrul Δ, rezultă că Δ, va fi paralel cu ωO′. Dreapta tangenta F şi dreapta ωO′, sunt asimptotele iperbolei echilatere (E), ce rezultă.

Atunci, tangenta la cercul EULER, este o dreaptă SIMSON a unui punct de intersecţie al cercului ABC, cu diametrul Δ, paralel cu ωO'.

Rezultă că această dreaptă SIMSON, este tangentă comună cercului EULER şi a ipocicloidei cu trei întoarceri, înfăşurătoarea dreptelor SIMSON din triunghiul ABC.

Această ipocicloidă, are trei puncte de tangenţă cu cercul EULER, şi deci, vor fi triunghiu ortoplan ω pe acest cerc, de unde trei diametre Δ şi trei iperbole echilaterale (E).

d) *Iperbola* (E), *se reduce la două drepte perpendiculare.* Acest caz are loc, când iperbola echilateră (E), se reduce la o înălţime şi latura corespunzătoare a triunghiului ABC. sunt deci, trei iperbole echilatere (E). Diametrul Δ, trece prin un vârf al triunghiului ABC, iar punctele M şi M' sunt: unul în acel vârf şi altul, unde Δ, taie latura opusă.

Cercul (F), *este tangent:* la cercul ABC, în vârful considerat iar la cercul EULER, în piciorul înălţimii corespunzătoare.

Sunt trei cercuri (F) în condiţiile de mai sus, corespunzătoare celor trei vârfuri ale triunghiului ABC şi se deduce ca la 1), *a)* că, cele *trei coarde comune ale celor trei cercuri, luate câte două, trec prin ortocentrul* H *al triunghiului* ABC.

e) *Cercul* (F), *se confundă cu cercul* EULER.

Când diametrul Δ, trece prin H, punctele M şi M', devin ortocentrul H şi centrul O, în triunghiul ABC, O" se confundă cu O' şi cercul (F), devine cercul EULER.

4. *Poziţiile diametrelor* Δ, *pentru care iperbola echilateră* E) *se taie cu* Δ, *în două puncte reale* (*distincte sau confundate*).

In fiecare vârf al triunghiului ABC, se formează un fascicol involutiv din dreptele isogonale AM, AM', etc şi în care, cele două bisectoare ale unghiului, sunt razele duble.

Pe diametrul Δ, fiecare din cele trei fascicole involutive cu vârfurile în A, B şi C, determină câte o diviziune armonică.

Pentru ca punctele isogonale M şi M' să se găsească pe Δ, trebuie să fie conjugate armonic, cu fiecare din proiecţiile de puncte determinate pe Δ, de cele două bisectoare, ce ies din cele trei vârfuri ale triunghiului ABC.

Pe diametrul Δ şi pe segmentele determinate de bisectoarele aceluiaşi unghiu, ca diametre se construesc cercurile (A_a), (B_b) şi (C_c), trecând prin A, B şi C şi având centrele lor pe Δ.

Axul radical al acestor cercuri, taie pe Δ în O″, centrul cercului (F). Punctul O″, fiind mijlocul segmentului MM′.

Din O″, ducând tangente egale, la cele trei cercuri se obţin raza cercului (G), ortogonal cercurilor C_a, C_b, C_c. Cercul (G) de centru O″, taie pe Δ în punctele căutate M şi M′, intersecţia lui Δ cu (E).

Unind centrul O al cercului ABC, cu centrele I, I_a, I_b şi I_c ale cercurilor înscrise şi exînscrise, se obţin poziţiile lui Δ, pentru care punctele M şi M′ sunt confundate şi sunt direcţiile limită, între diametrele care vor tăia iperbolele echilatere, transformatele lor isogonale, în două puncte reale sau imaginare.

In cazul figurei, se obţin punctele M şi M′ reale, pe diametrele Δ, din zonele determinate de diametrele: OI şi OI_a prelungire; OI_b şi OI_c prelungire.

In aceste zone cercurile C_a, C_b şi C_c, *nu se întretaie.*

a) Punctele M *şi* M′ *se confundă.*

In cazul când Δ, trece prin unul din centrele I, I_a, etc., grupa de cercuri C_a, C_b şi C_c are cercurile tangente, în centrul respectiv.

b) Unul din punctele M *sau* M′, *este la infinit pe* Δ *şi* (E). Dacă M′ este la infinit pe Δ şi (E), isogonalul său M, este al 4-lea punct de intersecţie al cercului ABC cu iperbola (E), Δ va trece şi el, prin acest punct.

Rezultă că Δ este paralel cu o asimptotă a iperbolei echilatere (E), se revine la cazul dela punctul 3), *c*) şi se deduce că Δ va fi paralel cu dreapta ωO′.

Cum O″, centrul cercurilor (F) şi (G), este la infinit pe direcţia ωO′ sau Δ, Cercul (G), se reduce la o dreaptă perpendiculară în M pe Δ.

Şi cum acest cerc redus la dreaptă, este ortogonal *cercurilor,* C_a, C_b şi C_c, rezultă că aceste trei cercuri, *sunt concentrice* având centrul comun, în punctul M.

G-L GH. I. POPESCU.

PREMIILE, BURSELE ŞI PUBLICAŢIILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

I. PREMII. In cursul anului LI de apariţie a *Gazetei Matematice* (anul şcolar 1945—1946), situaţiunea premiilor anunţate ca disponibile în Nr. 1 din Septembrie 1945, a fost următoarea:

1. Premiul de aritmetică în valoare de lei 5.000 a fost acordat elevului GH. GH. VRÂNCEANU din clasa a VIII-a a Liceului Militar din Timişoara, în baza raportului publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. LI, pag. 597.

2. Premiul de geometrie elementară « GH. ŢIŢEICA » în valoare de lei 5.000, nu s'a acordat, din lipsă de cadidaţi. Raportul a fost publicat în *Gazeta Matemutică*, pag. 743, Vol. LI.

3. Premiul de algebră « A. G. IOACHIMESCU », de asemenea nu s'a acordat. Raportul a fost publicat în *Gazeta Matematică*, pag. 667, Vol. LI.

4. Premiul de trigonometrie « V. CRISTESCU », în valoare de lei 20.000 s'a acordat în părţi egale a câte 10.000 lei d-lor M. R. CONSTANTINESCU, elev al Liceului „Petru şi Pavel“ din Ploeşti şi MARCEL D. COTARIU, dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. Raportul s'a publicat în *Gazeta Matematică*, pag. 707, Vol. LI.

5. Premiul de mecanică şi astronomie « SPIRU HARET ». Din lipsă de candidaţi nu s'a acordat, după cum reiese din raportul publicat în *Gazeta Matematică*, pag. 797, Vol. LI.

6. Premiul de filosofia matematicelor « VASILE CONTA », în valoare de lei 24.000 a fost acordat d-lui prof. ANTON DIMITRIU. Raportul s'a publicat în *Gazeta Matematică*, pag. 316, Vol. LI.

7. Premiul de matematici superioare pure sau aplicate « ING. H. CAPRIEL » în valoare de lei 1.000, se acordă din 5 în 5 ani. In anul 1945 s'a publicat chestiunea pe baza căreia se va decerna premiul în 1949.

8. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare « GENERAL SCARLAT PANAITESCU ». Cu anul acesta suntem în al IV-lea an, din perioada de 5 ani, la sfârşitul căreia se va acorda un premiu cu acest nume. Raportul s'a publicat în Nr. 1 anul LI, propunându-se a se avea în vedere *Revista Corpului Technic Militar şi a Apărării contra gazelor.*

9. Premiul « LT. COL. GH. TĂNĂSESCU » s'a acordat sub formă de cărți d-lui MIRCEA IOSIFESCU, primul clasificat la concursul *Gazetei Matematice* din acest an.

10. Premiul de geometria triunghiului și tetraedului « NICOLAE G. BOTEA » a fost decernat d-lui P. P. DRĂGHICESCU. Raportul s'a publicat în *Gazeta Matematică*, pag. 390, Vol. LI.

11. Premiul anual « INGINER ALEXANDRU ROȘU » a fost dat, anul acesta d-lui M. R. CONSTANTINESCU », elev în clasa a VII-a a Liceului „Petru și Pavel" din Ploești. Raportul s'a publicat în *Gazeta Matematică*, pag. 629, Vol. LI.

Pentru anul LII al *Gazetei Matematice*, anul școlar 1946—1947, în conformitate cu regulamentele ce se pot cumpăra la *Gazeta Matematică*, se vor putea acorda următoarele premii:

1. Premiul anual de aritmetică, de lei 5.000.

2. Premiul anual de geometrie elementară « G. ȚIȚEICA ». Pentru acest premiu Soc. *Gazeta Gatematică* dispune anul acesta de 15.000 lei, din care se vor putea decerna fie un singur premiu de această valoare, fie 1—3 premii de câte 5.000.

3. Premiul anual de algebră « A. G. IOACHIMESCU ». Din cei 20.000 lei disponibili anul acesta, se va putea atribui un singur premiu de această valoare, sau 1—4 premii de câte 5.000 lei.

4. Premiul anual de trigonometrie «V. CRISTESCU» de lei 5.000.

5. Premiul anual de mecanică și astronomie «SPIRU HARET» dispune anul acesta de lei 25.000. Se va putea acorda un premiu pentru întreaga sumă, sau 1—5 premii de câte cel puțin 5.000 lei.

6. Premiul anual de filosofia matematicelor « V. CONTA » de lei 4.000.

7. Premiul anual « LT. COL. GH. TĂNĂSESCU » constând din cărți de matematice cumpărate din venitul fondului cu acest nume, este destinat primului clasificat la concursul *Gazetei.*

8. Premiul anual de geometria triunghiului și tetraedului « NICOLAE G. BOTEA » din venitul fondului cu acest nume.

9. Premiul anual « INGINER AL. ROȘU », din venitul fondului respectiv, în valoare de lei 8.000 destinat celui mai harnic corespondent al Vol. LI.

10. Premiul de „Istoria Matematicelor" în valoare de 24.500 lei.

II. BURSE. 1. Din venitul fondului « PROF. ION IONESCU » nu s'a acordat din anul școlar 1942—1943, nicio bursă, din lipsă

de candidaţi conform regulamentului, venitul rămas disponibil se va adăuga la venitul din anul ce începe şi va servi pentru acordarea de burse în anul şcolar 1946—1947.

2. Din venitul fondului « ING. GH. EM. FILIPESCU », din lipsă de candidaţi, de asemenea nu s'a decernat nimic în 1945—1946.

III. PUBLICAŢII. In biblioteca technică a *Gazetei Matematice* căreia îi sunt destinate veniturile fondului « ANGHEL SALIGNY » nu s'a făcut nicio publicaţie anul acesta.

Din disponibilităţile curente ale Societăţii *Gazeta Matematică* se află sub tipar:

Culegere de probleme de mecanică de A. G. IOACHIMESCU.

COMISIUNEA PENTRU ADMINISTRAREA FONDURILOR SPECIALE ALE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ"

AL. AL. ROŞU, ING. D. A. STAN.

DONAŢII PENTRU „GAZETA MATEMATICĂ"

Condiţiile economice din ultimii ani au scumpit treptat, treptat tiparul în aşa măsură în cât sacrificiile pe care trebuie să le facem pentru scoaterea revistei au devenit foarte apăsătoare pentru majoritatea membrilor societăţii *Gazeta Matematică*. Această greutate a fost simţită de colaboratorii şi corespondenţii noştri, care într'un entuziasm de admirat ne-au trimis în cursul anului 1946 diferite sume pentru a spori fondul de imprimat *Gazeta Matematică*. In cuprinsul Vol. LI am publicat donaţiile primite, pe măsură ce ele s'au făcut.

Adunarea generală din 26 August 1946, ratificând acceptarea acelor donaţii a hotărît să se publice sub forma care urmează tabloul complect al donaţiilor şi să se exprime din nou şi pe aceasta cale mulţumiri entuziaştilor donatori.

Ne grăbim să o facem în chiar acest număr de început de an.

C-dor C. V. Costăchescu.	Lei 2.000	G-l Al. Gheorghieş. . .	Lei 7.000
Prof. C. Iacob	„ 3.000	Elevii Lic. „A. Vlaicu" .	„ 10.000
Prof. H. Dăscălescu . .	„ 5.000	C. Berdan	„ 15.000
Prof. Elena Niculescu. .	„ 5.000	Ing. I. Schileru.	„ 17.000
Ing. Ion Grosu	„ 6.000	Ing. G. S. Georgescu . .	„ 20.000
M. Sirinian	„ 6.000	Ing. D. Marinescu . . .	„ 20.000
I. S. Antoniu	„ 7.000	Prof. Gr. Orăşanu . . .	„ 20.000

Cl. III Lic. „Regele Ferdinand", R.-Sărat. . .	Lei	20.000
Cl. IV Lic. „Regele Ferdinand", R.-Sărat. . .	„	20.000
Liceul „Regele Ferdinad" R.-Sărat	„	20.000
I. Capriel	„	25.000
Ing. C. Grigorescu . . .	„	27.000
Cl. VIII Lic. „Regele Ferdinand", R.-Sărat. . .	„	30.000
Mariana Bratu	„	36.000
D. Cambureanu	„	40.000
Lic. de fete R.-Sărat . .	„	50.000
Ing. V. Manafu.	„	67.000
Ing. M. Portocală . . .	„	67.000
Ing. A. Ulescu	„	67.000
Prof. şi elevii Liceului Construcţii Bucureşti .	„	84.100
Ing. C. Mihalopol . . .	„	87.000
Elevii Lic. „Ion Maiorescu", Giurgiu . . .	„	140.000
Elevii Liceului „D. A. Sturza", Craiova .	Lei	165.000
Elevii Liceului „R. Greceanu", Slatina . .	„	175.000
Prof. şi Elevii Liceului „Petru şi Pavel", Ploeşti	„	180.000
Ing. C. Ionescu-Ţiu .	„	200.000
I.A.R. prin d-l G-l Gr. Zapan	„	200.000
Elevii Lic. „Codreanu", Bârlad	„	205.000
Elevii Lic. „Ştirbei Vodă", Călăraşi . .	„	230.000
Ing. A. Ioanovici . .	„	300.000
Elevi Liceului „I. Maiorescu", Giurgiu . .	„	560.000
Elevi Colegiului „N. Filipescu", Predeal.	„	720.000
Ing. Ramiro Gabrielescu	„	1.000.000

Aceste donaţiuni sunt o confirmare a necesităţii activităţii dela *Gazeta Matematică* şi un imbold pentru continuarea acestei activităţi desinteresate.

GAZETA MATEMATICĂ.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1947

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 26 August 1946, a hotărît să se ţină în anul 1947 concursul tradiţional, între elevii liceelor din întreaga ţară din clasele IV, V, VI, VII şi VIII.

Concursul va avea loc în ultimele zile ale vacanţei de Paşte. Data şi locul ţinerii concursului se va anunţa în numărul 6 din Februarie 1947 al revistei *Gazeta Matematică*, când se va publica şi numele candidaţilor admişi la concurs.

2. Inscrierea la concurs se va face *numai* prin cerere individuală, *scrisă personal* de candidat şi primită la Societatea *Gazeta Matematică*, Calea Griviţei 158, Bucureşti, până la ora 12 în ziua de 18 Ianuarie 1947.

Nu se primesc cereri scrise şi trimise de părinţi, rude, cunoştinţe, profesori sau şcoli.

3. In cerere candidatul va arăta pe puncte în ordinea următoare:

a) Numele de familie, numele de botez.

b) Şcoala şi clasa în care urmează. Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul pentru clasa precedentă.

c) Adresa personală: în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei de Paşte.

d) Dacă dispune sau nu de mijloace de a veni la Bucureşti, dacă are sau nu unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului.

Cei cari au nevoie de bani pentru transport vor indica gara de plecare spre Bucureşti şi pe cea de înapoiere dela Bucureşti.

e) Activitatea dela *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul Gazetei Matematice* indicând numerele de ordine ale problemelor şi exerciţiilor rezolvate sau menţionate.

4. Candidaţii admişi pentru concurs, dar care din diferite motive nu vor putea sau nu vor mai voi să vină la concurs, sunt obligaţi să anunţe în scris şi din timp societatea.

5. Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de a preda lucrarea scrisă.

6. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome şi premii sau menţiuni. Primul reuşit va primi premiul «LT. COL. G. TĂNĂSESCU» constând din cărţi.

Programa analitică a concursului şi materiile la care vor fi examinaţi concurenţii din fiecare clasă se vor publica în numărul 2 al *Gazetei Matematice.*

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ".

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SCARLAT PANAITESCU"

Subsemnaţii, membri în Comisiunea de premiere pentru „Premiul SCARLAT PANAITESCU" am constatat că în cursul anului 1945, nu s'a prezentat Societăţii *Gazeta Matematică* nicio lucrare în vederea unei eventuale premieri.

Cercetând lucrările de matematici cu aplicații la științele militare, apărute în 1945, precum și diferitele reviste de specialitate în care sunt publicate lucrări ce nu aparțin membrilor Societății *Gazeta Matematică*, am constatat că în cursul acestui an, au apărut un număr mai redus de articole de matematici cu aplicații la științele militare.

Printre articolele apărute și care ar putea fi luate în considerare la premiere, ne-a atras luarea aminte articolul „*Balistica tunurilor cu bătăi foarte mari*" al d-lui Maior Inginer EUGEN BURLACU, publicat în „*Revista Artileriei*" Nr. Octombrie-Decembrie 1945.

Domnul Maior Inginer BURLACU EUGEN indică în articolul mai sus citat și o metodă de calcul proprie, care poate fi aplicată nu numai în cazurile tunurilor cu bătăi foarte mari, ci și în cazul tunurilor cu viteze foarte mari și traiectorii întinse.

Ținând seamă de cele de mai sus suntem de părere și propunem ca pentru anul 1945 premiul „General SCARLAT PANAITESCU să fie acordat d-lui Maior Inginer EUGEN BURLACU pentru articolul „*Balistica tunurilor cu bătăi foarte mari*".

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI
„GENERAL SCARLAT PANAITESCU"

Ing. AL. BUNESCU, Lt. Col. ED. DRAGOMIRESCU-BUZNE, Lt. C-dor Ing. AURELIAN STAN.

Acest raport a fost citit și aprobat în Adunarea generală dela 26 August 1946.

NOTE MATEMATICE

1. *Rezolvirea ecuației de gradul al treilea.* Fie ecuația

$$x^3 + 3a\,x^2 + 3b\,x + c = 0 \qquad (1)$$

și să considerăm egalitatea

$$x = u + v + w \qquad (2)$$

unde u, v, w sunt trei cantități deocamdată arbitrare. Acestei relațiuni îi asociem ecuația

$$(x - u)^3 = (v + w)^3 \qquad (3)$$

ecuaţie care este verificată de valoarea lui x dată de (2), oricare ar fi u, v, w. In sfârşit, această ecuaţie se poate desvolta ţinând seama de egalitatea (2), avem

$$x^3 - 3ux^2 + 3u^2x - u^3 = v^3 + w^3 + 3vw(x - u) = 0$$

$$x^3 - 3ux^2 + 3(u^2 - vw)x - (u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw) = 0 \quad (4)$$

vom determina cantităţile u, v, w arbitrare astfel ca ecuaţia (4) să fie identică cu ecuaţia (1). Se găsesc condiţiile

$$u = -a\ ,\ u^2 - vw = b\ ,\ u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = -c$$

aceste condiţii formează un sistem de trei ecuaţii cu necunoscutele u, v, w şi care se mai pot scrie şi sub forma echivalentă [1]

$$u = -a\ ,\ vw = a^2 - b\ ,\ v^3 + w^3 = -2a^3 + 3ab - c.$$

IOAN ST. TEODORESCU.

2. *Asupra generalizării axului radical.* 1°. Intr'un articol publicat în *Gazeta Matematică* [2], D-l S. KAUFMANN determină ecuaţiile curbelor algebrice plane C, astfel ca A fiind un punct situat în planul lor, iar $M_1, M_2, \ldots M_n$ punctele unde o curbă C, este întâlnită de o secantă variabilă care trece prin A, produsul

$$\overline{AM_1} \times \overline{AM_2} \times \ldots \times \overline{AM_n} = \text{constant} = k. \quad (1)$$

Domnia-Sa găseşte, în raport cu un sistem de axe dreptunghiulare cu origina în A, următoarea ecuaţie pentru curbele C:

$$f(x, y) \equiv (x^2 + y_2)^p + P_{2p-1}(x, y) = 0, \quad (2)$$

unde $P_{2p-1}(x, y)$ este un polinom de gradul $2p-1$ şi $k = f(0, 0)$.

D-l Prof. M. GHERMĂNESCU [3] observă în alt articol, că proprietatea (1) fiind valabilă pentru o curbă C şi un punct A, este valabilă pentru orice punct A (x_0, y_0) al planului. In acest caz,

$$k = f(x_0, y_0).$$

Domnia-Sa numeşte expresia (1), *puterea punctului* A *în raport cu curba* (2).

---

1) TH. ANGHELUŢĂ: *Curs de Algebră superioară*, vol. I, pag. 207: Ecuaţia de gradul al treilea.

2) S. KAUFMANN: Asupra unor curbe algebrice, G. M. XXII, p. 149.

3) M. GHERMĂNESCU: Generalizarea axului radical G. M. XXIII, p. 265.

2°. Voiu da o caracterizare geometrică curbelor care se bucură de proprietatea (1).

Omogenizând ecuaţia (2), se găseşte

$$(x^2 + y^2)^p + z\, R_{2p-1}(x, y, z) = 0.$$

Intersectând cu dreapta dela infinit, se găseşte

$$Z = 0 \quad , \quad (x^2 + y^2)^p = 0,$$

deci punctele circulare ale planului,

$$I\ (1, i, 0) \quad , \quad J\ (1, -i, 0),$$

ca puncte multiple de ordinul p. Şi astfel, rezultatele precedente se pot enunţa.

„Dintre curbele algebrice de grad 2p ale unui plan, numai acelea care au contact de ordinul p — 1 cu dreapta dela infinit în punctele circulare, au constant produsul segmentelor situate pe o secantă variabilă ce trece printr'un punct al planului, mărginite de acest punct şi curbă“.

3°. Analog se interpretează geometric rezultatele enunţate de D-l. Prof. M. GHERMĂNESCU pentru suprafeţe.

„Dintre suprafeţele algebrice de grad 2p, numai acelea care întâlnesc planul dela infinit după p cercuri confundate pe conul izotrop, au constant produsul segmentelor situate pe o secantă variabilă ce trece printr'un punct, mărginite de acest punct şi de suprafaţă“.

4°. Ca o extindere în alt sens a problemei D-lui S. KAUFMANN, se pot căuta curbele algebrice

$$f(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{n} P_i(x, y) = 0,$$

$P_i(x, y)$ fiind un polinom omogen de grad i, astfel ca $M_1, M_2, \ldots M_n$ fiind punctele în care o secantă variabilă, ce trece prin O (origina axelor de coordonate) taie o curbă, să avem

$$\sum \frac{1}{\overline{OM_1} \times \overline{OM_2} \times \ldots \times \overline{OM_{n-2p}}} = \text{constant.}$$

Se găseşte condiţia

$$P_{2p}(x, y) \equiv \lambda (x^2 + y^2)^p.$$

C. IONESCU-BUJOR.

CHESTIUNI DE EXAMEN

FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN BUCUREŞTI

ALGEBRĂ AXIOMATICĂ

(1945, Sesiunea de vară).

I) 1°. Fie H inelul lui HAMILTON şi n un scalar al acestuia. Idealul (n) generat de n e bilateral. Se consideră inelul claselor de resturi $H/(n)$ iar în $H/(n)$ clasa particulară

$$\omega = \{ p_1, p_2, \dots p_k \},$$

unde $p_1, p_2, \dots p_k$ sunt *toţi* factorii primi, diferiţi, mai mari ca 1 ai lui n.

Să se arate, că idealul principal (ω) din $H/(n)$ e bilateral şi nilpotent.

2°. Să se demonstreze, că pentru n impar idealul (ω) coincide cu radicalul inelului $H/(n)$. Ce se poate spune despre structura inelului claselor de resturi

$$\mathfrak{Q} = \frac{H/(n)}{(\omega)} ?$$

3°. Să se arate, că avem isomorfismul

$$\mathfrak{Q} = H/(p_1, p_2, \dots p_k).$$

4°. Folosind isomorfismul din 3°, să se demonstreze că $\mathfrak{Q}$ e isomorf cu suma directă a celor k inele complecte de matrice de ordinul 2 construite respectiv peste corpurile $C/(p_i)$, $i = 1, 2, \dots k$.

(Indicaţie pentru punctul 4°: se va observa, că $H/(p_1, p_2, \dots p_k)$ e omomorf cu fiecare din inelele $H/(p_i)$, $(i = 1, 2, \dots k)$ şi că acestea din urmă sunt simple).

II) 1°. Să se verifice, că transformările

$$(1) \qquad y = \{ 5 \}^m x + \{ a \} \ , \ m \leftarrow C \ , \ \{ a \} \leftarrow C/(9)$$

peste inelul claselor de resturi $C/(9)$ formează un grup finit.

2°. Să se construiască un şir de compoziţie şi să se recunoască *a posteriori*, că grupul e rezolubil.

3°. Să se dea un argument *a priori*, pentru resolubilitatea grupului.

4°. Să se probeze, că grupul e metaciclic.

III) 1°. Punctul 1° din problema II).

2°. Să se determine ordinul grupului.

3°. Să se găsească toate grupurile lui SYLON ale grupului dat.

(Indicaţie pentru punctul 3°: se va recunoaşte direct, pe reprezentarea lineară din (1) a grupului, câte un grup al lui SYLON relativ la fiecare din divizorii primi ai ordinului şi apoi se va aplica a doua teoremă a lui SYLON).

Probe teoretice.

I. Prima teoremă a lui WEDDERBURN.
II. Teorema bazei, a lui HILBERT.
III. Simplicitatea grupului altern pentru $n \neq 4$.
IV. Grupuri resolubile şi grupuri nilpotente.

(Timp acordat: trei ore).

Obligatoriu: una din problemele I, II, III, sau una din chestiunile teoretice I, II, III, IV complect tratate.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Politehnicei din Bucureşti. Anul LX. Nr. 1—3 Ianuarie-Martie 1946. D. ST. EMILIAN: † N. POENARU-IATAN. I. IONESCU: Câteva date asupra istoricului Soc. Politehnice. C. BURGHELE: Situaţia gurei maritime dela Sulina şi conservarea ei prin reducerea influenţei deltei secundare a Chiliei. C. C. TEODORESCU: Teorie şi încercări în desvoltarea betonului armat.

Indermédiaire des Recherches Mathématiques. Tome 2. Fascicule 5. N-os 0374—0444. şi Fascicule 6 N-os 0445—0530. Ianuarie 1946.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVI. Nr. 6. August 1946. V. ALACI: Funcţii trigonometrice inverse şi funcţii logaritmice care au aceeaşi derivată. Note matematice, bibliografie, probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXXII Nr. 2—3. August-Septembrie 1946. D. I. MANGERON: GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ. C. C. BEDREAG: Tehnica bombelor nucleare. DR. E. STAICOVICI: Preocupările unei ştiinţe moderne, geochimia. ING. CRISTOFOR SIMIONESCU: Fibre textile de sinteză. E. ŢOPA: Cunoaşterea, întrebuinţarea, uscarea şi ocrotirea plantelor medicinale din Oltenia. VIRGIL IANOVICI: Metode moderne de prospecţiuni şi explorări miniere. IUL. MORARU: Bipolaritatea floristică. I. GUGIUMAN: Frecvenţa inundaţiilor la Bahlui.

CERERI

Răspuns la cererea 259 (Gazeta Matematică, XLI, 629). Se întreabă dacă, în afară de coeficienţii binomului, mai există funcţiuni de m şi n întregi şi pozitivi care să satisfacă relaţia de recurenţă

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} \qquad (1)$$

şi cum s'ar putea găsi acele funcţiuni în cazul existenţei lor? Dacă din considerarea relaţiei (1) şi eventual a unor condiţiuni suplimentare s'ar putea deduce direct expresia generală a coeficenţilor binomiali?

Răspunsul la această cerere se desprinde din articolul. *O generalizare a coeficienţilor binomiali* [1] şi articolul *Stabilirea formulei generale a coeficienţilor binomiali prin metoda inducţiei complecte* [2].

1°. Sunt nenumărate funcţiuni de felul coeficienţilor binomiali, care satisfac egalitatea (1).

2°. Diversele valori ale uneia oarecare din funcţiunile definite prin condiţia (1) se pot deduce din aproape în aproape, operaţia conducând fie la tablouri numerice triunghiulare, ca cel al lui PASCAL, fie la tablouri dreptunghiulare, sau chiar de alte forme, cum se arată de exemplu în « *Théorie des nombres* » de E. LUCAS.

3°. In cazul coeficienţilor binomiali, metoda inducţiei complecte permite deducerea din relaţia (1), a formulei explicite pentru calculul direct a acestor coeficienţi.

In cazul general al unei funcţiuni oarecare definită prin relaţia (1), deducerea formulei explicite corespunzătoare, este o problemă delicată, pe care o considerăm încă deschisă.

E. VIŞA.

DIVERSE

Redacţionale. Ulterior redactării problemelor 6151 şi 6183, rezolvate respectiv la pag. 809 şi 811, Vol. LI s'au primit soluţiuni bune dela d-l P. P. TEODORESCU pentru problema 6151 şi dela d-l D. I. STOIAN pentru problema 6183.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 5708. *Se consideră un triunghiu* (T) *şi un punct* P *în acelaşi plan.*

Se efectuează o transformare prin inversiune, oarecare. Fie (T') *triunghiul ce are ca vârfuri inversele vârfurilor triunghiului* (T), *iar* P' *inversul lui* P.

Să se demonstreze că triunghiul podar al punctului P *în raport cu* (T), *este asemenea triunghiului podar al punctului* P', *în raport cu* (T').

ŞERBAN GHEORGHIU.

1) E. VIŞA. *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XVIII, pag. 49.
2) E. VIŞA. *Gazeta Matematică*, Vol. LI, pag. 696.

Fie A, B, C vârfurile triunghiului (T), A', B', C' inversele acestor puncte, centrul de inversiune fiind O iar k^2 modulul de inversiune

$$(OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \ldots = k^2).$$

Se ştie că lungimile segmentelor ce unesc punctele inverse verifică o relaţiune metrică. Astfel, în cazul laturilor BC şi B'C' această relaţiune este:

$$B'C' = BC \frac{k^2}{OB \cdot OC}. \qquad (1)$$

Fie acum, P_a, P_b şi P_c proiecţiunile punctului P respectiv pe laturile BC, CA şi AB iar P'_a, P'_b, P'_c proiecţiunile lui P' respectiv pe B'C', C'A' şi A'B'. Se ştie că avem:

$$\frac{P_b P_c}{PA \cdot BC} = \frac{P_c P_a}{PB \cdot CA} = \frac{P_a P_b}{PC \cdot AB} \text{ şi } \frac{P'_b P'_c}{P'A' \cdot B'C'} = \frac{P'_c P'_a}{P'B' \cdot C'A'} = \frac{P'_a P'_b}{P'C' \cdot A'B'}$$

Din relaţiunile (1) relative la laturile triunghiurilor (T) şi (T') şi la distanţele (AP, A'P'), (BP, B'P'), (CP, C'P') obţinem:

$$\frac{P'A' \cdot B'C'}{PA \cdot BC} = \frac{P'B' \cdot C'A'}{PB \cdot CA} = \frac{P'C' \cdot A'B'}{PC \cdot AB} = \frac{k^4}{OP \cdot OA \cdot OB \cdot OC}$$

$$\therefore \quad \frac{P'_b P'_c}{P_b P_c} = \frac{P'_c P'_a}{P_c P_a} = \frac{P'_a P'_b}{P_a P_b}$$

ceeace arată că triunghiurile $P_a P_b P_c$ şi $P'_a P'_b P'_c$ sunt asemenea, ca având laturile proporţionale.

S'a primit dela d-l P. P. DRĂGHICESCU o foarte bună soluţiune, prin care se arată că cele două triunghiuri podare au unghiurile egale.

Ş. G.

PROBLEMA 5724. *Un triunghiu* ABC *se roteşte succesiv în jurul tangentelor în vârfuri la cercul circumscris. Să se arate:*

1°. *Dacă volumele corpurilor înăscute sunt în progresie aritmetică, atunci* cotgA, cotgB, cotgC *sunt în progresie aritmetică;*

2°. *Dacă suprafeţele corpurilor înăscute sunt în progresie aritmetică, atunci* cos A, cos B, cos C *sunt în progresie aritmetică.*

D. GH. VASILIU.

Soluție dată de d-nii: P. P. DRĂGHICESCU, SUBLOC. C. PANTELIMON, M. I. PĂTRĂȘCIOIU (Buzău), EUG. N. WEGENER și MIREL D. STOENESCU.

Notațiile fiind cele obișnuite, volumele și suprafețele corpurilor înăscute prin rotația în jurul tangentelor în A, B, C la cercul circumscris sunt respectiv [1].

$$V_a = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{S}{R}(b^2 + c^2)\ ;\ V_b = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{S}{R}(a^2 + b^2);\ \ldots\ldots$$

$$S_a = \frac{\pi}{2R}(b^3 + c^3 + ab^2 + ac^2);\ \ldots\ldots$$

1°. Dacă $2V_b = V_a + V_c$ atunci $2b^2 = a^2 + c^2$, triunghiul este *automedian* și în acest caz avem [2]

$$2\operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B.$$

2°. Dacă $2S_b = S_a + S_c$, atunci

$$2b(a^2 + c^2 - b^2) = a(b^2 + c^2 - a^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)$$

sau

$$2\cos B = \cos A + \cos C.$$

G-RAL G. I. LIT.

PROBLEMA 5972. *Să se demonstreze geometricește că între elementele unui triunghiu avem*

$$b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$$

și să se deducă o formulă analoagă pentru sinus.

S-LT. CONST. PANTELIMON.

Soluție dată de d-l LT. MIRCEA D. POPA.

Fie un triunghiu ABC, B', C' proiecțiile punctelor B și C pe tangenta în A la cercul ABC, B_1 proiecția lui B pe CC'.

$$\therefore \quad \sphericalangle B'AB = C\ ,\ \therefore\ \sphericalangle C'AC = B,$$

iar $\sphericalangle B_1BC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle ABC - \sphericalangle B'AB = B - C$

---

1) *Culegere de probleme de Trig.* Partea II. Cap. XX. 19.
2) *Culegere de probleme de Trig.* Partea II. Cap. XI. 26.

Patrulaterul $BB_1C'B'$ fiind un dreptunghiu vom avea

$$\overline{B'C'} = \overline{BB_1} \quad \text{şi} \quad \overline{BB'} = \overline{B_1C'}.$$

Sau

$$\overline{AB'} + \overline{AC'} = \overline{BB_1} \quad \text{şi} \quad \overline{CC'} - \overline{BB'} = \overline{CB_1}.$$

Din triunghiurile dreptunghice BB_1C, BAB' şi CAC', calculând segmentele acestor egalităţi avem

$$b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$$

$$b\sin B - c\sin C = a\sin(B - C).$$

Alte soluţii date de domnişoara ELENA DRĂGHICESCU (clasa a VI-a particulară) şi d-nii: EMIL E. MARINESCU (clasa a VIII-a L. A. V.), MIRCEA I. PĂTRĂSCIOIU (bacalaureat Buzău), ALEXANDRU AL. TIMOTIN (elev inginer Şcoala Politechnică Bucureşti), I. T. MUNTEANU (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal), I. N. GLIGOR (Student), P. P. TEODORESCU (Liceul „Matei Basarab", Bucureşti).

C. I. B.

PROBLEMA 5993. *Să se găsească locul punctului de intersecţie a două drepte* SIMSON, *care fac între ele un unghiu constant oarecare* V.

Aplicaţie: $V = 60^0$.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Fie ABC un triunghiu oarecare, O centrul cercului său circumscris şi R raza acestuia. Se ştie că dacă prin O se duce o dreaptă $O\alpha$, astfel încât să avem:

$$\sphericalangle \alpha OA + \sphericalangle \alpha OB + \sphericalangle \alpha OC = 2\pi$$

iar un punct M de pe cerc este caracterizat prin raza sa respectivă R şi unghiul φ, pe care aceasta îl face cu dreapta $O\alpha$, ecuaţia dreptei lui SIMSON corespunzătoare punctului M, raportată la un sistem de coordonate având origina în centrul ω al cercului lui EULER, iar axa absciselor paralelă cu $O\alpha$, este [1]:

$$x\sin\frac{\varphi}{2} + y\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2}\sin 3\frac{\varphi}{2}. \qquad (1)$$

---

1) R. NOGUÈS. *Cours de mathématiques spéciales sous forme de problèmes*, pag. 135.

Ecuația unei a doua drepte SIMSON, este de forma:

$$x \sin \frac{\mu}{2} + y \cos \frac{\mu}{2} = \frac{R}{2} \sin 3 \frac{\mu}{2} \qquad (2)$$

unde μ este un unghiu analog lui φ.

Unghiul V, făcut de aceste două drepte, este dat de expresia:

$$\operatorname{tg} V = \frac{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Din această relațiune rezultă:

$$V = \frac{\mu}{2} - \frac{\varphi}{2} \quad \therefore \quad \frac{\mu}{2} = V + \frac{\varphi}{2}.$$

Introducând această valoare în (2), obținem ecuația generală a dreptei SIMSON, care face un unghiu V cu dreapta SIMSON, definită de ecuațiunea (1). Avem:

$$x \sin \left(V + \frac{\varphi}{2} \right) + y \cos \left(V + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{R}{2} \sin 3 \left(V + \frac{\varphi}{2} \right). \qquad (3)$$

Prin enunțul problemei unghiul V este dat constant. Ecuația locului geometric se obține eliminând pe φ din relațiile (1) și (3).

Înmulțim ambii membrii ai ecuațiunii (1) cu $\sin \left(V + \frac{\varphi}{2} \right)$ și ambii membrii ai ecuațiunei (3) cu $\sin \frac{\varphi}{2}$. Scădem apoi membru cu membru ecuațiile astfel înmulțite și obținem

$$y = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \left(V + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \sin (V + \varphi). \qquad (4)$$

Procedăm în mod analog pentru găsirea lui x. Înmulțim ambii membrii ai ecuațiunii (1) cu $\cos \left(V + \frac{\varphi}{2} \right)$ și ambii membrii ai ecuațiunei (3) cu $\cos \frac{\varphi}{2}$. Scădem apoi, membru cu membru, ecuațiile astfel înmulțite și obținem:

$$x = 2R \left[\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \left(V + \frac{\varphi}{2} \right) \cos (V + \varphi) - \frac{1}{4} \right]. \qquad (5)$$

Expresiunile (4) şi (5) găsite pentru x şi y, definesc ecuaţiile parametrice ale locului geometric.

Din aceste expresiuni se observă că x şi y au numai valori reale şi finite. Curba locului căutat nu prezintă deci discontinuităţi sau ramuri infinite.

Să înlocuim în expresiunile (4) şi (5) pe φ prin valoarea $-(2V+\varphi)$. Avem:

$$y = 2R\sin\frac{-(2V+\varphi)}{2}.\sin\left[V-\frac{2V+\varphi}{2}\right].\sin\left[V-(2V+\varphi)\right]$$

$$= 2R\sin-\left(\frac{\varphi}{2}+V\right).\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right).\sin\left[-(V+\varphi)\right] =$$

$$-2R\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\sin(V+\varphi) = -y$$

$$x = 2R\left\{\cos\frac{-(2V+\varphi)}{2}.\cos\left(V-\frac{2V+\varphi}{2}\right)\cos\left[V-(2V+\varphi)\right]-\frac{1}{4}\right\}$$

$$= 2R\left[\cos-\left(\frac{\varphi}{2}+V\right).\cos-\frac{\varphi}{2}.\cos-(V+\varphi)-\frac{1}{4}\right]$$

$$= 2R\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi)-\frac{1}{4}\right] = x.$$

Se vede din această înlocuire că axa x-lor este o axă de simetrie a curbei.

Anulând expresiunea lui y obţinem punctele unde curba taie această axă de simetrie. Ele corespund valorilor:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=0\ ,\quad \sin(\varphi+V)=0\ ,\quad \sin\left(\frac{\varphi}{2}+V\right)=0$$

$\therefore\ \varphi=0\ ;\ \varphi=2\pi\ \therefore\ \varphi=-V\ ;\ \varphi=\pi-V\ ;\ \varphi=-2V\ ;\ \varphi=2\pi-2V.$

Valorile distincte ale lui x, corespunzătoare acestor valori ale lui φ, sunt:

$$\varphi=0 \qquad \varphi=-V \qquad \varphi=\pi-V$$

$$x=2R\left(\cos^2V-\frac{1}{4}\right) \qquad x=2R\left(\cos^2\frac{V}{2}-\frac{1}{4}\right) \qquad x=2R\left(\sin^2\frac{V}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\varphi=-2V$$

$$x=2R\left(\cos^2V-\frac{1}{4}\right).$$

Se observă că pentru $\varphi = 0$ şi $\varphi = -2V$, valorile lui x şi y sunt aceleaşi. In acest punct curba prezintă deci un punct multiplu care, după cum se va vedea şi la studiul derivatei, este un punct dublu. Cercetarea celorlalte puncte duble ale curbei se va face după studiul derivatei.

Punctele unde curba taie axa y se obţin egalând cu zero expresiunea (5). Avem :

$$x = 2R\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi) - \frac{1}{4}\right] = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\cos(V+\varphi)[\cos(V+\varphi) + \cos V] - \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore \quad \cos^2(V+\varphi) + \cos V \,.\, \cos(V+\varphi) - \frac{1}{2} = 0. \qquad (6)$$

Deoarece unghiul V este dat, valorile lui φ cari anulează această expresie, se obţin rezolvând ecuaţia în $(V+\varphi)$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt :

$$\cos(V+\varphi) = \frac{-\cos V \pm \sqrt{\cos^2 V + 2}}{2}. \qquad (7)$$

Rădăcinile trebue să fie reale şi cuprinse între -1 şi $+1$.

Ca rădăcinile să fie reale va trebui să avem :

$$\cos^2 V + 2 > 0$$

inegalitate care este posibilă pentru orice valori ale lui V.

Fiind dată ecuaţia :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

se ştie că condiţiile, ca valorile lui x să fie cuprinse între -1 şi $+1$, sunt :

$$af(1) > 0 \;\; ; \;\; af(-1) > 0 \;\; ; \;\; -\frac{b}{2a} > -1 \;\; ; \;\; -\frac{b}{2a} < 1.$$

In cazul ecuaţiunei (6), aceste condiţiuni sunt :

$$1 + \cos V - \frac{1}{2} > 0 \quad \therefore \quad \cos V > -\frac{1}{2}$$

$$1 - \cos V - \frac{1}{2} > 0 \quad \therefore \quad \cos V < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\cos V}{2} > -1 \qquad \therefore \quad \cos V < 2$$

$$-\frac{\cos V}{2} < 1 \qquad .. \quad \cos V > -2.$$

Deoarece ultimele două inegalităţi sunt întotdeauna satisfăcute, rămâne să examinăm pe primele două. Ele se mai pot scrie:

$$-\frac{1}{2} < \cos V < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 60^0 < V < 120^0 \quad \text{şi} \quad 240^0 < V < 300. \qquad (8)$$

Dacă V satisface una din aceste inegalităţi, ecuaţiunea (6) furnizează pentru $\cos(V+\varphi)$, două valori reale şi mai mici decât 1. Să însemnăm cu $\cos z_1$ şi $\cos z_2$ aceste valori. Vom avea:

$$\cos(V+\varphi) = \cos z_1 \qquad \cos(V+\varphi) = \cos z_2$$

sau:

$$\varphi_1 = z_1 - V \qquad \varphi_3 = z_2 - V$$

$$\varphi_2 = 360 - (z_1 + V) \qquad \varphi_4 = 360 - (z_2 + V).$$

Avem deci, în acest caz, pentru φ patru valori care introduse în expresiunea (4), dau patru puncte unde curba taie axa y-lor. Deoarece axa x-lor este o axă de simetrie, se înţelege că aceste puncte sunt două câte două simetrice în raport cu origina.

In cazul când φ nu satisface nici una din inegalităţile (8) se poate uşor observa că ecuaţiunea (6) are produsul rădăcinilor mai mic decât 1 şi deci ea va avea în orice caz o rădăcină mai mică decât 1. Raţionând ca mai sus, va rezulta pentru φ două valori, cari introduse în expresiunea lui y, ne vor da ordonatele celor două puncte unde axa y-lor este tăiată de curbă, în acest caz. Aceste puncte sunt simetrice în raport cu axa x-lor.

Trecem la studiul derivatei funcţiunii. Diferenţiem membru cu membru expresiunile (4) şi (5). Avem:

$$dy = 2R\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\sin(V+\varphi) + \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$

$$\left.\sin(V+\varphi) + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi)\right] d\varphi$$

$$dx = 2R\left[-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi) - \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right.$$

$$\left.\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi) - \cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\sin(V+\varphi)\right] . d\varphi$$

$$\therefore dy = 2R\left[\frac{1}{2}\sin(V+\varphi)\sin(V+\varphi) + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi)\right] d\varphi$$

$$dx = -2R\left[\frac{1}{2}\cos(V+\varphi).\sin(V+\varphi) + \right.$$

$$\left.\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\sin(V+\varphi)\right] . d\varphi.$$

Impărţim membru cu membru aceste expresiuni. Avem:

$$\frac{2\cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}}{\cos(\theta+\varphi+2V)} = -\frac{1}{\cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\cos(\theta+\varphi+2V)}{\cos^2\frac{\theta+\varphi+2V}{2}} = -2$$

$$\therefore \quad \frac{\cos^2\frac{\theta+\varphi+2V}{2} - \sin^2\frac{\theta+\varphi+2V}{2}}{\cos^2\frac{\theta+\varphi+2V}{2}} = -2$$

$$1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta+\varphi+2V}{2} = -2$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\frac{\theta+\varphi+2V}{2} = \pm\sqrt{3}.$$

Avem deci:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta+\varphi+2V}{2} = \operatorname{tg}60^0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\frac{\theta+\varphi+2V}{2} = \operatorname{tg}120^0$$

$$\therefore \quad \theta = 120^0 - (\varphi+2V) \quad \text{şi} \quad \theta = 240^0 - (\varphi+2V).$$

Acestea sunt relaţiile între θ şi φ pentru ca valorile lui x şi y să fie aceleaşi.

Am arătat că pentru $\varphi = 0$ şi $\varphi = -2V$ avem un punct dublu. In virtutea relaţiilor stabilite, urmează că avem puncte duble şi pentru:

$\theta = 120^0 - (\theta+2V) = 120^0 - 2V$; $\theta = 120^0 - (-2V+2V) = 120^0$

$\theta = 240^0 - (\theta+2V) = 240^0 - 2V$; $\theta = 240^0 - (-2V+2V) = 240^0$

Intr'adevăr, considerând primul grup de valori şi înlocuind succesiv în expresiunile care ne dau pe x şi y:

$$\varphi_1 = \theta = 120^0 - 2V \quad \text{şi} \quad \varphi_2 = \theta = 120^0,$$

avem:

$$x_1 = 2R\left[\cos\frac{120^0 - 2V}{2}\cdot\cos\left(V + \frac{120^0 - 2V}{2}\right)\cdot\cos(V+120^0-2V) - \frac{1}{4}\right]$$

$$x_2 = 2R\left[\cos\frac{120^0}{2}\cdot\cos(V+120^0)\cos(V+120^0) - \frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore\ x_1 = 2R\left[\cos(60^0 - V)\cdot\cos 60^0\cdot\cos(120^0 - V) - \frac{1}{4}\right]$$

$$x_2 = 2R\left[\cos 60^0\cdot\cos(V+60^0)\cdot\cos(V+120^0) - \frac{1}{4}\right].$$

Desvoltând avem:

$$x_1 = 2R\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos V + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin V\right)\left(-\frac{1}{2}\cos V + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin V\right) - \frac{1}{4}\right]$$

$$x_2 = 2R\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos V - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin V\right)\left(-\frac{1}{2}\cos V - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin V\right) - \frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore\qquad x_1 = 2R\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sin^2 V - \frac{1}{4}\cos^2 V\right) - \frac{1}{4}\right]$$

$$x_2 = 2R\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sin^2 V - \frac{1}{4}\cos^2 V\right) - \frac{1}{4}\right].$$

S'a văzut că pentru $\varphi = 0$ şi $\varphi = -2V$, valorile corespunzătoare ale lui x şi y sunt aceleaşi, adică avem un punct dublu. Să calculăm valoarea coeficientului unghiular al tangentelor, în acest punct, la curbă. In acest scop, în expresiunea (9) a derivatei, introducem succesiv, valorile:

$$\varphi = 0 \quad \text{şi} \quad \varphi = -2V.$$

Pentru $\varphi = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2 V - \cos^2 V - 1}{\sin V(2\cos V + \cos V)} = -\frac{1}{3}\operatorname{tg} V$$

Pentru $\varphi = -2V$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2(-V) - \cos V\cdot\cos(-V) - 1}{\sin(-V)[2\cos(-V) + \cos V]} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} V.$$

Valorile coeficientului unghiular fiind egale şi de semne contrarii, avem în acest punct două tangente distincte şi simetrice în raport cu axa x-lor, ceea ce era şi de aşteptat, deoarece punctul multiplu se găseşte pe axa x-lor, care este o axă de simetrie. Trecem să cercetăm dacă curba mai are şi alte puncte multiple. Fie θ unghiul pentru care valorile lui x şi y sunt aceleaşi ca şi ale unghiului φ. Va trebui să avem:

$$x = 2R\left[\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cos(V+\varphi)-\frac{1}{4}\right] =$$

$$2R\left[\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(V+\frac{\theta}{2}\right).\cos(V+\theta)-\frac{1}{4}\right]$$

$$y = 2R\sin\frac{\varphi}{2}.\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\sin(V+\varphi) =$$

$$2R\sin\frac{\theta}{2}.\sin\left(V+\frac{\theta}{2}\right).\sin(V+\theta).$$

După ce am făcut toate simplificările, aceste expresiuni se mai pot scrie:

$$\cos(\varphi+V)[\cos(\varphi+V)+\cos V] = \cos(\theta+V)[\cos(\theta+V)+\cos V]$$
$$\sin(\varphi+V)[\cos(\varphi+V)-\cos V] = \sin(\theta+V)[\cos(\theta+V)-\cos V]$$

$\therefore$

$$\cos^2(\varphi+V)-\cos^2(\theta+V) = [\cos(\theta+V)-\cos(\varphi+V)].\cos V$$
$$\sin(\varphi+V)\cos(\varphi+V)-\sin(\theta+V).\cos(\theta+V) =$$
$$[\sin(\varphi+V)-\sin(\theta+V).\cos V$$

$$\therefore \quad \cos(\varphi+V)+\cos(\theta+V) = -\cos V$$

$$\frac{\sin 2(\varphi+V)-\sin 2(\theta+V)}{2} = 2\cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\cos V$$

$$\therefore \quad 2\cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}.\cos\frac{\varphi-\theta}{2} = -\cos V$$

$$\cos(\theta+\varphi+2V)\sin(\varphi-\theta) = 2\cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\cos V$$

$$\therefore \quad \cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}.\cos\frac{\varphi-\theta}{2} = -\cos V$$

$$\cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}.\cos\frac{\varphi-\theta}{2} = \cos\frac{\theta+\varphi+2V}{2}.\cos V.$$

Impărțim aceste relațiuni, membru cu membru. Avem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}\sin^2(V+\varphi) + \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos(V+\varphi)}{\frac{1}{2}\sin(V+\varphi)\cdot\cos(V+\varphi) + \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\left(V+\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\sin(V+\varphi)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos^2(V+\varphi) - \cos V\cdot\cos(V+\varphi) - 1}{\sin(V+\varphi)\,[2\cos(V+\varphi) + \cos V]}. \qquad (9)$$

Derivata se anulează când:

$$2\cos^2(V+\varphi) - \cos V\cdot\cos(V+\varphi) - 1 = 0 \qquad (10)$$

$$\therefore \quad \cos(V+\varphi) = \frac{\cos V \pm \sqrt{\cos^2 V + 8}}{4}.$$

Rădăcinile ecuației sunt evident reale.

Pentru ca ele să fie cuprinse între -1 și $+1$, va trebui să avem:

$$2 - \cos V - 1 > 0 \quad \therefore \quad \cos V < 1$$

$$2 + \cos V - 1 > 0 \quad \therefore \quad \cos V > -1$$

$$\frac{\cos V}{4} > -1 \quad \therefore \quad \cos V > -4$$

$$\frac{\cos V}{4} < 1 \quad \therefore \quad \cos V < 4$$

Toate aceste inegalități sunt întotdeauna satisfăcute pentru orice valori ale lui V. Ecuațiunea (10) are deci, întotdeauna, pentru $\cos(V+\varphi)$ două valori, cărora în mod analog ca mai sus, le corespund patru valori pentru φ și se înțelege că valorile lui y corespunzătoare acestor valori ale lui φ, sunt două câte două simetrice în raport cu axa x-lor.

Punctele unde curba are tangente verticale se obțin egalând cu zero numitorul derivatei. Avem:

$$\sin(V+\varphi) = 0 \quad \therefore \quad \varphi = -V \quad \text{și} \quad \varphi = \pi - V.$$

Aceste valori corespund la două din punctele unde axa x-lor este tăiată de curbă.

Numitorul derivatei se anulează şi pentru:

$$\cos(V+\varphi) = -\frac{\cos V}{2}.$$

Această expresiune furnizează pentru φ două valori, cari introduse în expresiunile care ne dau pe x şi y, trebue să furnizeze pentru y două valori simetrice în raport cu axa x-lor ceea ce însemnează că curba atinge de două ori, în două puncte diferite, aceeaşi tangentă verticală, punctele de tangenţă fiind evident simetrice în raport cu axa x-lor. Un studiu al semnului derivatei se va face cu ocaziunea trasărei curbei pentru valori particulare ale lui V.

Deci:

$$x_1 = x_2 = R\left(\sin^2 V - \frac{1}{2}\right) = -R\left(\cos^2 V - \frac{1}{4}\right).$$

Pe aceeaşi cale se stabileşte, că pentru $\varphi_1 = \theta = 120^0 - 2V$ şi $\theta = 120^0$, avem:

$$y_1 = y_2 = R.\sqrt{3}\left(\cos^2 V - \frac{1}{4}\right).$$

Rezultate similare se obţin şi cu celelalte valori ale lui θ. Doarece axa x-lor este o axă de simetrie este uşor de prevăzut că, coordonatele celuilalt punct dublu, corespunzătoare la valorile $\varphi = \theta = 240^0 - 2V$ şi $\varphi = \theta = 240^0$, vor fi:

$$x = -R\left(\cos^2 V - \frac{1}{4}\right) \quad \text{şi} \quad y = -R\sqrt{3}\left(\cos^2 V - \frac{1}{4}\right).$$

Distanţa dela origina coordonatelor (centrul cercului lui EULER) la unul din punctele duble, este:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2R\left(\cos^2 V - \frac{1}{4}\right)$$

care este aceiaşi cu abscisa primului punct dublu. Dreapta care uneşte al doilea punct dublu cu origina are ca, coeficient unghiular:

$$\frac{y}{x} = -\sqrt{3}$$

ceiace corespunde la un unghiu de 120°. Asemenea se demonstrează că dreapta care unește al treilea punct dublu cu origina, are un coeficient unghiular corespunzător unui unghiu de 240°.

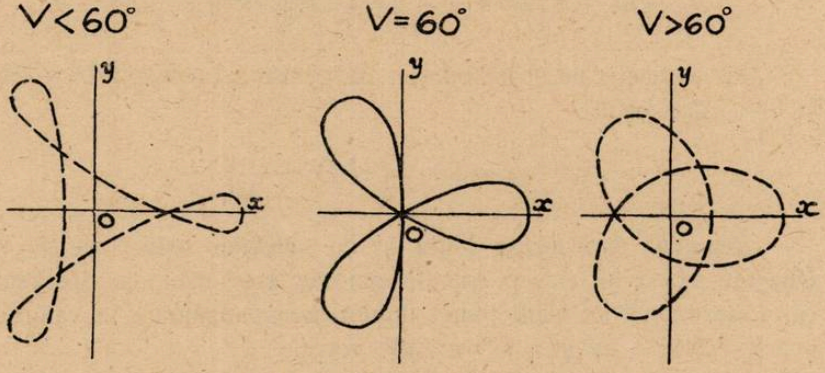
Putem deci enunța următoarea proprietate:

Curba locului căutat, are trei puncte duble echidistante pe un cerc de rază:

$$2R\left(\cos^2 V - \frac{1}{4}\right),$$

concentric cu cercul lui EULER *al triunghiului.*

Se observă că pentru $V = 60^0$ raza cercului este nulă, ceea ce însemnează că, pentru această valoare particulară a lui V, cele trei puncte duble ale curbei se confundă cu origina axelor de coordonate (centrul cercului lui EULER).



Ținând seamă de studiul de până aici curba locului cerut are aspectele din figurile precedente, după valorile lui V.

Pentru $V = 90$, prin eliminarea lui φ între ecuațiunile (4) și (5) se obține ca loc geometric curba

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

adică cercul lui EULER al triunghiului, rezultat cunoscut.

ȘT. S. MIHĂIESCU.

Notă. A găsit ecuațiile exacte ale locului d-l EM. E. MARINESCU (cl. a VIII-a, Lic. „Aurel Vlaicu", București).

PROBLEMA 6092. *Să se găsească patratul de şase cifre* a b c d e f *ştiind că* ab, ef *sunt patrate şi că* cd *este un multiplu al rădăcinelor celor două patrate precedente.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie, conform enunţului

$$ab = m^2 \ , \ ef = n^2 \ , \ cd = \alpha \, . \, m \, . \, n < 100.$$

Patratul ab, găsindu-se printre numerele

16, 25, 36, 49, 64, 81

avem $4 \leqslant m \leqslant 9$.

Efectuând extragerea rădăcinei patrate din $abcdef$, avem

$$\begin{array}{l|l} ab \, . \, cd \, . \, ef & m \ldots \\ \hline = c \, . \, d & \overline{2m \ldots} \end{array}$$

Pentru a doua cifră a rădăcinei se ia câtul împărţirei cifrei c prin $2m$. Cum c este cel mult 9 iar $2m$ cel puţin 8 rezultă că acel cât este 0 sau 1 şi deci rădăcina patrată a lui $abcdef$ este de forma $x0y$ sau $x1y$. Să examinăm fiecare formă în parte.

Forma $x0y$. Trebue să avem

$$abcdef = x0y^2 = 100x^2 + 200xy + y^2$$

x şi y fiind cifre, $y^2 = ef$. Produsul $2xy$ se termină cu cd; mai mult decât atât, este egal chiar cu cd căci $2xy$ nu poate fi mai mare decât 100. In adevăr dacă $2xy$ ar fi mai mare decât 100 atunci $x^2 + 1$ care ar fi egal cu ab trebue să fie patrat perfect. Ori $x^2 + 1$ nu este patrat perfect decât pentru $x = 0$ ceea ce duce la soluţia banală şi fără interes:

$$abcdef = 0000ef.$$

Rămâne deci $2xy < 100$ de unde $xy < 50$ şi atunci soluţiile problemei sunt numerele $x0y$ în care produsul $xy < 50$, adică

$400^2 = 160000$, $401^2 = 160801$, $402^2 = 161604$, $403^2 = 162409$, $404^2 = 163216$,
$405^2 = 164025$, $406^2 = 164836$, $407^2 = 165649$, $408^2 = 166464$, $409^2 = 167281$,
$500^2 = 250000$, $501^2 = 251001$, $502^2 = 252004$, $503^2 = 253009$, $504^2 = 254016$,
$505^2 = 255025$, $506^2 = 256036$, $507^2 = 257049$, $508^2 = 258064$, $509^2 = 259081$,
$600^2 = 360000$, $601^2 = 361201$, $602^2 = 362404$, $603^2 = 363609$, $604^2 = 364816$,
$605^2 = 366025$, $606^2 = 367236$, $607^2 = 368449$, $608^2 = 369664$, $700^2 = 490000$,

$701^2 = 491401$, $702^2 = 492804$, $703^2 = 494209$, $704^2 = 495616$, $705^2 = 497025$, $706^2 = 498436$, $707^2 = 499849$, $800^2 = 640000$, $801^2 = 641601$, $802^2 = 643204$, $803^2 = 644809$, $804^2 = 646416$, $805^2 = 648025$, $806^2 = 649636$, $900^2 = 810000$, $901^2 = 811801$, $902^2 = 813604$, $903^2 = 815409$, $904^2 = 817216$, $905^2 = 819025$.

Forma $x1y$ nu dă soluţie după cum se vede din cele ce urmează. Conform enunţului ar trebui ca

$$x1y^2 = x1 \times 100 + 2y \,.\, x10 + y^2,$$

să se termine cu patratul *ef*. Pentru aceasta y^2 adunat cu unimele lui $2y$ trebue să dea un patrat perfect. Dând lui y toate valorile dela 0 la 9 se găseşte că $2y + y^2$ este patrat perfect numai pentru $y = 0$, deci ar putea fi soluţii numerele de forma $x10$. Dar în acest caz din

$$x10^2 = 100^2 x^2 + 2 \times x \times 1000 + 100$$

se vede că suma $2 \times x \,.\, 10 + 1$ se termină cu 1 ori care ar fi x, atunci când enunţul cere ca această sumă să fie $\alpha \,.\, m \,.\, n$, adică să se termine cu 00 căci $d = x^2 = 00$. Prin urmare forma $x1y$ *nu dă soluţii.*

Cazuri particulare. In aceste cazuri se înglobează patratele formale de 6 cifre şi adică

$$0bcdef,\ 00cdef,\ 000def,\ 0000ef,\ 00000f.$$

Este evident că formele doi şi trei din acest şir nu dau soluţii decât dacă *cd* sau *d* sunt nuli ceea ce conduce la ultimele 2 forme care sunt patrate când *ef* sau *f* sunt patrate.

Pentru forma $0bcdef$, procedând ca la cazul $a \neq 0$ găsim soluţiile

$100^2 = 10000$, $101^2 = 10201$, $102^2 = 10404$, $103^2 = 10609$, $104^2 = 10816$,
$105^2 = 11025$, $106^2 = 11236$, $107^2 = 11449$, $108^2 = 11664$, $109^2 = 11881$,
$200^2 = 40000$, $201^2 = 40401$, $202^2 = 40804$, $203^2 = 41209$, $204^2 = 41616$,
$205^2 = 42025$, $206^2 = 42436$, $207^2 = 42849$, $208^2 = 43264$, $209^2 = 43681$;
$300^2 = 90000$, $301^2 = 90601$, $302^2 = 91204$, $303^2 = 91809$, $304^2 = 92416$,
$305^2 = 93025$, $306^2 = 93636$, $307^2 = 94249$, $308^2 = 94864$, $309^2 = 95481$.

In total problema are 50 soluţii de 6 cifre şi 39 soluţii formal de 6 cifre în care nu este numărată soluţia banală 000000.

Notă. 1°. D-l Lt. M. D. Popa a trimis o foarte bună şi complectă soluţie examinând limitele între care poate fi cuprins $\sqrt{abcdef}$.

D-sa observă că soluţiile problemei se mai bucură şi de proprietatea interesantă

$$ab + cd + ef = (x + y)^2.$$

2°. D-l G. G. VRÂNCEANU (Lic. mil. Timişoara) a dat soluţiile complecte prin încercări.

3°. Au dat soluţii parţiale prin diferite încercări, găsind numărul de soluţii arătat în rândurile următoare:

49 soluţii d-l M. V. SOARE (Col. Naţ. „Sf. Sava").

Câte 44 soluţii d-nii P. D. COLUMBEANU, P. A. STANCIU şi P. P. TEODORESCU.

Câte 26 soluţii d-nii C. C. DIACONESCU şi GH. D. BRAŞOVEANU.

12 soluţii d-l V. GH. DIACONU (Col. Naţ. „N. Filipescu", Predeal).

Câte 11 soluţii d-nii ST. A. POPESCU şi TITUS C. RĂUŢU (Lic. militar Piteşti).

8 soluţii d-l ILIE N. CONSTANTINESCU (Lic. „N. Bălcescu" Brăila).

7 soluţii d-l I. T. MUNTEANU (Col. Naţ. „N. Filipescu" Predeal).

4 soluţii d-l C. CORDUNEANU (Col. Naţ. „N. Filipescu" Predeal).

4°. Nu citâm numele corespondenţilor care au dat soluţii fără să fi arătat cum le-au găsit nici pe ale rezolvitorilor care s'au folosit numai de table numerice.

GH. B.

PROBLEMA 6178. *Pe două plane* AO *şi* BO *înclinate cu unghiul* α *şi* β *pe orizontală, sunt aşezate două greutăţi* M *şi* N *legate printr'un fir paralel cu liniile de cea mai mare pantă a planelor corespunzătoare, trecând peste un scripete aşezat în* O. *In stare de repaos, greutăţile îşi fac echilibru. Aşezând întreg acest sistem într'un tren, în mişcare rectilinie uniform variată, cu planul* AOB *în direcţia mişcării, cele două greutăţi* M *şi* N *nu-şi mai fac echilibru decât schimbându-le între ele. Să se determine acceleraţia trenului. Frecările se vor neglija.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de d-nii: MIRCEA V. MIŞICU, ANTON I. VARGĂ şi ŞT. I. GHEORGHIŢĂ (Politechnica Bucureşti) şi M. R. CONSTANTINESCU (Liceul „Petru şi Pavel", Ploeşti).

Să notăm cu P şi Q greutăţile respective ale corpurilor M şi N.

Pentru echilibru în stare de repaos avem:

$$T = P\sin\alpha = Q\sin\beta \quad ; \quad R_1 = P\cos\alpha \quad ; \quad R_2 = Q\cos\beta$$

în care T este tensiunea în fir, iar R_1 şi R_2 reacţiunile planelor.

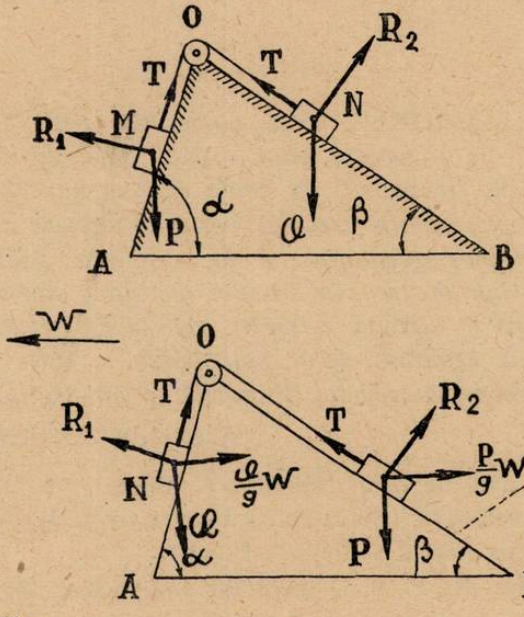
Rezultă:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

In cazul mişcării trenului, din cauza intervenţiei forţelor de inerţie $\frac{P}{g}w$ pentru corpul M şi $\frac{Q}{g}w$ pentru corpul N (w = acceleraţia trenului) echilibrul de mai sus nu se mai menţine decât schimbând corpurile între ele. In această nouă poziţie, studiind echilibrul conform principiului lui D'ALEMBERT (forţele date, forţele de legătură şi forţele de inerţie se echilibrează) obţinem:

$$T = Q\sin\alpha - \frac{Q}{g}w\cos\alpha = P\sin\beta + \frac{P}{g}w\cos\beta \qquad (2)$$

$$R_1 = Q\cos\alpha + \frac{Q}{g}w\sin\alpha \quad ; \quad R_2 = P\cos\beta - \frac{P}{g}w\sin\beta. \qquad (3)$$



Din (2):

$$w = g\frac{Q\sin\alpha - P\sin\beta}{Q\cos\alpha + P\cos\beta}.$$

Sau ţinând seama de (1):

$$w = g\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta} = g\,.\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \beta). \qquad (4)$$

Introducând această valoare în (2) şi (3)

$$T = Q\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = P\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$R_1 = \frac{Q\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)} \; ; \; R_2 = \frac{P\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

AL. ST.

EXERCIŢII

1. *Cu cifrele 4, 5, 6 să se formeze un patrat perfect de 6 cifre, divizibil prin 9.*

S-LT. M. AL. VASILESCU-STABU.

R. Dacă *abcdef* este patratul căutat, suma cifrelor lui este *mult.* 9 şi cum cel mai mic şi cel mai mare număr, cu terminaţii de patrat, ce se poate forma cu cifrele date sunt

444456 şi 666564

înseamnă că suma cifrelor numărului căutat este cuprinsă între 27 şi 33. Această sumă trebuind să fie *mult.* 9 nu poate fi de cât 27.

Cu cifrele date se pot forma următoarele terminaţii de patrate: 44, 56 şi 64. Considerăm $cf = 44$ atunci

$$a + b + c + d = 27 - 8 = 19.$$

Cifrele 4, 5, 6 dau suma 19 numai grupându-se în 4, 4, 5, 6 şi atunci *abcdef* va fi între numerele 445644 ; 446544 ; 454644 ; 456444 ; 464544 ; 465444 ; 544644 ; 546444 ; 564444 ; 645444 ; 654444 ; 644544. Intrebuinţând criteriile de divizibilitate prin 4 şi 9 se găseşte că soluţia problemei este

$$738^2 = 544644.$$

Procedând la fel pentru $cf = 56$ şi $cf = 64$ nu se mai găseşte altă soluţie.

2. *Fie* ABCD *un paralelogram de suprafaţă* S. *Se proiectează* C *în* E *pe diagonala* BD *şi în* F *pe latura* AB. *Să se arate că*

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{AB}^2}{2\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{BD}}.\ S$$

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Din patrulaterul inscriptibil CEFB scoatem

$$\overline{EF}.\overline{BC} = \overline{FC}.\overline{BE} - \overline{BF}.\overline{EC}.$$

Dar

$$\overline{FC} = \frac{S}{AB} \quad \text{şi} \quad \overline{EC} = \frac{S}{BD}$$

$$\therefore \quad \overline{EF} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} = (\overline{BE} \cdot \overline{BD} - \overline{BF} \cdot \overline{AB})\, S. \qquad (1)$$

Insă

$$\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - 2\,\overline{BD} \cdot \overline{BE}$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{BC} \cdot \overline{AB}$$

pe care seăzându-le una din alta obţinem

$$2(\overline{BD} \cdot \overline{BE} - \overline{BF} \cdot \overline{AB}) = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,\overline{AB}^2.$$

Inlocuind în (1) se găseşte formula din enunţ.

3. *Să se rezolve ecuaţia*

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 = 99.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Se observă că

$$2^3 + 3^3 + 4^3 = 99$$

Deci o rădăcină este $x_1 = 1$. Prin impărţire cu $x - 1$ se găseşte o ecuaţie de gradul al doilea ale cărei rădăcini sunt

$$x_{2,3} = \frac{-7 \pm i\sqrt{35}}{2}.$$

PROBLEME PROPUSE

6270. A, B, n, k fiind numere întregi, să se demonstreze că dacă $A^n \pm k$ şi $A^{n-1} \pm k$ se divid prin B, atunci toate numerele $A^i \pm k$ se divid prin B oricare ar fi $i > n$. Semnele se corespund.

G-L GH. BUICLIU.

6271. Să se determine p şi q astfel ca expresia

$$E = 35 \cdot 5^{40n+p} + 33 \cdot 3^{40n+q} + 14$$

să se dividă prin 41, n fiind întreg şi pozitiv.

I. V. MĂTIEŞ.

6272. Să se ducă într'un triunghiu dat, două transversale reciproce paralele cu două drepte date.

AL. PANTAZI.

6273. Să se demonstreze că diametrul cercului ortogonal cercurilor exînscrise unui triunghiu este egal cu $\sqrt{p^2 + r^2}$, unde p şi r sunt semiperimetrul şi raza cercului înscris în triunghiul dat.

EM. E. MARINESCU.

6274. Fie

$$f(x) \equiv \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(x+\sin x)}$$

α fiind un număr pozitiv, constant se consideră intervalele :

$$2n\pi - \frac{u_n}{2} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{u_n}{2}$$

pentru care avem: $0 < \alpha \leqslant f(x)$.

Să se arăte că expresiunea

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=0}^{p} u_n$$

admite pentru $p \to \infty$ o limită finită şi diferită de zero.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6275. Să se arate că dacă

$$A + B + C = 2\pi$$

şi fiecare din arce este cuprins între 0 şi 2π, avem inegalităţile:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{2^6} \leqslant$$

$$\cos A\cos B\cos C\cos 2A\cos 2B\cos 2C.$$

C. IONESCU-ŢIU.

6276. Se dă un cerc fix (ω) şi coarda AB a acestui cerc.

1°. Presupunând coarda AB fixă, fie M un punct variabil pe ea; se iau cercurile ce trec prin M şi sunt tangente în A şi B cercului (ω); ele se taie a doua oară în N. Se cere locul lui N.

2°. Se consideră cercurile tangente în A şi B cercului (ω) şi tangente între ele în T. Se cere locul lui T.

3°. Presupunând coarda AB mobilă în jurul lui M considerat fix, să se afle locul punctului N considerat la 1°.

4°. Dacă în locul cercului (ω) se iau două drepte oarecari fixe Ox, Oy şi se efectuează construcţiile precedente, se cere să se afle:

a) Locul lui N considerat la 1°.

b) Locul lui T considerat la 2°.

c) Locul punctului considerat la 3°.

Se cer soluţii analitice şi geometrice.

VIRGIL CLAUDIAN.

6277. Să se arate că înfășurătoarea curbelor

$$\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)x^2+2\sin\alpha\cos\alpha xy+\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)y^2$$
$$-2a\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)x-2a\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)y=0$$

este

$$(x+y)^2(x+y-2a)^2=4xy(x-2a)(y+2a)$$

care admite reprezentarea parametrică

$$x=4a\frac{1-2t-t^2}{(1+t^2)(3-t^2)},\quad y=4a\frac{1+2t-t^2}{(1+t^2)(3-t^2)}.$$

Să se construiască această curbă și să se calculeze aria cuprinsă între ramurile care trec prin origină și punctele duble de pe Ox și Oy.

N. ABRAMESCU.

6278. Fie o bară verticală AB (A deasupra lui B), de care este fixat sub unghiu drept un braț AC. La o distanță AD $= a$ de A pe brațul AC, e fixat un inel fără frecare. Pe bara AB lunecă o bilă găurită de masă M, de care e prins un fir de lungime l, care trece prin inelul D și de celălalt capăt al căruia atârnă o altă bilă de masă m.

Să se determine poziția de echilibru și viteza unghiulară ω necesară pentru echilibru dinamic.

GABRIELA ȚIȚEICA.

6279. In romanul *„De la terre à la lune"*, JULES VERNE povestește cum un călător, doritor de a ajunge în lună, s'a urcat într'un obuz enorm în interiorul căruia se găsea o cameră de locuit. Obuzul a fost apoi aruncat în direcția lunei.

Intr'un anumit punct situat între pământ și lună, scrie JULES VERNE, atracțiunile lunei și pământului făcându-și echilibru, călătorul și-a pierdut greutatea, putându-se urca cu un efort neînsemnat în tavanul camerei.

Corpurile lăsate liber nu mai cădeau, apa din sticlă nu mai curgea, etc.

Se petrec fenomenele așa cum credea JULES VERNE, adică greutatea corpurilor din obuz ar dispare numai într'un punct situat între pământ și lună?

N. V. K.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Băiaşu Dan (6222); *Cocoş Gh.* (6222); *Columbeanu P.* (6216, 59); *Constantinescu R. M.* (6058, 192, 249, 59); *Criveanu M. Eufemia* (6066); *Eftode M. Ad.* (5522, 930, 6219, 40); *Galiceanu Fl. Al.* (6222); *Ionescu Lucian* (6222); *Iosifescu D. M.* (5930, 6043, 230, E); *Kinsky I.* (5835, 6219, 51); *Lascu Al.* (6222); *Mihălcioiu M.* (6087, 203); *Nițescu P.* (6222); *Novac I. I.* (6173, 208, 35, 49, 54, 62, 64); *Pisanca N. I.* (6267); *Potocean C.* (6253); *Şerban C.* (6262); *Stănilă E. G.* (6238); *Tătaru A. Sever* (6222); *Teodorescu P. P.* (5707, 6001, 07, 53, 72, 172, 76, 202, 13, 38); *Udrea C. I.* (5525, 67, 6207); *Urdăreanu P.* (6222); *Velica Mircea* (6222); *Wegener E.* (5064, 6117, 58, 65, 92, 208, 22, 23, 38, 59).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 20.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 2.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XII, XIV, XVI, XVII, XVIII şi IX sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 8 500

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 4.500

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 4.500

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 12 500

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 8.500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 3.500

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 5.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 14.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 7.500

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 7.700

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 5.700

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor, tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 6.900

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 3.900

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 9.500

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 7.500

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul achitat până la 25 Decembrie 1946 este de 20.000 lei Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Decembrie 1946.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 10.000 lei pentru abonamentele plătite până la 31 Decembrie 1946. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Decembrie 1946.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 38.572.

GAZETA MATEMATICA

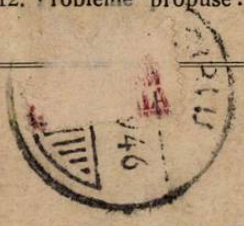
APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 2. — OCTOMBRIE 1946

SUMARUL

1. † Profesorul-Inginer Ion Ionescu . . . *Ing. Ion S. Antoniu*
2. Comemorarea lui Ion Ionescu. . . . . *Gazeta Matematică*
3. † Comandorul-Inginer I. Linteş. . . . *G-ral Gr. Zapan*
4. Multiplicitatea sistemelor izomorfe de vectori . . . . . *V. Vâlcovici*
5. Concursul „Gazetei Matematice" din 1947 *Delegaţia Societăţii*
6. Note matematice: 3—4.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Probleme rezolvate: 3640, 4251, 5772, 5881, 6112.
11. Exerciţii: 4—8.
12. Probleme propuse: 6280—6289.



BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1946

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele două şedinţe lunare ale Soc. „*Gazeta Matematică*":
Luni 28 Octomvrie, ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 3.
Luni 4 Noemvrie, ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 3.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

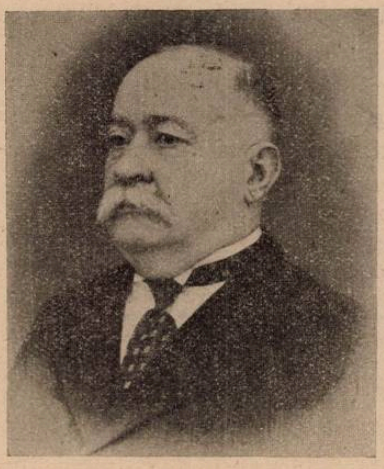
— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 100

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 4.500

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 10.000

† PROFESORUL-INGINER ION IONESCU

In ziua de 17 Septembrie ne-a părăsit, plecând pentru totdeauna dintre noi, inițiatorul și fondatorul *Gazetei Matematice*, cel de al patrulea stâlp al ei, Profesorul nostru al tuturora, Inginerul ION IONESCU. A părăsit această viață senin și discret așa cum a trăit-o. Tăcerea cu care a fost înconjurat de mulțimea celor ce au venit să-l întovărășească în călătoria s'a cea din urmă, a fost supremul omagiu pe care admiratorii săi au putut să i-l acorde: în loc să asculte discursuri, mai mult sau mai puțin convenționale, fiecare a putut să facă în sinea lui și prin prisma sa proprie, elogiul marelui dispărut.



La *Gazeta Matematică*, golul lăsat este imens. Nu voi spune nimic despre ceea ce Profesorul ION IONESCU a făcut pentru *Gazetă* în cei 51 de ani pe care a păstorit-o: o știm cu toții pe de rost, iar pentru cei tineri, și pentru cei cari vor veni după noi, se va publica în *Gazetă* o biografie cât mai complectă. Aș vrea să încerc să arăt, de pot, ce a fost pentru *Gazetă* Profesorul ION IONESCU. Inițiator și fondator al ei, Profesorul ION IONESCU a condus-o spiritual o jumătate de secol. In acest timp, după ce la început a căutat să-i toarne tiparele definitive, a strâns apoi, cu grijă de apostol, regulile nescrise care au format comoara ce reprezintă tradiția de azi a *Gazetei*. Profesorul ION IONESCU a fost pentru *Gazetă* purtătorul făcliei sacre la lumina căreia își poartă pașii în timp spiritul *Gazetei*.

Trăim și azi, cei cari am avut prilejul să luăm parte la Adunarea Generală din 27 August 1945, emoția momentului când a apărut în sala de ședințe a *Gazetei Matematice*, veneratul nostru fondator: venise să îndeplinească un ritual formulat de un alt stâlp al *Gazetei*, dispărut și el prea de timpuriu dintre noi,

Profesorul G. ŢIŢEICA: *acela ca unul din fondatori să facă legătura dintre veacul trecut şi cel care vine.*

A venit atunci, senin ca întotdeauna, aşa cum îl ştiam cu toţii, fără să trădeze o clipă suferinţa care îi chinuia trupul. Şi solemn, ca un mare preot ce oficia o mare taină, a pronunţat atunci: *„Adunarea de azi este începutul lucrărilor în cea de a „doua jumătate de veac. Membrii noi vor mai veni. De aceea fac „urarea ca printre cei ce intră şi cei cari sunt acum, să fie încă „unii cari să intre în al treilea sfert de veac şi în a doua sută „de ani de apariţie a Gazetei Matematice".*

Făclia a fost luată din mâinile sale de alte mâini viguroase care o vor duce mai departe. Senin şi mulţumit a putut urmări în anul trecut sărbătorirea semicentenarului, care pentru el a fost o apoteoză şi o încununare a unei opere a sale ce va dăinui în veacuri.

Ca şi strămoşii noştri, să-l aşezăm printre larii *Gazetei* şi să-l rugăm ca, de acolo de sus, alături de ceilalţi trei stâlpi dragi nouă, să vegheze asupra destinelor *Gazetei*, pe care să o călăuzească cu spiritul său în veacul veacurilor.

ING. ION S. ANTONIU.

COMEMORAREA LUI ION IONESCU

In şedinţa din 23 Septembrie a. c., membrii prezenţi ai Societăţei *Gazeta Matematică* au ascultat în picioarea cuvintele rostite de D-l ING. I. S. ANTONIU şi publicate în necrologul precedent. In atmosfera liniştită de pios omagiu adus marelui nostru dispărut se găsea şi fratele dispărutului D-l avocat AL. IONESCU, care la începuturile *Gazetei Matematice* a asigurat multe din nevoile administrative ale revistei.

In această sedinţă s'a hotărît să se comemoreze dispariţia lui ION IONESCU într'un cadru solemn şi mai desvoltat. In acest scop s'a întocmit următorul program principial.

O şedinţă solemnă la Şcoala Politehnică din Bucureşti, unde a profesat defunctul.

Se va scoate un număr comemorativ al *Gazetei Matematice*, în care se vor arăta diferitele feţe ale activităţii şi vieţii lui ION

IONESCU şi anume : Activitatea sa la *Gazeta Matematică*, activitatea ca profesor, ca inginer, ca academician şi membru în diferite societăţi ştinţifice, activitatea din timpul războiului de întregire din 1916—1919 şi de se va putea viaţa sa ca cetăţean.

Data acestei comemorări se va anunţa ulterior, până atunci rugăm colegii din societate şi pe corespondenţi să ne trimită sugestii, propuneri şi material documentar.

GAZETA MATEMATICĂ.

† COMANDORUL-INGINER I. LINTEŞ

Duminică 21 Iulie a. c., într'un groaznic accident de automobil, a încetat din viaţă în Bucureşti distinsul colaborator şi membru al Societăţii noastre : Comandorul-Inginer ION LINTEŞ.

Brusca sa dispariţie lasă un gol ce întrerupe şirul roadelor unei intense şi neobosite activităţi intelectuale de specialitate, izvorîtă totdeauna din entuziasmul şi pasiunea ce i-au fost insuflate, pentru ştiinţele pozitive şi aplicate, de către *Gazeta Matematică* încă din anul 1913, de când a devenit colaboratorul ei.

ION GH. LINTEŞ s'a născut la 18 Aprilie 1897, în comuna Murgeanca (Ialomiţa), unde tatăl său era agricultor. In 1908 terminând cursurile şcoalei primare din comuna sa natală, s'a dus la Iaşi, unde a urmat primele trei clase secundare ca bursier al Liceului Internat. Clasa IV-a a urmat-o la Gimnaziul Militar din Craiova în 1912-1913, de unde a trecut apoi la Liceul Militar din Iaşi, iar în 1915 a intrat la Şcoala de Artilerie, Geniu şi Marină din Bucureşti, spre a deveni ofiţer activ de artilerie.

La 1 Octombrie 1916, când ne aflam în războiul de reîntregire al Neamului, a primit gradul de sublocotenent, clasificat printre primii din promoţia sa.

A făcut campania 1916—1919 în artilerie, armă în care a rămas până în 1924, când a fost trimis la Paris pentru a studia ingineria aeronautică la Şcoala Superioară de Aeronautică şi Construcţii Mecanice.

In 1927 şi-a luat diploma de inginer, în specialitatea aeronautică, trecând apoi ca stagiar prin diverse uzine aeronautice din străinătate. Astfel, în 1928 îl găsim în Uzinele Farman, Caudron şi Hispano-Suiza din Paris, iar în 1929 în Atelierele Confederale ale Elveţiei din oraşul Thounne.

Activând intens în domeniul technic al gurilor de foc a fost trimes în perioada 1931—1934 pentru studiul fabricaţiei armamentului şi muniţiilor la cele mai renumite uzine din străinătate: Skoda din Cehoslovacia, Schneider din Franţa şi Vickers din Anglia.

Revenit în ţară a funcţionat ca Director Technic al Aeronauticei, Şef al Secţiei Armament şi Muniţii la Uzinele Reşiţa, şi Comisar-General adjunct pentru industriile de metalurgie şi armament, luându-şi între timp, la 3 Iunie 1940, doctoratul în inginerie cu menţiunea: *„magna cum laude"* la Politehnica din Bucureşti, unde a fost şi chemat ca titular al catedrei de Armament şi Muniţii.

Tot odată a activat şi în afara preocupărilor zilnice ca membru în diverse societăţi ştiinţifice: Academia de Ştiinţe, Societatea Română de ştiinţe, Societatea Politehnică, Cercul Aeronautic, etc.

In toamna anului 1944 a fost admis la înaintare la gradul de general-inginer, dar nu a mai ajuns să fie înaintat general, pentrucă în luna Martie 1945 a fost trecut în rezervă. De ce?, nimeni nu poate răspunde! Se constată doar că ascensiunea sa morală şi intelectuală, clădită pe merite şi prestigiu şi câştigată numai prin muncă, cinste şi demnitate, nu a contat nimic în cântarul selecţiunii valorilor.

După această lovitură ce i-a rănit adânc sufletul său cu nimic vinovat, ION LINTEŞ resemnându-se ca devotat unei activităţi exclusiv ştiinţifice, ca secretar al Consiliului Naţional al Cercetărilor Ştiinţifice (Academia Română) şi secretar al Secţiei de Geniu Militar din Academia de Ştiinţe.

Viaţa lui ION LINTEŞ a fost ilustrată de o activitate remarcabilă, la care a pus totdeauna suflet, lucrând în orice împrejurări cu drag, cu înţelegere şi cu conştiinţă curată, atât în Armată ca ofiţer, cât şi ca profesor la Şcoala Politehnică şi la diferite Şcoli

Militare, precum şi ca membru în Societăţile ştiinţifice sau redactor la revistele: *Gazeta Matematică, Suplimentul Gazetei Matematice, Tehnică şi Viaţă, Revista Artileriei, Revista Aeronauticei, România Aeriană,* etc.

A tipărit 24 cărţi şi cursuri tehnice de aviaţie, de armament şi de matematici; a publicat 128 de memorii ştiinţifice în ţară şi străinătate; a ţinut conferinţe şi comunicări la Academia de Ştiinţe, la Societatea Română de Ştiinţe, la Cercul Aerotehnic, la Şcoala Superioară de război şi la diferite Şcoli şi Centre Militare.

Pasiunea sa însă a fost colaborarea la *Gazeta Matematică*, la şcoala căreia se poate spune că şi-a format cultura matematică, disciplina spiritului precum şi corectitudinea şi cinstea sa exemplară, ce au constituit o podoabă deosebită a sufletului său.

A fost ales membru al Societăţii la 12 Septembrie 1919 şi a făcut parte din Delegaţia de Conducere în anii 1940 şi 1941.

Urmele lăsate de el în paginele *Gazetei Matematice* totalizează 45 articole, 123 note matematice şi peste 300 probleme originale, majoritatea fiind de aritmetică, din capitolul teoriei numerelor, restul fiind mai mult de mecanică şi balistică.

A avut o deosebită predilecţie pentru studiul indicatorilor, domeniu în care a activat atât de intens, încât printr'o intuiţie cu totul aparte, printr'o metodă bazată pe o exprimare neobişnuită, a stabilit o teoremă asupra distribuţiei numerelor prime, teoremă în jurul căreia au fost discuţii asupra valabilităţii demonstraţiei.

Problema atacată de I. LINTEŞ prin această teoremă rămâne încă deschisă.

In cartea sa: *„Teoria Indicatorilor"* în care LINTEŞ expune aceasta teoremă scrie ca introducere:

> *„Mărturisesc cu toată sinceritatea că urmăresc, de-mi va fi cu putinţă, să fac şi eu un pas cât de mic înainte pentru progresul matematicelor, iar nici de cum agăţându-mă de câteva teorii, să-mi făuresc o glorie personală pentru care nu sunt cu nimic îndreptăţit".*
>
> *„Dacă voi reuşi, cel puţin în parte, să-mi ating scopul, atunci nimeni nu va fi mai mulţumit ca mine, iar dacă nu voi reuşi, mă voi resemna la gândul că pe ruinele încercării mele se vor găsi destui matematicieni români, cari vor şti să clădească şi în acest domeniu o operă de afirmare a geniului românesc".*

Această mărturie este destăinuirea unei laturi a preocupărilor sale. O altă latură se desprinde dintr'o scrisoare cu data de 28 Dec. 1937 şi 16 Dec. 1942 intitulată: *„In loc de testament"*, în care printre ultimele sale dorinţi precizează:

. . . . . .

„Problemele să fie date Gazetei Matematice. *(Sunt în sertarul biroului)"*.

. . . . . .

„Cărţile de Matematici pure să fie date Gazetei Matematice, *celelalte de technică (artileristică sau de aviaţie), să fie date Şcolii Politechnice (secţia aviaţie şi armament).*

. . . . . .

Evocând amintirea vieţii şi activităţii sale, *Gazeta Matematică* îl pomeneşte ca pe un bun şi vrednic colaborator ce a fost.

GENERAL GR. ZAPAN.

MULTIPLICITATEA SISTEMELOR IZOMORFE DE VECTORI

Incepem prin a da câteva operaţii de Algebră vectorială, pentru înlesnirea calculelor ce vor urma.

I. *Relaţia*

$$\bar{a}\,\bar{v} = b \quad , \quad \text{(produs scalar)} \qquad (1)$$

unde $\bar{a}$ *înseamnă un vector dat* $\neq 0$ *şi* b *un scalar dat, este satisfăcută de o infinitate* (∞^2) *de vectori* $\bar{v}$. Luând pentru $\bar{a}$ şi $\bar{v}$ o origine comună O, extremitatea lui $\bar{v}$ poate fi orice punct al planului P normal la $\bar{a}$ şi situat la distanţa $\frac{|b|}{|\bar{a}|}$ de O, de partea pozitivă sau negativă a lui $\bar{a}$, după cum b este un scalar pozitiv sau negativ. Vom spune că *multiplicitatea* $\bar{v}$ *determinată de* (1) *este limitată de planul* P *normal la* $\bar{a}$ în punctul $\frac{b}{a^2}\bar{a}$ *al acestui vector.* Forma generală a soluţiei va fi:

$$\bar{v} = \frac{b}{a^2}\bar{a} + \lambda_1 \bar{a}' + \lambda_2 \bar{a}'',$$

$\bar{a}'$, $\bar{a}''$ fiind doi vectori perpendiculari pe $\bar{a}$ având direcţii deosebite, iar λ_1, λ_2 doi scalari arbitrari.

II. *Relaţiile:*

$$\bar{a}_1 \bar{v} = b_1 \quad , \quad \bar{a}_2 \bar{v} = b_2, \tag{2}$$

$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ *fiind doi vectori daţi* $\neq 0$ şi b_1, b_2 *doi scalari daţi, sunt satisfăcute de o infinitate* (∞^1) *de vectori* $\bar{v}$, *dacă* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ *au direcţii diferite.* Multiplicitatea $\bar{v}$ determinată de (2) va fi limitată de o dreaptă normală vectorilor $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, intersecţie a planelor P_1, P_2, normale vectorilor $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ respectiv în punctele $\frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}$, $\frac{b_2}{a_2^2}\bar{a}_2$ ale acestor vectori.

Insemnând cu $\bar{a}_1'$, $\bar{a}_1''$ doi vectori perpendiculari pe $\bar{a}_1$, de direcţii deosebite, valoarea lui $\bar{v}$ va fi:

$$\bar{v} = \frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}_1 + \lambda_1 \bar{a}_1' + \lambda_2 \bar{a}_1'', \tag{3}$$

λ_1, λ_2 fiind doi scalari supuşi condiţiei:

$$\lambda_1 \bar{a}_1' \bar{a}_2 + \lambda_2 \bar{a}_1'' \bar{a}_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}_1 \bar{a}_2. \tag{4}$$

Această condiţie ne dă putinţa să eliminăm pe unul din cei doi parametri scalari λ_1, λ_2 din (3), de oarece produsele scalare $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ şi $\bar{a}_1'' \bar{a}_2$ nu pot fi ambele nule. In adevăr, dacă ambele ar fi nule, atunci $\bar{a}_2$ ar avea direcţia lui $\bar{a}_1$, ceea ce am exclus prin ipoteză.

Dacă $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ *au aceeaşi direcţie*

$$\bar{a}_2 = k\bar{a}_1 \quad , \quad k = \text{scalar},$$

şi dacă avem

$$b_2 = kb_1$$

relaţiile (2) *se confundă, aşa încât ne aflăm în cazul examinat la punctul I; dacă însă* b_2 *este* $\neq kb_1$ *atunci nu există nici un vector* $\bar{v}$ *care să satisfacă relaţiile* (2).

III. *Relaţiile*

$\bar{a}_1 \bar{v} = b_1$, $\bar{a}_2 \bar{v} = b_2$, $\bar{a}_3 \bar{v} = b_3$, ($\bar{a}_1$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_3$ vectori daţi $\neq 0$) (5)

sunt satisfăcute de un singur vector $\bar{v}$, *dacă* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ *nu sunt*

coplanari. Poziția lui $\bar{v}$ va fi determinată de intersecția celor trei plane P_1, P_2, P_3 normale vectorilor $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ și trecând respectiv prin punctele $\frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}_1$, $\frac{b_1}{a_2^2}\bar{a}_2$, $\frac{b_3}{a_3^2}\bar{a}_3$ ale acestor vectori.

Păstrând notațiile de la punctul precedent II, $\bar{v}$ poate fi exprimat tot prin formula (3)

$$\bar{v} = \frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}_1 + \lambda_1 \bar{a}_1' + \lambda_2 \bar{a}_1'', \tag{3}$$

λ_1, λ_2 fiind supuși condiției:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bar{a}_1' \bar{a}_2 + \lambda_2 \bar{a}_1'' \bar{a}_2 &= b_1 - \frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}_1 \bar{a}_2, \\ \lambda_1 \bar{a}_1' \bar{a}_2 + \lambda_2 \bar{a}_1'' \bar{a}_3 &= b_1 - \frac{b_1}{a_1^2}\bar{a}_1 \bar{a}_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Relațiile (6) ne determină scalarii λ_1, λ_2 de oarece determinantul lor este $\neq 0$. In adevăr, acest determinant este egal cu:

$$(\bar{a}_1' \bar{a}_2)(\bar{a}_1'' \bar{a}_3) - (\bar{a}_1' \bar{a}_3)(\bar{a}_1'' \bar{a}_2) = (\bar{a}_1' \times \bar{a}_1'')(\bar{a}_2 \times \bar{a}_3).$$

Insă produsul vectorial $\bar{a}_1' \times \bar{a}_1''$ nu poate fi nul pentru că $\bar{a}_1'$ și $\bar{a}_1''$ au direcții diferite; produsul vectorial $\bar{a}_2 \times \bar{a}_3$ este de asemenea $\neq 0$, pentru că dacă ar fi nul, $\bar{a}_2$ și $\bar{a}_3$ ar avea aceeași direcție, deci $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ ar fi coplanari — contrar ipotezei; în fine, produsele vectoriale $(\bar{a}_1' \times \bar{a}_1'')$, $(\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)$ nu sunt perpendiculare unul pe celălalt, pentru că dacă ar fi așa, atunci planul vectorilor $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ ar trece prin $\bar{a}_1$, adică vectorii $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ ar fi coplanari — contrar ipotezei.

Dacă $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ *sunt coplanari*:

$$\bar{a}_3 = k_1 \bar{a}_1 + k_1 \bar{a}_2 \quad ; \quad k_1, k_2 = \text{mărimi scalare, finite,} \tag{7}$$

și dacă între scalarii b_i $(i = 1, 2, 3)$ *există relația*:

$$b_3 = k_1 b_1 + k_2 b_2, \tag{8}$$

atunci ecuațiile (5) *se reduc la două, adică venim astfel la cazul pe care l'am examinat la punctul II. Dacă însă relația* (7) *este îndeplinită iar* (8) *nu, atunci nu vom avea nicio soluție* $\bar{v}$ *a sistemului* (3).

IV. *Relațiile*

$$\bar{a}_i \bar{v} = b_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n \quad ; \quad n > 3) \tag{9}$$

unde $\bar{a}_i$ *înseamnă vectori dați* $\neq 0$ *și* b_i *mărimi scalare date, nu vor fi satisfăcute de nici un vector* $\bar{v}$ *de cât cu condiția (necesară dar nu suficientă) ca* $n - 3$ *vectori* $\bar{a}_i$ *să se poată exprima linear în funcție de ceilalți trei — de pildă, în funcție de* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$:

$$\bar{a}_i = k_{i1} \bar{a}_1 + k_{i2} \bar{a}_2 + k_{i3} \bar{a}_3 \quad , \quad (i = 3, 4, \ldots, n) \tag{10}$$

mărimile b_i *satisfăcând și ele relațiile:*

$$b_i = k_{i1} b_1 + k_{i2} b_2 + k_{i3} b_3 , \tag{11}$$

k_{ij} $(i = 3, 4, \ldots, n \; ; \; j = 1, 2, 3)$ *fiind* $3(n-3)$ *scalari oarecare.*

Dacă relațiile (10) și (11) sunt îndeplinite, cazul dela punctul IV se reduce la cazul examinat mai sus la punctul III. Expresia analitică a lui $\bar{v}$ este aceea dată la punctul III.

V. *Ecuația:*

$$\bar{a} \times \bar{v} = \bar{b} \quad , \text{ (produs vectorial)}, \tag{12}$$

$\bar{a}$, $\bar{b}$ *fiind doi vectori dați* $(\bar{a} \neq 0)$, *nu are nicio soluție în* $\bar{v}$ *dacă produsul scalar* $\bar{a}\,\bar{b}$ *este* $\neq 0$; *ea are o infinitate de soluții* (∞^1) *în* $\bar{v}$ *în cazul*

$$\bar{a}\,\bar{b} = 0,$$

anume:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \lambda \bar{a},$$

unde $\bar{v}_0$ *este o soluție particulară a ecuației* (9) *iar* λ *un scalar arbitrar. Se poate lua:*

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{a^2} (\bar{b} \times \bar{a}).$$

Acceptând pentru cei trei vectori $\bar{a}$, $\bar{v}$, $\bar{b}$ originea comună O, multiplicitatea $\bar{v}$ va fi limitată în cazul $\bar{a}\,\bar{b} = 0$, de suportul lui $\bar{a}$, căruia i s'a aplicat translația $\bar{v}_0$.

Sisteme izomorfe. Am numit *„torsorul"* în O al unui sistem $(\bar{v})$ de n vectori (legaţi sau glisanţi) $\bar{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, operatorul vectorial $T_{\cdot}(\bar{v})$ care ne dă vectorul rezultant

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i \text{ şi momentul rezultant } \bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i,$$

$\bar{M}_i$ fiind momentul vectorului $\bar{v}_i$ faţă de O.

Două sisteme de vectori $(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ se numesc *izomorfe în* O dacă au acelaşi torsor în O.

Se ştie că torsorul este un invariant al spaţiului, în cât *două sisteme izomorfe în* O *sunt izomorfe în orice alt punct;* le vom putea numi deci *izomorfe,* fără a mai menţiona punctul O.

Se ştie de asemeni că dacă sistemele izomorfe $(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ sunt alcătuite numai din vectori glisanţi, ele sunt echivalente între ele:

$$\bar{v} = \bar{v}'.$$

Ne propunem acum a determina *multiplicitatea sistemelor* $(\bar{v})$ *izomorfe între ele, alcătuite fiecare din câte* n *vectori* $\bar{v}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ne vom mărgini deocamdată la sisteme de vectori legaţi. Elementele determinante ale unui atare sistem sunt vectorii $\bar{v}_i$ precum şi vectorii de poziţie $\bar{r}_i$ ai punctelor de aplicaţie, în total $2n$ vectori, însemnând cu $\bar{r}_i$ vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al vectorului $\bar{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Să numim $\bar{R}$, $\bar{M}$ cei doi vectori ai torsorului comun sistemelor izomorfe $(\bar{v})$ de câte n vectori legaţi. Elementele determinante ale sistemului vor satisface relaţiile:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i = \bar{R} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{v}_i = \bar{M}, \tag{13}$$

care constitue un sistem de două ecuaţii vectoriale cu $2n$ vectori necunoscuţi: $\bar{r}_i$, $\bar{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. S'ar părea că putem lua în mod arbitrar $2n - 2$ vectori dintre ei, rămânând ca cele două ecuaţii (13) să ne determine şi pe ceilalţi doi vectori. O analiză mai atentă a problemei ne va arată însă că situaţia este alta.

Cazul $n = 1$. Examenul formal de mai sus ne-ar duce la concluzia că multiplicitatea sistemelor izomorfe se reduce la unul

singur ($2n = 0$) — ceea ce nu este exact. In adevăr, să reluăm ecuațiile (13) care în cazul $n = 1$ pot fi puse sub forma:

$$\bar{v} = \bar{R} \quad , \quad \bar{r} \times \bar{v} = \bar{M}.$$

Prima ecuație ne dă deci valoarea vectorului $\bar{v}$. Pentru determinarea vectorului de poziție $\bar{r}$ ne rămâne ecuația:

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}.$$

In virtutea punctului V, ecuația precedentă în $\bar{r}$ nu are soluție de cât dacă produsul scalar $\bar{R}\,\bar{M}$ este nul, ceea ce avem dreptul a presupune totdeauna de oarece $(\bar{R}, \bar{M})$ trebue să fie *efectiv* torsorul unui vector. Vom avea deci:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \lambda \bar{R} \quad , \quad \bar{r}_0 = \frac{1}{R^2}(\bar{R} \times \bar{M}),$$

λ fiind un scalar arbitrar. Vectorii $\bar{v}$ au toți același suport.

Așa dar, *în cazul* n = 1 *multiplicitatea sistemelor* $(\bar{v})$ *izomorfe comportă un scalar arbitrar; sistemele izomorfe sunt vectorii de aceeași mărime de pe un același suport.*

Cazul $n = 2$. S'ar părea că în acest caz pe care-l vom pune sub forma

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{R} \quad , \quad \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{M}, \qquad (14)$$

am putea lua în mod arbitrar $2n - 2 = 2$ vectori din patru, rămânând a determina pe ceilalți doi cu ecuațiile (14). Această concluzie ar fi inexactă, după cum vom vedea prin analiza ce urmează.

Să presupunem deocamdată că luăm în mod arbitrar, doi vectori din cei patru necunoscuți: $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$. Vom deosebi patru cazuri, după cum luăm ca vectori arbitrari pe $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ pe $\bar{v}_1$, $\bar{r}_1$, pe $\bar{v}_1$, $\bar{r}_2$ sau pe $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$.

a) $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ *arbitrari.* Cazul nu este posibil, evident, de cât dacă vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ au suma egală cu $\bar{R}$ [prima ecuație din (14)]. In realitate deci, nu ne putem da în mod arbitrar de cât unul din cei doi vectori $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$. Desfășurarea ulterioară a cazului se va face după schema *b)* sau *c).*

b) $\bar{v}_1$, $\bar{r}_1$ *arbitrari.* Din prima ecuație (14) scoatem pe $\bar{v}_2$, în cât pentru determinarea lui $\bar{r}_2$ vom avea ecuația:

$$\bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{M} - \bar{r}_1 \times \bar{v}_1. \qquad (15)$$

In virtutea celor stabilite la punctul V, ecuaţia aceasta nu posedă soluţie de cât cu condiţia:

$$\bar{v}_2 (\bar{M} - \bar{r}_1 \times \bar{v}_1) = 0,$$

sau, ţinând seama de valoarea $\bar{R} - \bar{v}_1$ a lui $\bar{v}_2$,

$$\bar{v}_1 (\bar{M} - \bar{r}_1 \times \bar{R}) = \bar{R}\,\bar{M}. \qquad (16)$$

Presupunând pe $\bar{r}_1$ arbitrar, vom avea pentru v_1, ∞^2 soluţii (punctul I). Cu acest $\bar{v}_1$ obţinem pe $\bar{v}_2 = \bar{R} - \bar{v}_1$ şi în fine, din (15), pe $\bar{r}_2$, conform celor stabilite la punctul V, cu ajutorul unui nou parametru arbitrar.

c) $\bar{v}_1$, $\bar{r}_2$ *arbitrari.* Din prima ecuaţie (14) scoţând pe $\bar{v}_1$, dăm peste un caz ($\bar{v}_2$ $\bar{r}_2$ arbitrari) analog cazului *b).*

d) $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ *arbitrari.* Scoţând din prima ecuaţie (14) $\bar{v}_2 = \bar{R} - \bar{v}_1$ şi eliminând pe $\bar{v}_3$ din a doua, obţinem:

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{v}_1 = \bar{M} - \bar{r}_2 \times \bar{R}.$$

Această ecuaţie în $\bar{v}_1$ nu are soluţie (punctul V) de cât cu condiţia:

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)\,\bar{M} = (\bar{r}_1\ \bar{r}_2\ \bar{R}),$$

unde am însemnat ca de obiceiu cu $(\bar{r}_1\ \bar{r}_2\ \bar{R})$ produsul *mixt* al celor trei vectori în ordinea indicată. De aici se vede că $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ nu pot fi luaţi ambii în mod arbitrar.

Dacă această condiţie este îndeplinită, atunci există ∞^1 soluţii în $\bar{v}_1$ şi deci tot atâtea în $\bar{v}_2$

Am putea-o satisface menţinând arbitrar numai pe unul din cei doi vectori, de pildă pe $\bar{r}_2$. Atunci relaţia precedentă pusă sub forma:

$$\bar{r}_1 (\bar{M} - \bar{r}_2 \times \bar{R}) = \bar{r}_2\,\bar{M},$$

ne dă pentru $\bar{r}_1$, ∞^2 soluţii (punctul I).

Cazul acesta rezolvă problema 6218 propusă la pag. 620, Vol. LI, al G. M.

In rezumat, putem spune că *nu este cu putinţă a lua în mod arbitrar doi din cei patru vectori* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, *pentru a determina pe ceilalţi doi din ecuaţiile* (14); *putem lua însă unul din ei în mod arbitrar, în care caz soluţia ecuaţiilor* (14) *depinde de trei parametri scalari.* Aşa dar, *multiplicitatea sistemelor*

izomorfe de doi vectori legați comportă efectiv 6 parametri scalari. Putem lua în mod arbitrar unul din cei patru vectori care determină sistemul; nu putem însă lua doi vectori în mod arbitrar.

Cazul $n > 2$. Calculul formal al parametrilor arbitrari ne-a arătat că am putea da valori arbitrare la $2n - 2$ vectori din cei $2n$ ce determină sistemul $\bar{r}_i$, $\bar{v}_i$. Dacă ar fi așa, atunci vectorii de poziție $\bar{r}_i$ arbitrar luați ar fi în număr de cel puțin $n - 2$, de oarece vectorii $\bar{v}_i$ arbitrar luați sunt în număr de cel mult n; în mod analog putem conchide că numărul vectorilor $\bar{v}_i$ arbitrar luați ar trebui să fie cel puțin $n - 2$. Putem, așa dar, presupune că toți vectorii $\bar{r}_i$, $\bar{v}_i (i = 3, 4, \ldots, n)$ sunt arbitrari luați. Punând atunci ecuațiile (13) sub forma

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{R} - \bar{v}_3 - \ldots - \bar{v}_n,$$

$$\bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \bar{M} - \bar{r}_3 \times \bar{v}_3 - \ldots - \bar{r}_n \times \bar{v}_n,$$

dăm peste cazul studiat $n=2$. Transportând concluziile aflate acolo, la cazul ce ne preocupă ($n > 2$), ajungem la următoarea constatare generală:

Multiplicitatea sistemelor izomorfe de n *vectori legați* ($n>1$) *comportă* $6n - 6$ *parametri scalari; putem lua în mod arbitrar* $2n - 3$ *vectori din cei* $2n$ *ce determină sistemul, în care caz multiplicitatea mai dispune de trei parametri scalari; nu putem lua* $2n - 2$ *vectori în mod arbitrar.*

V. VÂLCOVICI.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1947

După cum am anunțat în numărul precedent, publicăm în cele ce urmează programul concursului *Gazetei Matematice* și materiile la care vor fi examinați candidații.

1. *Probele de examen.* Candidații la concurs vor da câte o probă scrisă și o probă orală la materiile prevăzute pentru fiecare clasă și anume:

Clasa a IV-a: Algebra și geometria.
Clasa a V-a: Algebra și geometria.
Clasa a VI-a: Geometria și trigonometria.
Clasa a VII-a: Algebra și geometria descriptivă.

Clasa a VIII-a: Algebra obligator şi la alegere Geometria Analitică sau Mecanica.

2. Nu se admite candidaţilor nicio scuză pentru nepregătirea unora din capitolele trecute în programa analitică a concursului.

Programa analitică a materiei pentru concurs este după cum urmează:

La fiecare materie şi pentru fiecare clasă, programa complectă a clasei respective.

Această materie se găseşte expusă în manualele uzuale ale elevilor.

In plus se cere:

Clasa a V-a: *Algebră.* Regulile de divizibilitate cu 2, 4, 8, 3, 9 şi 5. Cel mai mare codivizor comun şi cel mai mic comultiplu comun al mai multor numere.

Progresii aritmetice şi geometrice.

Transformarea fracţiilor ordinare, în fracţii zecimale. Fracţii periodice.

Geometria. Puncte remarcabile ale triunghiului. Ortocentru, centru cercului circumscris, centrele cercurilor înscrise şi exînscrise, centru de greutate. Cercul celor nouă puncte. Dreapta lui SIMSON.

Teorema lui PTOLOMEU.

Translaţii. Rotaţii. Simetrii. Omoteţii. Figuri direct şi invers egale. Figuri direct şi invers asemenea.

Clasa a VI-a: *Geometria.* Complimente de geometrie plană. Raport anarmonic. Transversale. Teoremele lui CEVA şi MENELAUS. Patrulater complect.

Pol şi polară la cerc. Ax radical. Fascicol liniar de cercuri. Cercuri ortogonale.

Proprietăţi generale ale transformării prin inversiune. Teorema lui FEUERBACH.

Clasa a VII-a: *Geometria descriptivă.* Metode:

Schimbarea planelor de proiecţie. Rotaţie. Rabatere.

Determinarea adevăratei mărimi a elementelor unei figuri geometrice. Distanţa dintre două puncte. Distanţa dela un punct la un plan. Unghiul a două drepte, a unei drepte cu un plan, a două plane.

Clasa a VIII-a: *Algebra.* Numere complexe. Operaţiuni cu aceste numere. Formula lui MOIVRE. Ecuaţiuni binoame. Eliminare.

Geometria analitică. Tangente duse dintr'un punct la cerc. Pol şi polară la cerc. Fascicol liniar de cercuri.

Tangente duse dintr'un punct la elipsă, hiperbolă şi parabolă.

Cercuri directoare şi cerc principal.

Pol şi polară la aceleaşi conice.

Diametrii conjugaţi. Teoremele lui APOLLONIUS.

Consideraţiuni geometrice relativ la conice.

Mecanica. A) Statica. Echilibrul corpurilor supuse la legături: simplă rezemare, prindere cu fire. Frecarea de alunecare. Echilibrul corpurilor ţinând seama de frecare. Maşini simple: pârghii, plan înclinat, balanţe şi cântare, scripeţi, şurub.

B) Cinematica. Mişcare relativă, mişcare absolută. Compunerea oscilatorie armonică.

C) Dinamica. Principiile Mecanicei. Energia cinetică. Relaţia dintre energia cinetică şi lucru mecanic. Unităţi de măsură: sistemul tehnic, sistemul c. g. s. Omogeneitate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ".

NOTE MATEMATICE

3. *O generalizare. Fie* P *un punct în planul triunghiului* ABC, *iar* A'B'C' *triunghiul său pedal. O dreaptă taie laturile* B'C', C'A', A'B' *în* A_1, B_1, C_1. *Paralelele duse din* A, B, C *la polarele punctelor* A_1, B_1, C_1 *în raport cu conica cu centrul în* P *şi înscrisă în triunghiul* A'B'C', *sunt concurente.*

Aceasta este o generalizare cerută cu ocazia rezolvării problemei 4666 în *Gazeta Matematică*, Anul XLIV, pag. 537.

Pentru rezolvare folosim coordonatele baricentrice, luând ca triunghiu de referinţă triunghiul A'B'C'.

Fie

$$P(e+f\ ,\ f+d\ ,\ d+e).$$

Deci

$$A(-e-f,\ f+d,\ d+e)\ ,\ B(e+f,\ -f-d,\ d+e),$$
$$C(e+f,\ f+d,\ -d-e)$$

Conica cu centrul în P şi înscrisă în triunghiul A'B'C' este

$$\Sigma d^2\alpha^2 - 2\Sigma ef\beta\gamma = 0. \qquad (1)$$

Fie

$$A_1(0, -w, v) \quad , \quad B_1(w, 0, -u) \quad , \quad C_1(-v, u, 0)$$

cele trei puncte pe laturile B'C', C'A', A'B', colineare pe dreapta:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Polara punctului A_1 față de conica (1) este

$$d\alpha(-ew + fv) + e\beta(ew + fv) - f\gamma(ew + fv) = 0. \qquad (2)$$

Paralela din A la dreapta (2) este

$$\alpha[fv(d + f) - ew(d + e)] + \beta fv(e + f) - \gamma ew(e + f) = 0$$

și concură împreună cu analoagele sale în punctul de coordonate baricentrice:

$$(e + f)[-uef(e + f) + vfd(f + d) + wde(d + e)]$$
$$(f + d)[uef(e + f) - vfd(f + d) + wde(d + e)]$$
$$(d + e)[uef(e + f) + vfd(f + d) - wde(d + e)].$$

P. P. DRĂGHICESCU.

4. *Asupra problemei 4547.* In această problemă, se cerea să se aşeze, în vârfurile unui decagon regulat, greutăţi egale cu 0, 1, 2, ... 9 unităţi, astfel ca centrul lor să cadă cât mai aproape de centru, de o latură sau de un vârf.

Soluţia dată acestei probleme de d-l Ing. AL. STOENESCU, la pag. 401—403, este foarte ingenioasă şi poate servi ca model pentru rezolvarea, oarecum tehnică, a problemelor de acest gen.

In cele ce urmează, voesc să dau elementele care să ducă la o soluţie pur matematică a problemei, care permite abordarea chiar a unor probleme mai generale de acest gen.

Fie un cerc de rază R, în care alegem ca axe doi diametrii perpendiculari; împărţim cercul în zece părţi egale, începând dela axa Ox, în sensul trigonometric şi notăm cu A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots 9$ vârfurile decagonului obţinut. Fie F_i greutatea aplicată în vârful A_i, exprimată printr'un număr întreg sau raţional de unităţi, iar x_i, y_i coordonatele vârfului A_i: coordonatele centrului de greutate sunt date de formulele cunoscute

$$x = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} \quad , \quad y = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}. \qquad (1)$$

In cazul nostru, avem $x_i = R\cos\frac{i\pi}{5}$, $y_i = R\sin\frac{i\pi}{5}$. Dacă voim ca centrul de greutate să cadă în origine, anulăm numărătorii expresiilor din (1), în care am înlocuit x_i, y_i prin expresiile lor; obţinem

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_4)\cos\frac{\pi}{5} + (\varphi_2 - \varphi_3)\cos\frac{2\pi}{5} = 0, \qquad (2)$$

$$(\varphi_1 + \varphi_4)\sin\frac{\pi}{5} + (\varphi_2 + \varphi_3)\sin\frac{2\pi}{5} = 0. \qquad (3)$$

unde $\varphi_i = F_i - F_{i+5}$. Relaţia (3) se mai poate scrie

$$\varphi_1 + \varphi_4 + 2(\varphi_2 + \varphi_3)\cos\frac{\pi}{5} = 0,$$

Insă $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, adică este un număr iraţional; cum φ_i sunt raţionale, această egalitate nu este posibilă decât dacă

$$\varphi_4 = -\varphi_1 \quad , \quad \varphi_3 = -\varphi_2, \qquad (4)$$

cu care (2) devine, înlocuind şi $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$,

$$2\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2 + (\varphi_1 + \varphi_2)\sqrt{5} = 0,$$

care are loc numai dacă

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \quad , \quad 2\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

din care deducem $\varphi_1 = \varphi_3 = -\varphi_0$, $\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_0$, deci

$$\left.\begin{array}{c} F_6 = F_1 + (F_0 - F_5),\ F_7 = F_2 - (F_0 - F_5),\ F_8 = F_3 + (F_0 - F_5), \\ F_9 = F_4 - (F_0 - F_5), \end{array}\right\} \qquad (5)$$

la care adăugăm relaţia $2F_i = S = 45$, care conduce la

$$2(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + F_0 + F_5 = S. \qquad (6)$$

Avem deci un sistem de cinci ecuaţii, (5) şi (6), cu zece necunoscute. Putem, astfel, să ne dăm arbitrar valorile a cinci dintre necunoscute. Rezultă, în primul rând, că mărimile greutăţilor F_i nu pot fi toate arbitrare. In al doilea rând, rezultă că problema poate avea mai multe soluţii. Astfel, dacă luăm $F_0 = 1$, $F_1 = 8$, $F_2 = 7$, $F_3 = 4$, $F_4 = 3$, găsim $F_5 = 0$, $F_6 = 9$, $F_7 = 6$, $F_8 = 5$,

$F_9 = 2$, care este soluția dată de d-l AL. STOENESCU. Dar, cu datele problemei, putem găsi alte soluții care nu se obțin din cea de mai sus printr'o permutare totală sau schimbare de sens. Astfel, dacă luăm $F_0 = 1$, $F_1 = 8$, $F_2 = 3$, $F_3 = 4$, $F_4 = 7$, găsim $F_5 = 0$, $F_6 = 9$, $F_7 = 2$, $F_8 = 5$, $F_9 = 6$, etc. Valorile arbitrare ale necunoscutelor se vor alege așa fel ca să satisfacă condițiilor problemei. Problema se poate trata pe aceeași cale pentru un poligon regulat cu n laturi și cu n forțe date F_i, etc.

Este mai puțim simplă problema când se cere ca centrul de greutate să fie cât mai apropiat de una din laturi. Dacă a fost aleasă axa Ox paralelă cu latura dată, alegem latura ca axă Ox și proplema revine la aflarea minimului expresiei $y + a$, adică, după simplificări cu factorii pozitivi R și $\sin\frac{\pi}{5}$

$$E = (\varphi_1 + \varphi_4) + 2(\varphi_2 + \varphi_3 + 45)\cos\frac{\pi}{5},$$

unde $a = R\sin\frac{2\pi}{5}$ este *apotema* decagonului. Obținem cea mai mică valoare pentru E când $\varphi_1 + \varphi_4$, $\varphi_2 + \varphi_3$ au cea mai mică valoare negativă, adică $F_1 + F_4 < F_6 + F_9$, $F_2 + F_3 < F_7 + F_8$, iar F_6, F_7, F_8, F_9 au valorile 6, 7, 8, 9 într'o anumită ordine, etc.

M. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI

Lucrare scrisă. Sesiunea Iulie 1945

Geometria analitică. Secțiunea Construcții. 1°. Se consideră iperboloidul de revoluție născut prin rotirea iperbolei echilatere de semiaxe 1 în jurul axei sale netransverse OL. Ecuațiile dreptei OL sunt

$$x = y = z.$$

Să se afle ecuația iperboloidului.

2°. Să se scrie ecuația conului circumscris acestui iperboloid în lungul intersecției sale cu planul $z = 1$.

3°. Să se afle generatoarele rectilinii ale iperboloidului.

Secţiunea Electromecanică. Se consideră tetraedrul SABC, în care unghiul triedru din S este tridreptunghiu. Fie M proiecţia lui S pe planul ABC şi K intersecţia lui SM cu sfera circumscrisă tetraedrului. Să se arate că

$$SK = 3\,SM.$$

Generalizare.

Secţia Mine şi Metalurgie. Se consideră cuadrica:

$$x^2 + 2y^2 - 8z^2 + 4x - 12y - 16z + 13 = 0.$$

1°. Să se afle natura, ecuaţia redusă şi axele ei.

2°. Să se afle generatoarele rectilinii ale cuadricei.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVI. Nr. 7. Septembrie 1946. V. ALACI: Funcţii trigonometrice inverse şi funcţii logaritmice care au aceeaşi derivată. Note matematice, bibliografie, probleme rezolvate şi propuse.

Forţa de Inerţie. *Symposion de d-nii Prof.* D. GERMANI *şi* C. BUDEANU *cu un cuvânt introductiv şi unul de încheiere de d-l Prof.* V. VÂLCOVICI. *Publicaţiile Academiei de Ştiinţe din România, Seria III-a, Memorii şi Monografii, Nr. 20, Bucureşti 1946.*

Lucrarea cuprinde cuvântările ţinute la 15 Decembrie 1945 în Amfiteatrul Laboratorului de Mecanică a Universităţii din Bucureşti cu ocazia Symposion-ului organizat de Academia de Ştiinţe spre a se discuta şi stabili *dacă forţele de inerţie sunt reale sau fictive* precum şi a se hotărî asupra *sensului în care trebue înţeles principiul lui* D'ALEMBERT.

Vom reda în cele de mai jos concluziile la care s'a ajuns în acest Symposion.

Să considerăm un punct material M, *de massă* m care sub *acţiunea unui singur agent exterior* C capătă o acceleraţie $\bar{a}$.

Singura forţă reală care lucrează asupra punctului M este $\bar{F} = m\bar{a}$.

Forţa $\bar{F}_i = -m\bar{a}$, *egală* şi *direct opusă cu* $\bar{F}$, se numeşte *forţă de inerţie,* este *reală,* dar conform *principiului acţiunii şi reacţiunii,* acţionează asupra *agentului* provocator C.

Rezultă deci că *principiul lui* D'ALEMBERT exprimat prin ecuaţia:

$$\bar{F} + \bar{F}_i = 0$$

nu reprezintă un echilibru real al punctului M întrucât forţa F_i nu lucrează asupra acestui punct.

O altă problemă discutată a fost aceea a *realităţii* forţelor ce apar în *mişcarea relativă.*

Fie un punct M, de *massă* m supus la o forţă $\bar{F}$. Să notăm cu:

$\bar{a}_a$ *acceleraţia absolută* a punctului M

$\bar{a}_r$ *acceleraţia* lui M în mişcarea *relativă*

$\bar{a}_t$ *acceleraţia* lui M în mişcarea *de transport*

$\bar{a}_c$ *acceleraţia* lui CORIOLIS

Avem:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

în care:

$\bar{F} = m\bar{a}_a$ reprezintă *forța activă dată*

$\bar{F}_1 = -m\bar{a}_t$ reprezintă *forța de inerție* în mișcarea de *transport*

$\bar{F}_2 = -m\bar{a}_c$ reprezintă *forța de inerție* corespunzătoare acceleraţiei lui CORIOLIS.

In *mișcarea relativă* (pentru un observator antrenat) forțele F, F_1 și F_2 sunt toate *reale* și *acționează* asupra punctului M.

In *mișcarea absolută* (pentru un observator fix) *singura forță reală* care acționează punctul M este F, celelalte două forțe complimentare F_1 și F_2 *dispar.*

Publicația se încheie cu un tablou comparativ al forțelor de inerție întocmit de d-l Prof. V. VÂLCOVICI, tablou care rezumă concluziile întregei lucrări.

ALEXANDRU STOENESCU.

CERERI

Răspuns la cererea 129 (Gazeta Matematică, XXXI, 55). Se întreabă ce se știe despre chipurile unor matematicieni și învățați ai antichității grece, zugrăviți în exteriorul bisericii cu Sfinți din București, Calea Moșilor.

In lucrarea « *Bucureștii Vechiului Regat* » de d-l GEORGE COSTESCU (Editura « *Universul* » 1944) la pag. 33, jos la explicații la Nr. 61 găsim:

« *Printre sfinții zugrăviți pe sub streașina acelei biserici erau însă câteva sibile și filosofi ai antichității pe care învățatul Mitropolit* DANIIL, *ctitorul bisericii îi făcea astfel cunoscuți și bucureștenilor. Intre chipurile ce se mai cunoșteau pe la 1875 și de pe inscripțiile fiecărora,* ION GHICA *ne spune că erau: filosoful* THALES, HERMES TRISMEGISTUL, ARISTOTELES, PLATON, *stoicul* ZENON *și sibilele* CUMEA, DELPHEA *și* PERSICA. *Tot el bănuește că ceilalți erau:* SOCRATE, ANAXAGORA, EMPEDOCLE *și* HERACLIT ».

In *Manual de Istoria Artelor,* Vol. II de O. TAFRALI, găsim următoarele la pag. 317:

« *Pe frescele exterioare ale bisericilor bucovinene, din Voroneț, Humor, Sucevița Moldovița, Arbore, sau în interiorul celor din Moldova vechiului regat, de pildă în nartexul cetățuiei de lângă Iași sunt reprezentați sibile și oameni iluștri ai antichității ca* PLATON, TUCIDIDE, SOCRAT, ARISTOTEL, PITAGORA *și alții. Aceasta este o influență a Renașterii italiene, căci* PERUGINO *și alți pictori italieni după dânsul, au pictat asemenea personagii în frescele lor. Artiștii picturilor bisericești moldovenești se află dar direct sub influența lor. Această înrâurire se face din ce în ce mai puternică, mai ales în secolul al XVIII-lea la pictura icoanelor* ».

Acest citat explică și cele arătate de d-l G. COSTESCU.

MAIOR E. ST. IACOB.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3640. *De un cui, prins într'un plafon, acționează forțele* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *situate într'un plan vertical și fac respectiv unghiurile* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *cu orizontala.*

Se cere:

1°. *Rezultanta forțelor în mărime și direcție.*

2°. *Care trebue să fie relația dintre intensitățile forțelor și unghiurile* α, *pentru ca rezultanta să treacă printr'un punct dat din planul forțelor.*

Să se generalizeze pentru cazul când forțele sunt situate în plane diferite.

E. ABASON.

Să considerăm cazul general când cuiul este supus la un număr de n forțe F_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ distribuite oricum în spațiu.

Alegând sistemul de referință $Oxyz$ cu origina O în cui și notând cu α_i, β_i, γ_i *unghiurile pe care le face forța* F_i *respectiv cu* Ox, Oy *și* Oz, *cu* R *rezultante, cu* X, Y, Z *proiecțiile rezultantei pe axe și cu* α, β, γ *unghiurile pe care le face rezultanta cu axele* avem:

$$X = \sum_1^n F_i \cos\alpha_i \quad ; \quad Y = \sum_1^n F_i \cos\beta_i \quad ; \quad Z = \sum_1^n F_i \cos\gamma_i$$

$$R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sqrt{(\Sigma F_i \cos\alpha_i)^2 + (\Sigma F_i \cos\beta_i)^2 + (\Sigma_i \cos\gamma_i)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{Y}{R} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

In plus menționăm că între unghiurile α_i, β_i, γ_i trebue să existe relațiile:

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1 \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, n)$$

Ecuația suportului rezultantei este:

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}$$

sau:

$$\frac{x}{\Sigma F_i \cos\alpha_i} = \frac{y}{\Sigma F_i \cos\beta_i} = \frac{z}{\Sigma F_i \cos\gamma_i}.$$

Notând cu $M(a, b, c)$ punctul prin care trebue să treacă rezultanta obţinem două condiţii:

$$\frac{a}{\Sigma F_i \cos\alpha_i} = \frac{b}{\Sigma F_i \cos\beta_i} = \frac{c}{\Sigma F_i \cos\gamma_i}.$$

La acelaşi rezultat ajungem luând momentele rezultantei în raport cu trei axe paralele cu axele de coordonate şi trecând prin M şi exprimând că aceste momente sunt nule.

In cazul forţelor situate în acelaşi plan, luând acest plan drept plan xOy cu axe Ox orizontală, avem:

$$\beta_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_i \quad ; \quad \gamma_i = \frac{\pi}{2}$$

$$X = \sum_1^n F_i \cos\alpha_i \quad Y = \sum_1^n F_i \cos\beta_i = \sum_1^n F_i \sin\alpha_i \quad Z = 0$$

$$R = \sqrt{(\Sigma F_i \cos\alpha_i)^2 + (\Sigma F_i \sin\alpha_i)^2}$$

Ecuaţia suportului rezultantei este:

$$\frac{x}{\Sigma F_i \cos\alpha_i} = \frac{y}{\Sigma F_i \sin\alpha_i}$$

iar condiţia ca rezultantă să treacă prin punctul $M(a, b)$ este:

$$\frac{a}{\Sigma F_i \cos\alpha_i} = \frac{b}{\Sigma F_i \sin\alpha_i}.$$

Problema a fost rezolvată, la data propunerii ei de DORA SONNENREICH şi T. HULUBEI.

Recent s'a primit o soluţie foarte bună dela d-l E. N. WEGENER (Bucureşti).

ALEXANDRU STOENESCU.

PROBLEMA 4251. *Un număr de trei cifre are cubul format din patru grupe. Grupa întâia identică cu grupa ultimă este cub perfect, iar grupa a doua identică cu grupa a treia este patrat perfect. Să se găsească numărul.*

D. ARG. DUMITRESCU.

Fie N numărul de 3 cifre cerut. Din enunţ se vede că N^3 are un număr pereche de cifre şi cum

$$10^6 < N^3 < 10^9$$

urmează că N^3 are 8 cifre. Dacă m, n, p, q sunt cifre, atunci cubul din enunț poate avea următoarele forme

(I) $\underline{m\,npq\,npq\,m}$; (II) $\underline{mn\,pq\,pq\,mn}$; (III) $\underline{mnp\,q\,q\,mnp}$

unde numerele subliniate cu o linie sunt cuburi, iar cele subliniate cu 2 linii sunt pătrate perfecte. Examinăm pe rând pe fiecare din cele 3 cazuri.

Cazul (I). Avem

$$\left.\begin{aligned} N^3 &= (10^7+1)\,m+(10^3+1)\,npq \\ &= 11\,[11\times 82644m+11\times 8\times npq+7m+3\times npq]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Paranteza trebue să fie *mult.* 11^2, deci trebue să avem neapărat, deocamdată

$$7m+3npq=11k \qquad (2)$$

m fiind cub perfect de o cifră se găseşte printre numerele 0,1 sau 8, $m=0$ nu este acceptabil căci atunci $q=p=0$ şi ar urma

$$N^3=00\,n\,00\,n\,000=n\times 101\times 10^3$$

ceea ce este imposibil pentru $n<10$ căci 101 este număr prim.

Pentru $m=1$, din (2) se scoate

$$3\times npq=11k-7 \quad \therefore \quad npq=11t-6.$$

Dacă un pătrat npq este de forma $11t-6$, rădăcina sa pătrată $\sqrt{npq}$ este de forma $11n\pm 4$. Cum

$$10\leqslant\sqrt{npq}\leqslant 31$$

nu putem avea pentru $\sqrt{npq}$ decât valorile 15, 18, 26 sau 29. Ridicând aceste numere la pătrat şi ducându-le în (1) nu găsim soluţii pentru problemă.

Dacă $m=8$, din (2) se scoate

$$3\times npq=11k-56 \quad \therefore \quad npq=(t-1)\times 11-4$$

care nu este admisibil căci numerele de forma $11k-4$ nu sunt pătrate perfecte.

Cazul (II). In acest caz trebue să avem

$$N^3=(10^6+1)\,mn+10^2\,(10^2+1)\,pq=[9901mn+100pq]\,101 \quad (3)$$

unde cubul mn poate avea valorile

$$1,\ 8,\ 27 \quad \text{sau} \quad 64. \qquad (4)$$

Dacă în paranteza din (3) punem în evidenţă divizorul 101 avem

$$N^3 = [101 \times 98 \times mn + 101 \times pq + 3 \times mn - pq]\,101.$$

Diferenţa $3 \times mn - pq$, trebue să se dividă cu 101. Dând lui mn pe rând valorile (4) şi ţinând seamă că pq este pătrat perfect se găseşte că acea diferenţă se divide cu 101 pentru

$$mn = 27 \quad \text{şi} \quad pq = 81$$

care dau soluţia

$$N^3 = 303^3 = 27818127.$$

Cazul (III). Se găseşte la fel, că trebue să avem

$$\left.\begin{aligned} N^3 &= mnp\,(10^5 + 1) + 11\,.\,q\,.\,10^3 \\ &= [11 \times 826 \times mnp + 9 \times 11 \times q + 5 \times mnp + 10q] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

unde $mnp + 2q$ trebue să fie multiplu de 11. Dând lui q pe când valorile 0, 1, 4, 9 şi lui mnp pe rând valorile

001, 008, 027, 064, 125, 216, 343, 512 şi 729

se găseşte că suma $mnp + 2q$ este multiplu de 11 pentru valorile corespunzătoare

$$q = 1\ ;\ 9\ ;\ 4\ , \quad mnp = 069\ ;\ 125\ ;\ 729.$$

Ducând aceste valori în (5), nu găsim soluţie pentru cazul (III). Problema are o singură soluţie, cea găsită la cazul (II).

D-l E. WEGENER (student-inginer) a rezolvat problema pe cale analoagă, căutând însă cuburi în tabele numerice.

Soluţii bune au trimes la data propunerei problemii d-nii EM. MEREUŢĂ (1933) şi d-nii V. CEAUŞESCU, P. DOBRESCU, V. GHIOCEL, P. C. MAZILU, MARIN I. PREDOESCU, TR. PREDOESCU şi M. ZIFF (1934).

G-L GH. B.

PROBLEMA 5772. *Pe laturile unghiului drept* POQ *se iau lungimile* $OP = OQ = 2a$. *Se cere să se găsească:* 1°. *Ecuaţia conicelor* (C) *circumscrise triunghiului* POQ, *având un vârf în* O; 2°. *centrul, ecuaţia redusă, coordonatele focarelor, directoarele corespunzătoare;* 3°. *locul centrelor;* 4°. *locul vârfurilor situate pe axa ce trece prin* O; 5°. *locul intersecţiei directoarelor cu axa ce trece prin* O; 6°. *locul focarelor;* 7°. *înfăşurătoarea axei perpendiculară pe cea ce trece prin* O.

N. ABRAMESCU.

1°. Fie

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + mx - y = 0$$

ecuaţia unei conice care trece prin origine. Scriind că ea trece prin P (0, 2a), Q (2a, 0), găsim $C = \frac{1}{2a}$, $A = -\frac{m}{2a}$ şi ecuaţia devine

$$f(x, y) = mx^2 - 4aBxy - y^2 - 2a(mx - y) = 0.$$

Să exprimăm că O este un vârf al conicei [1]). Tangenta în origine este $mx - y = 0$. Vom scrie că diametrul conjugat coardelor paralele cu această tangentă,

$$f'_x + mf'_y = 0,$$

este perpendicular pe ea, de unde $2aB = \frac{m}{m-1}$. Inlocuind pe $2aB$ ecuaţia acestei axe este $x + my = 0$, iar ecuaţia conicelor

$$f(x, y) = m(m-1)x^2 - 2mxy - (m-1)y^2 - 2a(m-1)(mx-y) = 0. \quad (1)$$

2°. *Coordonatele centrului* sunt soluţiile sistemului

$$\frac{1}{2}f'_x = m(m-1)x - my - am(m-1) = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_y = -mx - (m-1)y + a(m-1) = 0.$$

De unde coordonatele centrului sunt

$$x_0 = \frac{am(m-1)}{m^2 - m + 1}, \quad y_0 = -\frac{a(m-1)}{m^2 - m + 1}. \quad (2)$$

Ecuaţia redusă a conicelor (C) este

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde S_1 şi S_2 sunt date de ecuaţia în S,

$$S^2 - (A+C)S + AC - B^2 = 0, \quad S^2 - (m-1)^2 S - m(m^2 - m + 1) = 0,$$

$$S_1 = m^2 - m + 1, \quad S_2 = -m.$$

---

1) Pentru a exprima că o dreaptă este axă la o conică, să se vadă: N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de Geometrie Analitică* (curs universitar), ediţia III-a, 1944, p. 154.

Apoi

$$\frac{\Delta}{\delta} = Dx_0 + Fy_0 + F = -a^2(m^2+1)\frac{(m-1)^2}{m^2-m+1},$$

unde x_0 şi y_0 sunt coordonatele centrului. Ecuaţia redusă este

$$\frac{X^2}{\frac{a^2(1+m^2)(m-1)^2}{(m^2-m+1)^2}} - \frac{Y^2}{\frac{a^2(1+m^2)(m-1)^2}{m(m^2-m+1)}}. \qquad (3)$$

Avem $\delta = AC - B^2 = -m(m^2-m+1)$, al cărei semn e dat de m, celalt factor având rădăcini imaginare. Deci, dacă $m>0$, $\delta<0$, iperbole; $m<0$, $\delta>0$, elipse; $m=0$, $\delta=0$, două drepte, axa Ox şi $y=2a$.

Pentru *determinarea focarelor* sunt mai multe metode. Se ştie că focarul (α, β) este un punct din care tangentele duse la conică sunt drepte izotrope. Se exprimă deci că dreapta

$$y-\beta = i(x-\alpha),\ i=\sqrt{-1},$$

este tangentă la conica (1). Se obţin ecuaţiile [1])

$$4Bf(\alpha,\beta) = f'_\alpha f'_\beta\ ,\quad B(f'^2_\alpha - f'^2_\beta) = (A-C)f'_\alpha f'_\beta.$$

Inlocuind pe α şi β cu x şi y, prima este în cazul nostru iperbola

$$(m^2-m+1)xy + a(m-1)x - am(m-1)y + a^2(m-1)^2 = 0. \qquad (4)$$

A doua este ecuaţia axelor.

Coeficienţii unghiulari ai axelor [2]) sunt rădăcinile ecuaţiei în λ,

$B\lambda^2 + (A-C)\lambda - B = 0$, care este $m\lambda^2 - (m^2-1)\lambda - m = 0$,

de unde

$$\lambda_1 = -\frac{1}{m}\ ,\quad \lambda_2 = m.$$

Ecuaţiile axelor se obţin scriind dreptele care trec prin centru şi au coeficienţii unghiulari λ_1, λ_2. Sau, sunt ecuaţiile $f'_x + \lambda f'_y = 0$, înlocuind pe λ cu λ_1 şi λ_2. Avem.

$$x+my=0,\ m(m^2-m+1)x-(m^2-m+1)y-a(m-1)(m^2+1)=0, \qquad (5)$$

axa care trece prin O şi cea perpendiculară pe aceasta.

---

1) Se găsesc mai simplu, cu altă metodă. N. ABRAMESCU, Lecţiuni de Geometrie Analitică, ed. III, 1944, p. 169.

2) N. ABRAMESCU, Lecţiuni de Geometrie Analitică, ed. III, 1944, p. 152.

Rezolvând ecuaţia (4) şi prima din (5), avem

$$x = \frac{-a(m-1)}{m^2-m+1}\left[-m \pm \sqrt{m(m^2+1)}\right],$$

$$y = \frac{a(m-1)}{m(m^2-m+1)}\left[-m \pm \sqrt{m(m^2+1)}\right] \quad (6)$$

coordonatele focarelor situate pe axa ce trece prin vârful O.

Din (4) şi a doua din (5), obţinem

$$x = \frac{a(m-1)}{m(m^2-m+1)}\left[m^2 \pm \sqrt{-m(m^2+1)}\right],$$

$$y = \frac{a(m-1)}{m^2-m+1}\left[-1 \pm \sqrt{-m(m^2+1)}\right], \quad (7)$$

coordonatele focarelor situate pe axa perpendiculară pe cea care trece prin O.

Dacă $m > 0$, conicele (1) sau (3) sunt iperbole, focarele reale (6) sunt pe axa ce trece prin O. Când $m < 0$, conicele sunt elipse, focarele reale (7) sunt pe axa perpendiculară pe cea care trece prin O.

Ecuaţiile directoarelor se obţin pornind dela ecuaţia focală a conicelor

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = kmx - ky + \lambda)^2, \quad (8)$$

unde (x_1, y_1) sunt coordonatele focarelor (6), iar directoarea $kmx - ky + \lambda = 0$ este perpendiculară pe axa $x + my = 0$. Punând condiţia ca conica (8) să treacă prin O, P(0, 2a), Q(2a, 0), găsim

$$k = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \lambda = \frac{a(m-1)\left[m \pm \sqrt{m(m^2+1)}\right]\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{m}(m^2-m+1)},$$

şi ecuaţiile directoarelor (în cazul iperbolelor) corespunzătoare focarelor (6) sunt

$$mx - y + \frac{a(m-1)\left[m \mp \sqrt{m(m^2+1)}\right]\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{m}(m^2-m+1)} = 0. \quad (8_1)$$

Directoarele se mai puteau obţine, considerându-le ca polarele focarelor în raport cu conica.

Mai *putem avea focarele* (α, β) *și directoarele* $lx+my+n=0$, scriind că avem identic

$$f(x, y)= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \equiv S[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (lx + my + n)^2]$$

sau că $H(x, y) = f(x, y) - S[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]$ este patratul unui polinom de gradul întâiu în x și y, care egalat cu zero dă directoarea. Se anulează identic realizantul lui $H(x, y)$, considerat ca polinom de gradul al doilea în y. Acest realizant este un polinom de gradul al doilea în x, și anulând coeficienții lui x^2, x și cel independent, obținem

$$B^2 = (A-S)(C-S), \quad B(E+\beta S) = (D+\alpha S)(C-S) \quad (9) \text{ și } (10)$$

$$(E+\beta S)^2 = [F - S(\alpha^2 + \beta^2)](C-S). \quad (11)$$

Valoarea lui β din (10) se înlocuește în (11), care se rezolvă în raport cu α, luând semnul + înaintea radicalului. Se înlocuește apoi S din (9), luând

$$S = \frac{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2} \quad (12)$$

și se obține

$$\alpha = \frac{-(BE-CD)\sqrt{C - A + \sqrt{(A-C)^2+4B^2}} + B\sqrt{2\Delta}}{(B^2-AC)\sqrt{C - A + \sqrt{(A-C)^2+4B^2}}}, \quad (13)$$

unde am presupus

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} > 0.$$

Inlocuind S și α din (12) și (13) în valoarea lui β din (10), avem

$$\beta = \frac{2(AE - BD) + \sqrt{2\Delta}\sqrt{C - A + \sqrt{(A-C)^2+4B^2}}}{2(B^2-AC)}. \quad (14)$$

Se înlocuește α, β, S din (13), (14), (12), în $H(x, y)$, și se obține patratul ecuației directoarei corespunzătoare focarului (α, β), și ecuația directoarei este

$$\left.\begin{aligned} &B[A + C + \sqrt{(C-A)^2+4B^2}]x + [C^2 - AC + 2B^2 + C\sqrt{(C-A)^2+4B^2}]y \\ &+ 2BD + [C - A + \sqrt{(C-A)^2+4B^2}]E \\ &- \sqrt{2\Delta}\sqrt{C - A + \sqrt{(C-A)^2+4B^2}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dacă $\Delta < 0$, luăm

$$S = \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2},$$

şi avem

$$\alpha = \frac{-(BE-CD)\sqrt{A - C + \sqrt{(A-C)^2+4B^2}} - B\sqrt{-2\Delta}}{(B^2-AC)\sqrt{(A-C)+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}} \tag{16}$$

$$\beta = \frac{2(AE-BD) + \sqrt{-2\Delta}\sqrt{(A-C)+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}}{2(B^2-AC)} \tag{17}$$

iar directoarea

$$\left.\begin{aligned} &B\left[-A-C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right]x + \left[-2B^2+AC-C^2+C\sqrt{(C-A)^2+4B^2}\right]y \\ &+ E\left[A - C + \sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right] - 2BD \\ &+ \sqrt{-2\Delta}\sqrt{A - C + \sqrt{(A-C)^2+4B^2}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

In (13), (14), (15) şi (16), (17), (18), schimbând semnul coeficientului lui $\sqrt{2\Delta}$, respectiv $\sqrt{-2\Delta}$, avem al doilea focar cu directoarea corespunzătoare.

3°. *Locul centrelor* se obţine eliminând m între ecuaţiile (2), considerând şi $x + my = 0$ (Nr. 2°), şi avem elipsa

$$x^2 + xy + y^2 - a(x + y) = 0,$$

cu centrul în $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

4°. *Locul vârfurilor situate pe axa ce trece prin O.* Am văzut la 2° că ecuaţiile axelor sunt date de (5); Eliminând m între prima ecuaţie (5) şi (1), se obţine locul vârfurilor situate pe această axă, elipsa

$$x^2 + xy + y^2 - 2a(x + y) = 0,$$

după ce am suprimat pe $x^2 + y^2$.

5°. *Locul intersecţiei directoarelor cu axa ce trece prin O.* Punând $m = -\operatorname{cotg}\theta$, coeficienţii ecuaţiei conicei (1) devin

$$\left.\begin{aligned} &A = \cos\theta(\sin\theta + \cos\theta),\ B = \sin\theta\cos\theta,\ C = \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta), \\ &D = -aA,\ E = -aC,\ F = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\Delta = -a^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)^2,\quad \delta = AC - B^2 = \sin\theta\cos\theta(1 + \sin\theta\cos\theta).$$

E destul să luăm $O \leqq \theta \leqq \pi$, fiindcă A, ... F din (19) nu se schimbă când înlocuim θ cu $\pi + \theta$. *Să presupunem* $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$, conicele (1) sunt iperbole. Avem $\Delta > 0$ şi (16), (17), (18) dau coordonatele focarului

$$x = a\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}}{1+\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}},$$

$$y = a\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta}\,\frac{\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}}{1+\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}} \qquad (20)$$

şi directoarea corespunzătoare

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}}. \qquad (21)$$

Schimbând în (20) şi (21) semnul lui $\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}$, avem al doilea focar şi directoarea lui. Axa reală a iperbolelor considerate este $y = x\,\mathrm{tg}\theta$. Scriind ecuaţia directoarei sub forma

$$(x\cos\theta + y\sin\theta)\sqrt{-\sin\theta\cos\theta} = a(\sin\theta+\cos\theta) - (x\cos\theta + y\sin\theta),$$

ridicând la patrat şi înlocuind pe $\mathrm{tg}\theta$ cu $\frac{y}{x}$, avem locul intersecţiei directoarei cu axa reală,

$$xy(x^2+y^2) + [x^2+y^2 - a(x+y)]^2 = 0,$$

o cuartică simetrică în raport cu prima bisectoare. Rezolvând ecuaţia axei şi directoarei (21), avem reprezentarea parametrică a curbei

$$x = a\cos\theta\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}}\ ,\quad y = a\sin\theta\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}}.$$

Avem $x\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = y(\pi-\theta)$ şi de aci urmează schimbând pe θ în $\frac{\pi}{2} - \theta$ că e destul să facem ca $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$ şi să luăm simetrica faţă de bisectoarea întâia.

Se anulează numărătorii lui $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$, prin izolarea lui $\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}$ şi se obţine respectiv

$$2\sqrt{-\sin\theta\cos\theta} = f_1(\theta)\ ,\quad 2\sqrt{-\sin\theta\cos\theta} = f_2(\theta).$$

Se studiază variaţia funcţiilor $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, luând ca variabilă $\operatorname{tg}\theta = u$ şi avem tablourile unde $\operatorname{tg}\gamma = -(1+\sqrt{3}) + \sqrt{3+2\sqrt{3}}$ este o valoare θ_1 pentru care $\frac{dx}{d\theta} = 0$, dar $\frac{dy}{d\theta} < 0$.

θ	$\frac{\pi}{2}$	γ	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$	$+$ 0
$f_1(\theta)$	$0\searrow$	m	$\nearrow \pm\infty \nearrow$	-1
$f_2(\theta)$	1	$+0-$		$-$ 0
$f_2(\theta)$	$-1\nearrow M\searrow$			$-$ 1

θ	$\frac{\pi}{2}$	θ_1	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	$-$	0	$+$
x	$0\searrow$	x_1	$\nearrow 0$
$\frac{dy}{d\theta}$	$-$		$-$
y	$a\searrow$	y_1	$\searrow 0$
$\frac{dy}{dx}$	∞	∞	-1
Puncte	A	B	O

Pentru cealaltă directoare, luăm $-\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}$, se consideră semnul —. Sunt două valori θ_2 şi θ_3 cu tabloul

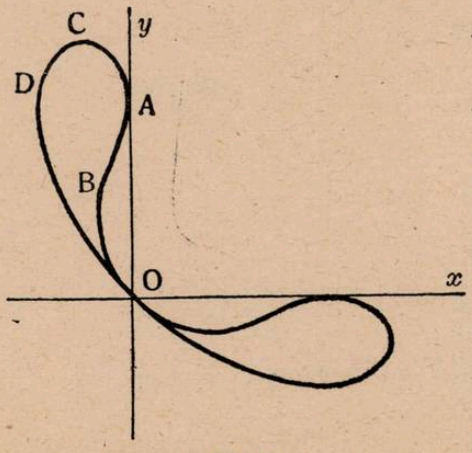


Fig. 1.

θ	$\frac{\pi}{2}$	θ_2	θ_3	$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$	$-$	$-$	0	$+$
x	$0\searrow$	$x_2\searrow$	$x_3\nearrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	0	$-$	$-$
y	$a\nearrow$	$y_2\searrow$	$y_3\searrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	0	∞	-1
Puncte	A	C	D	O

6°. *Locul focarelor.* Ecuațiile (20) dau reprezentarea parametrică a locului focarelor iperbolelor. Ridicând la patrat valoarea lui $\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}$ din prima din ecuațiile (20), și apoi înlocuind pe $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ dedusă din (20), obținem ecuația locului focarelor iperbolelor

$$[xy - a(x+y)]^2 + xy(x^2+y^2) = 0,$$

o cuartică simetrică în raport cu prima bisectoare. Se consideră reprezentarea parametrică (20), se anulează numărătorul lui $\frac{dx}{d\theta}$, prin izolarea lui $\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}$ și avem

$$\varphi(\theta) = 2\sqrt{-\sin\theta\cos\theta} = -1 + \sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta - \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} = f(\theta).$$

Se studiază variația funcțiilor $f(\theta)$ cu variabila $\operatorname{tg}\theta$, și $\varphi(\theta)$, calculând $f'(\theta)$, $f''(\theta)$ și se obține tabloul

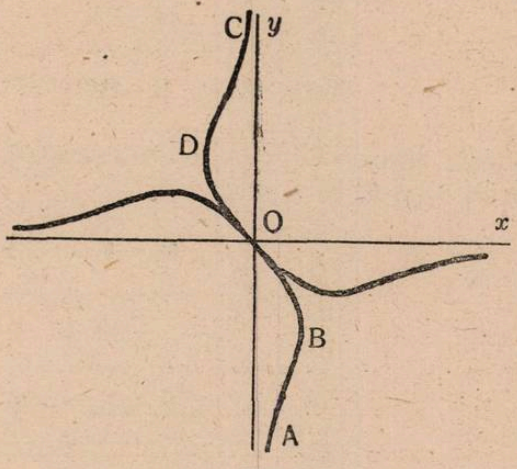


Fig. 2.

θ	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$
$f'(\theta)$		—	0
$f(\theta)$	∞	↘	-2
$\varphi'(\theta)$		+	
$\varphi(\theta)$	0	↗	$\sqrt{2}$

Numărătorul lui $\frac{dy}{d\theta}$ se scrie

$$\sin\theta\left(1 + \sqrt{-\sin\theta\cos\theta}\right)^2 = \cos^2\theta(2\sin\theta + \cos\theta).$$

Cum $2\sin\theta + \cos\theta > 0$, $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$, $\frac{dy}{d\theta}$ nu se anulează. Avem

o valoare θ' în tablou. Pentru al doilea focar luăm $-\sqrt{-\sin\theta\cos\theta}$ şi avem altă valoare θ''. Obţinem tablourile şi curba (fig. 2).

θ	$\frac{\pi}{2}$		θ'		$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	x'	$\searrow$	0
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y'	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞				-1
Puncte	A		B		O

θ	$\frac{\pi}{2}$		θ''		$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$	x''	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$		$-$	
y	∞	$\searrow$	y''	$\searrow$	0
$\frac{dx}{dy}$	∞		∞		-1
Puncte	C		D		O

7°. *Infăşurătoarea axei perpendiculară pe cea care trece prin* O. (în cazul iperbolelor). Din a doua din ecuaţiile (5) avem axa perpendiculară pe cea care trece prin O,

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a\frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta\cos\theta}. \tag{22}$$

Punând $\operatorname{tg}\theta = t$, această ecuaţie se scrie

$$(y-a)\,t^3 + (x+y-a)\,(t^2+t) + x - a = 0 \tag{23}$$

şi derivata în raport cu t este

$$3\,(y-a)\,t^2 + (x-y-a)\,(2t+1) = 0. \tag{24}$$

Din aceste ecuaţii deducem

$$x = a\frac{1+2t+3t^2}{(1+t+t^2)^2}\ ,\quad y = at^2\frac{3+2t+t^2}{(1+t+t^2)^2} \tag{25}$$

reprezentarea parametrică a înfăşurătoarei axei imaginare a iperbolelor (1). Eliminând pe t între (23) şi (24), avem ecuaţia carteziană

$$3\,(x^2-xy+y^2)^2 + 2a\,(x+y)\,(x^2-7xy+y^2) + 3a^2\,(x^2+14xy+y^2) - \\ - 24a^3\,(x+y) + 16a^4 = 0.$$

Considerăm (25), şi avem (fig. 3)

$$\frac{dx}{dt} = -6at^2\frac{1+t}{(1+t+t^2)^2},\quad \frac{dy}{dt} = 6at\frac{1+t}{(1+t+t^2)^2},\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t}.$$

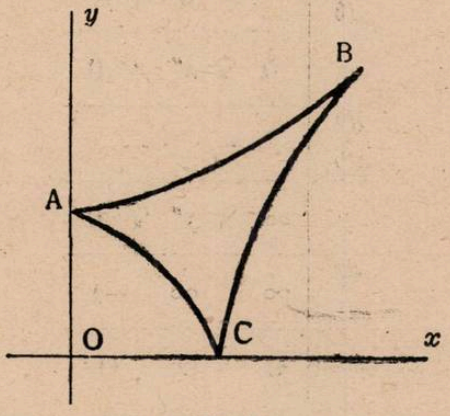


Fig. 3.

t	$-\infty$	-1	0	∞
$\frac{dx}{dt}$		$+\ 0$	$-0-$	
x	0	$\nearrow 2a$	$\searrow a$	$\searrow 0$
$\frac{dy}{dt}$		$+\ 0$	$-0+$	
y	a	$\nearrow 2a$	$\searrow 0$	$\nearrow a$
$\frac{dy}{dx}$	0	1	∞	0
Puncte	A	B	C	A

Să presupunem $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, *conicele* (1) *sunt elipse.* Coordonatele focarelor şi directoarelor sunt

$$x = a\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}\,\frac{\cos^2\theta \pm \sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1+\sin\theta\cos\theta},$$

$$y = a\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{\sin^2\theta \mp \sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1+\sin\theta\cos\theta},\quad x\sin\theta - y\cos\theta = a\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\pm\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}.$$

Se pot construi curbele cerute în enunţ, cu acelaşi procedeu ca la punctele precedente.

Au rezolvat problema d-nii: D. RIPIANU şi E. WEGENER. D-l RIPIANU a făcut reprezentarea parametrică, a obţinut ecuaţiile curbelor, reprezentările lor parametrice, construcţiile, lungimile şi ariile curbelor.

N. A.

PROBLEMA 5851. *Să se rezolve sistemul:*

$$x^y = y^z, \quad xy = a^z.$$

A. D. DOBRESCU.

Soluție. A doua ecuație arată că trebue să punem:

$$x = a^u \quad , \quad y = a^v.$$

Urmează:

$$z = u + v$$

iar prima ecuație a sistemului se scrie:

$$(a^u)^{a^v} = (a^v)^{u+v} \quad \text{sau} \quad a^{ua^v} = a^{v(u+v)}.$$

Deducem:

$$ua^v = v(u + v),$$

de unde scoatem:

$$u = \frac{v^2}{a^v - v}.$$

Rezultă că soluțiile sistemului dat, în funcție de un parametru v, sunt:

$$x = a^{\frac{v^2}{a^v - v}} \quad , \quad y = a^v \quad , \quad z = \frac{v \cdot a^v}{a^v - v}.$$

A dat soluție precedentă d-l GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Național „Carol I", Craiova).

A. DOBRESCU.

PROBLEMA 6112. *Să se arate că sistemul de ecuații*

$$x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a \quad , \quad x \sin 2a + y \sin 3a = \sin 4a$$

$$x \cos a + y \cos 2a = \cos 3a$$

este compatibil. Să se rezolve.

I. I. STAMATE.

Considerăm ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a \\ \sin 2a & \sin 3a \end{vmatrix} = -\sin^2 a \neq 0$$

adică presupunem $a \neq k\pi$, $(k = 0, 1, 2..)$. Determinantul caracteristic este

$$C = \begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin 2a & \sin 3a & \sin 4a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \end{vmatrix}.$$

Adunând elementele coloanei a 3-a la elementele coloanei 1-a şi transformând sumele în produse se găseşte că coloana 1-a este proporţională cu a 2-a, deci $C = 0$. Sistemul este prin urmare compatibil. Rezolvând primele două ecuaţii se deduce.

$$x = -1 \quad , \quad y = 2\cos a.$$

Soluţii bune au fost date de D-nii: M. A. BARBAIANI, C. C. DIACONU, M. A. LEON (Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti), I. A. BARBU (bacalaureat), GH. D. BRAŞOVEANU (Col. Naţional Craiova), CR. I. CANTUNIAR, P. D. COLUMBEANU (absolvent Bucureşti), M. R. CONSTANTINESCU (Liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploieşti), C. CORDUNEANU, V. GH. DIACONU, I. T. MUNTEANU, C. ROŞU (Col. Naţional Predeal), M. D. COTARIU (student Politehnica din Bucureşti), SORIN F. DUMITRESCU, I. FL. FILIMON (Liceul „Decebal" Deva), GH. A. GRIGORE (Bacalaureat), CPT. M. GRUMĂZESCU, MARINEL MARINESCU, (absolvent Predeal); AL. GH. MORAITE, M. V. SOARE (Col. Naţ. „Sf. Sava" Bucureşti); GH. M. NICOLAE (Col. „Carol I" Craiova); V. D. PĂLĂCEANU (Şc. Ofiţeri Geniu); L-T. C. V. PANTELIMON, M. D. PETCULESCU (Pogoanele), MARCEL C. V. POPA, P. A. STANCIU, C-TIN TĂNĂSESCU, CTIN TINCU (Politehnica Timişoara), EUGEN WEGENER (student Politechnica Bucureşti), G. D. STĂNILĂ (Liceul „B. P. Haşdeu", Buzău), M. G. IOSIFESCU (Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti).

D-l A. I. VARGĂ (Student Politehnica Bucureşti) rezolvă şi următorul sistem

$$x\sin a_n + y\sin a_{n+1} = \sin a_{n+2} \quad , \quad x\sin a_{n+1} + y\sin a_{n+2} = \sin a_{n+3}$$

$$x\cos a_n + y\cos a_{n+1} = \cos a_{n+2}$$

unde a_n, a_{n+1}, a_{n+2} sunt trei arce în progresie aritmetică $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ găseşte $x = -1$, $y = 2\cos r$ unde $r = a_{n+1} - a_n$ adică raţia progresiei.

EXERCIŢII

4. *Să se demonstreze că*

$$\left[\frac{\cos 2k(a-b) + \cos 2k(b-c) + \cos 2k(c-a) + 1}{\sin 2k(a-b) + \sin 2k(b-c) + \sin 2k(c-a)}\right]^n = \operatorname{cotg}^n k(b-a)\operatorname{cotg}^n(c-b)\operatorname{cotg}^n(a-c)$$

unde k *şi* n *sunt numere oarecare.*

MAIOR E. ST. IACOB.

R. Identităţile

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

se ridică la puterea n apoi se împart una prin alta şi se face substituţia

$$\alpha=2k(b-c)\ ,\ \beta=2k(c-a)\ ,\ \gamma=2k(a-b).$$

5. *Să se demonstreze că dacă avem*

$$\frac{x_1^m}{a_1^m}+\frac{x_2^m}{a_2^m}+\frac{x_3^m}{a_3^m}+\ldots+\frac{x_n^m}{a_n^m}=1$$

atunci avem şi

$$(a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m)-(x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m)=$$

$$\frac{x_1^m(a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m)}{a_1^m}+\frac{x_2^m(a_1^m+a_3^m+\ldots+a_n^m)}{a_2^m}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_n^m(a_1^m+a_2^m+\ldots+a_{n-1}^m)}{a_n^m}.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Avem succesiv

$$\frac{x_1^m(a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m)}{a_1^m}=\frac{x_1^m(a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m+a_1^m)}{a_1^m}-\frac{a_1^m x_1^m}{a_1^m}$$

$$\frac{x_2^m(a_1^m+a_3^m+\ldots+a_n^m)}{a_2^m}=\frac{x_2^m(a_1^m+a_3^m+\ldots+a_n^m+a_2^m)}{a_2^m}-\frac{a_2^m x_2^m}{a_2^m}$$

. . . . . .

Adunând aceste egalităţi şi ţinând seamă de prima condiţie din enunţ se găseşte egalitatea de demonstrat.

6. *Să se arate că între elementele unui triunghiu avem:*

$$\Sigma a^3(2p-a)^3-\Sigma a^3b^3=(p^2+r^2+4Rr)^3-96R^2S^2.$$

MAIOR E. ST. IACOB.

R. Identitatea [1]

$$\Sigma x^3(y+z)^3=(\Sigma xy)^3+\Sigma x^3y^3-6x^2y^2z^2$$

facem $x=a\ ,\ y=b\ ,\ z=c$

şi ţinem seama de relaţiile cunoscute

$$a+b+c=2p\ ,\ ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr\ ,\ abc=4RS.$$

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLV, pag. 38.

7. *Dacă* $0 < \alpha < 90^0$ *atunci*

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^3 + (1 + \sin\alpha)^2 \cos\alpha + (1 + \cos^2\alpha) \sin\alpha > 4\sin 2\alpha.$$

† T. STOICESCU.

R. Se trece $4\sin 2\alpha$ în membrul I şi se găseşte

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - 1)^2 \cos\alpha + (\cos\alpha - 1)^2 \sin\alpha > 0$$

căci în limitele din enunţ atât $\cos\alpha$ cât şi $\sin\alpha$ sunt pozitivi.

8. *Între elementele unui triunghiu avem*

$$\Sigma\ (\sin A + \sin B + \sin C)^3 = \frac{p\,(p^2 - 3r^2 - 6Rr)}{4R^3}.$$

MAIOR E. ST. IACOB.

R. Se pleacă de la identitatea

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3\,(x+y)\,(y+z)\,(z+x)$$

în care se pune

$$x = \sin A + \sin B - \sin C\ ,\ y = \ldots$$

şi se ţine seama de $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \ldots$

PROBLEME PROPUSE

6280. Pot exista două numere de câte două cifre astfel încât, indicatorul primului să fie egal cu răsturnatul celui de al doilea, iar indicatorul celui de-al doilea să fie egal cu răsturnatul primului?

† I. LINTEŞ.

6281. Fie α un punct pe latura BC a triunghiului ABC înscris în cercul O şi M, N intersecţiile acestui cerc cu o dreaptă trecând prin α. Paralelele duse din α respectiv la AM şi AN taie laturile CA, AB respectiv în B_m, C_m şi B_n, C_n.

Să se demonstreze că:

1°. Patrupunctele A, M, B_n, C_n şi A, N, B_m, C_m sunt inscriptibile în cercurile (O_m) şi (O_n);

2°. Cercurile O_m şi O_n se întâlnesc în P pe MN;

3°. Dreptele AP şi BC sunt paralele.

P. P. DRĂGHICESCU.

6282. Fie pe un cerc patru puncte A, B, C, D. Cercurile construite pe AB, BC, CA, DA ca diametre se taie a doua oară succesiv în B', C', D', A'.

Să se arate că punctele A', B', C', D' sunt conciclice.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6283. Pe dreptele care unesc vârfurile A, B, C, D ale unui tetraedru cu un punct arbitrar O şi care străbat feţele opuse ale tetraedrului în A', B', C', D' se iau punctele α, β, γ, δ aşa încât:

$$\frac{A'\alpha}{AA'} = \frac{B'\beta}{BB'} = \frac{C'\gamma}{CC'} = \frac{D'\delta}{DD'} = k.$$

Să se arate că volumul tetraedrului $\alpha\beta\gamma\delta$ este dat de

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = -k^2(2k+1)\,\overline{ABCD} + (k+1)^2(2k+1)\,\overline{A'B'C'D'} - k(k+1)^2 \Sigma\, \overline{AB'C'D'}.$$

V. THÉBAULT.

6284. Să se arate că:

1°. Relaţiunea

$$\begin{vmatrix} Sa^2 & Saa' \\ Sa'a & Sa'^2 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă condiţiunea necesară şi suficientă ca sistemul de ecuaţiuni

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \quad , \quad ax + by + cz + dt = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d't = 0$$

să admită un sistem dublu de soluţiuni.

2°. Relaţiunea

$$\begin{vmatrix} Sa^2 & Saa' & Saa'' \\ Sa'a & Sa'^2 & Sa'a'' \\ Sa''a & Sa''a' & Sa''^2 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă condiţiunea necesară şi suficientă ca sistemul de ecuaţiuni

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 = 0 \quad , \quad ax + by + cz + dt + eu = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d't + e'u = 0 \ , \ a''x + b''y + c''z + d''t + e''u = 0$$

să admită un sistem dublu de soluţiuni.

Simbolul S, reprezintă ca deobiceiu, sumă de termeni analogi. Astfel: $Saa' = Sa'a$ reprezintă la 1°:

$$Saa' = Sa'a = aa' + bb' + cc' + dd'$$

şi la 2°:

$$Saa' = Sa'a = aa' + bb' + cc' + dd' + ee'.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

6285. C_p^q fiind simbolul combinărilor, se cere să se rezolve în raport cu n, ecuațiile

$$C_n^p = m\, C_n^{p-2} \quad \text{și} \quad C_n^p = m\, C_{n-2}^{p-2},$$

determinând forma întregului m așa încât soluțiile să fie acceptabile.

ANDREI DOBRESCU.

6286. Notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu, să se arate că avem:

$$3R - p < R\,[\cos A + \cos B + \cos C] < 3R + p.$$

EMILIAN MEREUȚĂ.

6287. Cercurile (O_1) și (O_2) sunt tangente interior în A. Prin A se duc dreptele Δ, Δ' simetrice față de O_1O_2. Δ întâlnește cercurile respectiv în B_1, B_2, iar Δ' le întâlnește în C_1, C_2. Perpendiculara din B_1 pe O_1O_2 întâlnește în M perpendiculara din B_2 pe AB_2. Perpendiculara din C_2 pe O_1O_2 întâlnește în N perpendiculara în C_1 pe AC_1.

Se cere locul geometric al mijlocului segmentului MN.

MIRCEA V. SOARE.

6288. Se dau punctele fixe A, B și dreapta fixă Δ trecând prin A. Fie C un punct mobil pe Δ. Cercul cu centrul în B și cu raza BC taie pe AB în D și D'.

Să se găsească locurile centrelor cercurilor ACD și ACD'.

G-L GH. BUICLIU.

6289. Dintr'un punct A se lasă să cadă liber o greutate de 20 grame care atinge solul după 2 secunde.

Dacă la jumătatea distanței dintre punctul A și sol se așează o placă orizontală de sticlă, și lăsăm din nou greutatea să cadă liber din B, aceasta trece prin placa de sticlă și ajunge la sol în 2,5 secunde.

Să se calculeze energia cinetică pierdută prin spargerea sticlei.

Rezistența aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Boaian Dan (6222); *Boerescu I. N. C.* (4104, 6074, 115, 67, 94, 203, 05, 06, 13, 19, 25, 28, 30, 31, 33, 38, 42, 49, 60, 61, 62, E, P); *Cătuneanu N. Vladimir* (6262, 64); *Cernescu A. P.* (4520, 631, 6083, 105, 201, 22, 33, 62, 64, P); *Columbeanu D. P.* (6233); *Constantinescu N. Ilie* (E, P); *Constantinescu R. M.* (5547, 620, 24, 6223, 42, 57, 62, 67, E, N, P); *Corduneanu C.* (E); *Crăciunescu E.* (P); *Diaconu C. C.* (P); *Doneaud E. A.* (6182, 206, 33); *Eftode M. Ad.* (6225, 30); *Firescu Gr. St.* (6173, 225, 33, 62); *George M. Nicolae* (6155, 71, 73, 87, 200); *Georgescu Răducan* (A, P); *Haret Spiru R.* (6133, 82, 84); *Hangan M. Sanda* (6182, 200, 01); *Iosifescu G. M.* (6083, 84, 88, 112, 233, 38); *Mihalache Const.* (6111, 222, 25); *Mihălcioiu M.* (5999, 6206, 42); *Nedelcu Fl. Mariana* (P); *Novac I. I.* (5924, 30, 6155, 94, 227, 42, 57); *Pintilie A. Dan* (6242, P); *Pizanca N. I.* (6261, E); *Puşcaşu M. Silviu* (6166, 97, 238, E); *Stanciu I. Valeriu* (3741, 4087, 5792, 6036, 86, 201, 22, P); *Stănilă Gh.* (6112, 206, 33); *Teodorescu P. P.* (5704, 950, 99, 6005, 06, 77, 97, 106, 16, 41, 42, 74, 82, 201, 04, 08, 23, 30, 33, 60, 61, 62, 65, 70, E, N, P); *Udrea C. I.* (5355, 561, 999, 6005); *Vasiliu Mircea* (5572, 6101, 05); *Wegener N. E.* (4169, 5744, 864, 984, 6094, 223, 27, 33, 42, 47).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 50 (cincizeci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 20.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 2.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XII, XIV, XVI, XVII, XVIII şi IX sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 8 500

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 4.500

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 4.500

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 12.500

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 8.500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 3.500

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 5.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 14.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 7.500

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 7.700

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 5.700

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII — IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 6 900

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI - XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 3 900

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 9.500

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 7.500

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul achitat până la 25 Decembrie 1946 este de 20.000 lei Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Decembrie 1946.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 10.000 lei pentru abonamentele plătite până la 31 Decembrie 1946. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Decembrie 1946.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 38.835.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 3. — NOEMBRIE 1946

SUMARUL

1. Asupra triunghiului pseudo-isoscel . . *H. M. Bodnărescu.*
2. Un extras din aritmetica lui Caspar Schott tipărită la Cluj . . . . . *Victor Marian.*
3. Raport pentru decernarea premiului „V. Conta". . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 5—6.
5. Bibliografie.
6. Diverse
7. Probleme rezolvate: 2539, 4490, 5701, 5886, 6115, 6194, 6225.
8. Exerciţii: 9.
9. Probleme propuse: 6280, 6290—6299.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1946

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele două şedinţe lunare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 25 Noemvrie, ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 4.

Luni 9 Decemvrie, ora 17: Adunarea Generală Extraordinară şi facerea copertei pentru Nr. 4.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 100

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 4.500

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *«Gazetei Matematice»* . . . . . „ 10.000

ASUPRA TRIUNGHIULUI PSEUDO-ISOSCEL[1]

In anul 1894 în „*Intermédiaire des Mathématiciens*“ ALAUDO propune:

Dacă a, b, c sunt laturile, R *raza cercului circumscris şi* r_a *raza cercului exînscris corespunzător vârfului* A *în triunghiul* ABC *atunci:*

Dacă triunghiul ABC *are două bisectoare exterioare egale* ($\overline{CD} = \overline{BE}$) avem relaţia:

$$4Rr_a = a^2 + bc. \tag{1}$$

Se cerea o soluiie geometrică.

O soluţie pe bază de calcul este dată în aceeaşi revistă în anul 1895.

In *Mathesis* 1895 (pag. 261) SOONS arată că relaţia între laturile acestui triunghiu este:

$$a^3 - (b + c)\, a^2 + 3abc - bc\,(b + c) = 0 \tag{2}$$

şi apoi deduce încă formula (1).

I. NEUBERG dă alte patru formule caracteristice acestui triunghiu.

In *Mathesis* 1900 pag. 129, D-l A. EMMERICH pornind dela formulele ce dau valorile bisectoarelor în funcţie de *a, b, c* ajunnge la relaţia (2) şi apoi demonstrează relaţia (1) şi relaţia:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \tag{3}$$

din care deduce:

$$\overline{AI}^2 = \overline{BI} \cdot \overline{CI} \quad \text{şi} \quad \overline{II_a}^2 = \overline{II_b} \cdot \overline{II_c} \tag{4}$$

I, I_a, I_b, I_c fiind centrele cercurilor tritangente.

Apoi deduce:

$$\overline{AI} = r_a - r \quad , \quad \overline{II_a} = \frac{(r_a - r)^2}{r} \quad , \quad \overline{AI_a} = \frac{r_a (r_a - r)}{r}$$

---

1) Relativ la triunghiurile pseudo-isoscele a se vedea:

D. BARBILIAN. *Periodicitatea de ordin şase a triunghiurilor pseudo-isoscele*, G. M., Vol. L, pag. 171.

I. IONESCU. *Triunghiul cu două bisectoare egale*, G. M., Vol. LI, pag. 36, 250, 314.

P. S. Cererea 340, G. M., Vol. LI, pag. 602.

In *Mathesis* 1907 (pag. 184) I. NEUBERG face un istoric şi denumeşte triunghiu *pseudo-isoscel* triunghiul scalar având două bisectoare exterioare egale şi încă în general triunghiurile scalare pentru care egalitatea a două elemente este egalitatea acelor elemente impuse de simetria unui triunghiu isoscel.

In cele ce urmează voi demonstra pur geometric proprietăţile de mai sus adăugând la acestea alte proprietăţi noui caracteristice acestui triunghiu.

Fie ABC un triunghiu care are bisectoarele exterioare CD şi BE, egale.

Paralelele duse prin A la $\overline{CD}$ şi $\overline{BE}$ tae pe $\overline{BC}$ în A_b, A_c. $\overline{BK_b}$, $\overline{CK_c}$, $\overline{I_a K_i}$, H_1 fiind înălţimile triunghiului BCI_a şi ortocentrul acestui triunghiu, notăm intersecţiile:

$$K'_b(\overline{BK_b}\ ;\ \overline{AA_b})\ ;\ K'_c(\overline{CK_c}\ ;\ \overline{AA_c})\ ;\ G(\overline{AA_b}\ ;\ \overline{BE})\ ;\ G'(\overline{AA_c}\ ;\ \overline{CD}).$$

S'a demonstrat într'un mod complicat că $\overline{AI} = \overline{I_a H_1}$.

Voi demonstra în cele ce urmează geometric simplu această egalitate.

S însemnând suprafaţa avem:

$$2S_{ABC} = 2S_{BCE} - 2S_{BAE} = 2S_{CAD} - 2S_{CBD}.$$

Dar:

$$2S_{BCE} = BE \cdot CK_c.$$

Cum $\overline{AK'_c} \parallel \overline{BE}$ rezultă că distanţa dela A la $\overline{BE}$ este $\overline{K_c K'_c}$ deci

$$2S_{BAE} = \overline{BE} \cdot \overline{K'_c K_c} \text{ deci}$$

$$2S_{ABC} = 2S_{CBE} - 2S_{BAE} = \overline{BE}(\overline{CK_c} + \overline{K'_c K_c}) = \overline{BE} \cdot \overline{CK'_c}$$

analog deducem

$$2S_{ABC} = 2S_{CAD} - 2S_{CBD} = \overline{BD} \cdot \overline{BK'_b}$$

cum $\overline{BE} = \overline{CD}$ rezultă $\overline{CK'_c} = \overline{BK'_b}$.

Se ştie că unghiurile triunghiului $I_a BC$ sunt respectiv:

$$90^0 - \frac{A}{2}\ ;\ 90^0 - \frac{B}{2}\ ;\ 90^0 - \frac{C}{2}.$$

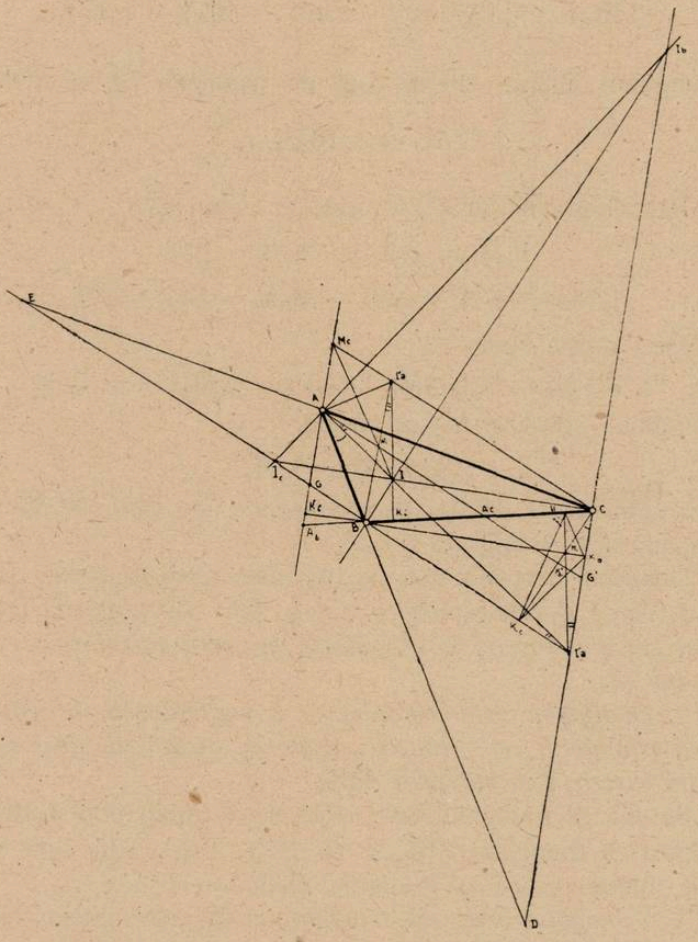
Avem egalitățile unghiulare

$$\sphericalangle K_c\, CI_a = \sphericalangle\, K_b\, BI_a = 90^0 - \left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

$$\therefore \qquad \sphericalangle\, K_c'\, CG' = \sphericalangle\, K_b'\, BG = \frac{A}{2}$$

deci triunghiurile dreptunghice $BK_b'G$ și $CK_c'G'$ sunt egale și

$$\overline{BG} = \overline{CG'}.$$



Paralelele din B și C respectiv la $\overline{CD}$ și $\overline{BE}$ taie pe $\overline{AA_c}$ și $\overline{AA_b}$ în M și M_c. Fie încă I_a' intersecția dreptelor $\overline{BM}$ și $\overline{CM_c}$. Consi-

derând paralelogramele $BI_aCI'_a$ şi BH_1CI deducem că I_a şi I sunt respectiv simetricele punctelor I_a şi H_1 faţă de mijlocul lui BC deci I este ortocentrul triunghiului BBI'_a. Fie $\overline{I'_aK'_i} \perp \overline{BC}$.

Avem: $\sphericalangle BI'_aK'_i = \sphericalangle CI_aH_1 = \frac{C}{2}$.

Se ştie că patrulaterul BI_aCI este inscriptibil deci

$$\sphericalangle BI_aI = \sphericalangle BCI = \frac{C}{2} \quad \text{dar:} \quad \sphericalangle BI_aI = \sphericalangle G'AI_a$$

(ca unghiuri alterne interne faţă de paralelele $\overline{BI_a}$ şi $\overline{AG'}$, deci

$$\sphericalangle G'AI_a = \sphericalangle BI'_aK'_i = \frac{C}{2}.$$

Paralelogramul $AM_bI'_aM_c$ este un romb căci:

$$\overline{I'_aM_c} = \overline{BG} \text{ şi } \overline{M_cA} = \overline{CG'}$$

$$\therefore \quad \overline{I'_aM_c} = \overline{M_cA} = \overline{AM_b} = \overline{M_bI'_a} = \overline{BG} = \overline{CG'}.$$

Deci putem scrie

$$\sphericalangle AI_aM_b = \sphericalangle I'_aAM_b \text{ deci şi } \sphericalangle AI'_aI = \sphericalangle I'_aAI$$

şi triunghiul AII'_a este isoscel având

$$\overline{AI} = \overline{II'_a} = \overline{I_aH_1}$$

şi încă: punctele I, M, M_c sunt colineare; dreapta $\overline{IMM_c}$ fiind perpendiculară pe mijlocul lui AI'_a.

Deducem deci următoarele (Δ_s însemnând triunghiul I_aBC).

1. *Dacă* I'_a *este simetricul lui* I_a *faţă de mijlocul lui* BC, *centrul cercului înscris* I *se găseşte pe perpendiculara pe mijlocul lui* AI'_a.

2. *Distanţele dela ortocentrul triunghiului* Δ_s *la vârfurile acestui triunghiu, sunt respectiv egale cu distanţele dela centrul cercului înscris* I *la vârfurile* ABC.

Se ştie că triunghiul ortic $K_iK_bK_c$ al triunghiului I_aBC este asemenea cu triunghiul BBC şi că I_aK_i, BK_b, CK_c sunt bisectoarele interioare acestui triunghiu. Deducem de aci că:

3. *Triunghiul ortic al triunghiului* Δ_s *este pseudo-isoscel.*

Dar I_a reprezintă centrul cercului exînscris triunghiului $K_iK_bK_c$ deci în baza teoremei (2) (şi ţinând seamă că $\overline{H_1K_i}$ reprezintă raza cercului înscris în triunghiul ABC) rezultă:

4. *Distanța dela centrul* I_a *al cercului exînscris la ortocentrul triunghiului* $I_a K_b K_c$ *este egală cu raza cercului înscris în triunghiul* ABC.

Deoarece I_a este simetricul lui I_a față de mijlocul lui $\overline{BC}$ și $\overline{I_a' M_b} = \overline{G' C}$ rezultă că simetricul lui M_b față de mijlocul lui $\overline{BC}$ este izotomicul lui G' față pe latura $\overline{I_a C}$ și analog simetricul lui M_c față de mijlocul lui $\overline{BC}$ este izotomicul lui G față de latura $\overline{BI_a}$. Cum H_1 este simetricul lui I față de mijlocul lui $\overline{BC}$ și deoarece punctele I, M_b, M_c sunt colineare rezultă că:

5. G *și* G' *fiind intersecțiile paralelelor duse prin* A *la cele două bisectoare exterioare* $I_a C$ *și* $I_a B$ *cu* $I_a B$ *și* $I_a C$; *dreapta ce unește izotomicele punctelor* G *și* G', *față de laturile respective ale triunghiului* Δ_s, *trece prin ortocentrul acestui triunghiu și este perpendiculară pe mijlocul segmentului ce unește* I_a *cu simetricul lui* A *în raport cu mijlocul lui* $\overline{BC}$.

Pe baza celor expuse ajungem pe cale geometrică la următoarele relații caracteristice triunghiului pseudo-isoscel. Cu notațiile folosite precedent deducem direct relațiile

$$\overline{AI} = \overline{I_a' I} = \overline{I_a' K_i'} - \overline{IK_i'} = r_a - r \quad \text{deci} \quad \overline{AI} = r_a - r \qquad (5)$$

Din $CA_c G' \sim CBI_a$ și $BA_b G \sim BCI_a$ deducem:

$$\frac{\overline{CI_a}}{\overline{CG'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA_c}} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{BI_a}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA_b}}$$

$$\overline{CI_a} \cdot \overline{CA_c} = \overline{CG'} \cdot \overline{CB} = \overline{BG} \cdot \overline{BC} = \overline{BI_a} \cdot \overline{BA_b} \quad \therefore \quad \frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}} = \frac{\overline{CA_c}}{\overline{BA_b}}.$$

Dar $\overline{AB} = \overline{BA_c} = c$ deci $\overline{CA_c} = a - c$ și analog

$$\overline{BA_b} = b - a \quad \therefore \quad \frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}} = \frac{a-c}{b-a}. \qquad (7)$$

Din asemănările triunghiurilor ABI și $BH_1 I_a$ deducem:

$$\frac{\overline{BI_a}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{I_a H_1}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{BH_1}}{\overline{AI}}.$$

Dar: $\overline{I_a H_1} = \overline{AI}$ și $\overline{BH_1} = \overline{CI}$

$$\therefore \frac{\overline{BI_a}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AI}} \quad \text{și analog:} \quad \frac{\overline{CI_a}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{AI}}$$

$$\therefore \quad \overline{BI} \cdot \overline{CI} = \overline{AI}^2 \quad \text{și} \quad \overline{BI_a} \cdot \overline{CI_a} = bc \qquad (7)$$

dar în orice triunghiu $\overline{AI} \cdot \overline{AI} = bc$ deci încă

$$\overline{BI_a} \cdot \overline{CI_a} = \overline{AI} \cdot \overline{AI_a}. \qquad (8)$$

Avem încă

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{CI_a}}{\overline{BI_a}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} = \frac{c\,(b-a)}{b\,(a-c)} . \tag{9}$$

Dar din $BIK_i' \sim CK_c' A_c$ și $CIK_i' \sim BK_b' A_b$ deducem:

$$\frac{\overline{CA_c}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{CK_c}}{\overline{BK_i'}} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{BA_b}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{BK_b'}}{\overline{CK_i'}} \quad \text{și cum} \quad \overline{BK_b'} = \overline{CK_c'}$$

rezultă:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{CA_c}}{\overline{BA_b}} \times \frac{\overline{BK_i}}{\overline{CK_i'}}$$

și ținând seamă că:

$$\overline{BK_i'} = \overline{CK_i} = p - b \quad \text{și} \quad \overline{CK_i'} = \overline{BK_i} = p - c \quad ; \quad \left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

rezultă:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} = \frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} \tag{10}$$

$$\therefore \quad \frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} = \frac{c\,(b-a)}{b\,(a-c)} \tag{11}$$

relație care arată legătura între laturile unui triunghiu pseudo-isoscel.

Se știe că fascicolul $(K_i'A,\ K_i'I,\ K_i'C,\ K_i'I_a)$ este armonic deci cum $\overline{I_a I_a'}$ este împărțită în părți egale de trei din razele acestui fascicol rezultă că $\overline{I_a I_a'} \,||\, \overline{K_i' A}$ deci putem scrie

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{II_a}} = \frac{\overline{IK_i'}}{\overline{II_a'}} = \frac{\overline{AI} + \overline{IK_i'}}{\overline{II_a} + \overline{II_a'}} \quad \text{sau} \quad \frac{r_a - r}{\overline{II_a}} = \frac{r}{r_a - r} = \frac{r_a}{\overline{AI_a}}$$

$$\therefore \quad \overline{II_a} = \frac{(r_a - r)^2}{r} \quad \text{și} \quad \overline{II_a} = \frac{r_a\,(r_a - r)}{r} . \tag{12}$$

Din triunghiurile ABC și $I_a BC$ putem scrie

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 2Rh_a$; $\overline{BI_a} \cdot \overline{CI_a} = \overline{II_a} \cdot \overline{I_a K_i}$ și cum $\overline{BI_a} \cdot \overline{CI_a} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ rezultă

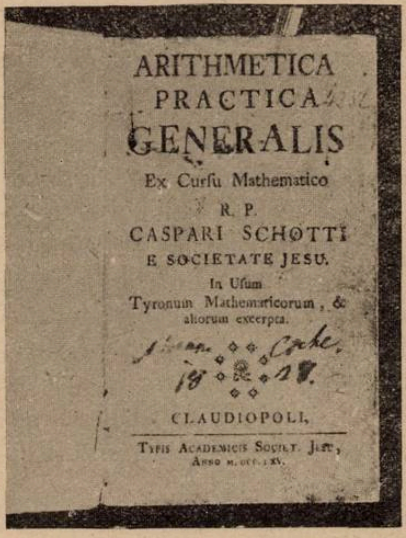
$$\overline{II_a} = 2R\frac{h_a}{r_a} = \frac{(r_a - r)^2}{r} = \frac{bc}{r_a} . \tag{13}$$

Relațiile (13), (7) și (12) sunt cunoscute, ele au fost demonstrate în cursul articolului pentru a păstra continuitatea expunerii și pentru a observa interpretarea lor geometrică.

Ing. HORIA M. BODNĂRESCU.

UN EXTRAS DIN ARITMETICA LUI CASPAR SCHOTT TIPĂRIT LA CLUJ

In veacul al XVIII-lea au apărut în Ardeal o seamă de cărți de matematici atât pentru uzul școlar cât și pentru cel privat. Cea mai mare parte din ele sunt scrise în latinește, altele în limba maghiară, germană sau română. Proporția mare de cărți latinești se explică prin aceea că pe atunci în școlile secundare și superioare învățământul se făcea în limba latină. Numărul cel mai mare de cărți de matematică a fost scos de universitatea iezuiților din Cluj, care avea o tipografie proprie. Ele sunt mai cu seamă retipăriri după autorii ordinului din străinătate, singura carte originală fiind *Elementa Mathematica* a lui MAXIMILIAN HELL, din 1755. După plecarea din Cluj a acestui matematician s'a revenit iarăși la metoda reeditărilor.


ARITHMETICA
PRACTICA
GENERALIS
Ex Curſu Mathematico
R. P.
CASPARI SCHOTTI
E SOCIETATE JESU.
In Uſum
Tyronum Mathematicorum, &
aliorum excerpta.
CLAUDIOPOLI,
TYPIS ACADEMICIS SOCIET. JESU,
ANNO M.DCC.LXV.

Astfel la zece ani după manualul lui HELL apare tot la Cluj o cărticică în 12⁰ cu titlul ARITHMETICA | PRACTICA | GENERALIS | *Ex Cursu Mathematico* | R. P. | CASPARI SCHOTTI | E SOCIETATE JESU | . | *In Usum* | *Tyronum Mathematicorum, &* | *aliorum excerpta.* | CLAUDIOPOLI, | TYPIS ACADEMICIS SOCIET. JESU, | ANNO M.DCC.LXV. După cum se vede din titlu cartea este un extras după un manual al lui CASPAR SCHOTT, profesor iezuit.

CASPAR SCHOTT s'a născut în 1608 la Königshofen, lângă Würzburg. A intrat în ordinul iezuiților și a predat morala și matematicele la Palermo, ajungând apoi profesor de matematici la gimnaziul din Würzburg, unde amurit în 1666.

SCHOTT o jucat în viața științifică a Germaniei același rol de intermediator între savanții epocei, ca și MARIN MERSENNE în Franța. Indeosebi sunt importante relațiile sale cu ATHANASIU

KIRCHER şi cu OTTO von GUERRICKE. Admirator al acestuia din urmă SCHOTT a publicat sub titlul *Mechanica hydraulico-pneumatica*, 1657, vestitele descoperiri ale lui GUERRICKE aspra presiunii aerului, cu învoirea acestuia, cu 15 ani înaintea autorului.

Lucrările de matematice pure ale lui SCHOTT sunt următoarele:

Cursus mathematicus seu absoluta omnium mathematicarum disciplinarum encyclopaedia in libros XXVIII digesta, Bamberg şi Frankfurt, 1661.

Mathesis Caesarea s. Amussis Ferdinandea ad problemata universae matheseos, ibidem, 1662.

Arithmetica practica generalis ac specialis, ibidem, 1663.

Organum mathematicum, ibid. 1668 (postum).

Extrasul dela Cluj are dimensiunile 136×80 mm şi cuprinde, împreună cu foaia de titlu, 60 de pagine. Pagina a doua e goală. Pagina 3 are un scurt *Proemium* (Introducere), în care se defineşte aritmetica şi diviziunile ei. „Sunt convins că ştiinţa aritmeticei, care se ocupă cu numerele, este necesară nu numai matematicienilor ci oricărui om. Ea se împarte în speculativă şi practică, aceasta iarăşi în generală şi specială. Cea specială se ocupă cu aplicaţia numerelor asupra anumitor lucruri. Iar cea generală se ocupă cu întrebuinţarea numerelor separate de orice lucru. Aceasta singură va fi expusă aici, şi cele cinci specii ale ei".

Cartea se împarte în şase capitole. Cap. I începe cu o definiţie a *numerelor întregi*. „Se numesc numere întregi acelea care nu sunt nici fracţii, nici nu au anexate fracţii" (p. 3). Cetitorul nerăbdător să ştie ce este o fracţie află în capitolul al doilea că: „Număr fracţionar (care se numeşte şi fracţie) este o parte, sau părţi împărţite în mod egal" (p. 33).

Revenind la Cap. I aflăm că el se ocupă cu operaţiile cu numerele întregi. La *numerotare* aflăm că numărul 7697432329089562436 se cetea astfel: „*Septem milliones millionum millionum, sexcenta nonaginta septem millia millionum millionum, quadringenti, & triginta duo milliones millionum, trecenta viginti novem millia millionum, octoginta novem milliones, quingenta, sexaginta, duo millia, quandringenta triginta sex*" (p. 6). Pentru a evita însă repetarea de atâtea ori a cuvântului milion spune că numărul de mai sus se va ceti: „*Septem trimilliones, sexcenta, nonaginta septem millia bimillionum, quadringenti triginta duo bimilliones,*

trecenta viginti novem millia millionum, octoginta novem milliones quingenta duo millia (sic) quadringenta triginta sex" (p. 7).

La *adunare* remarcăm proba de 9 care era în uz pe atunci, I. „*Elimină din toate numerele situate deasupra liniei de câte ori poți pe 9 considerând diversele cifre ca unități, adică unitățile cuprinse în fiecare: restul rămas sub 9 pune-l de o parte a crucii...*

II. *Fă aceeași operație cu numerele situate sub linie, pune restul sub 9 de cealaltă parte a crucii, dacă aceste resturi vor fi egale, operația a fost bună*" (p. 10). Aplicația metodei se poate vedea din exemplul de mai jos:

2324
4352 7 X 7.
6676

La scăderea amintește ca una din probe iarăși procedeul cu 9. „*Căci dacă elimini pe 9 de câte ori poți numai din cel de sus, din care s'a făcut scăderea, apoi deodată din cele două rămase: și vei găsi resturi egale, e probabil că operația a fost bună*" (p. 14).

La *înmulțire* găsim *tabla lui* PITAGORA sub forma des întrebuințată pe atunci:

1	2							
2	4	3						
3	6	9	4					
4	8	12	16	5				
5	10	15	20	25	6			
6	12	18	24	30	36	7		
7	14	21	28	35	42	49	8	
8	16	24	32	40	48	56	64	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Intrebuinţarea ei e cuprinsă în versurile rămase celebre:

„*Laeva majorem, sed dextra quaere minorem:*

„*Caellula communis, quod petis, ecce dabit*“ (p. 19).

(Caută la stânga pe cel mai mare, iar la dreapta pe cel mai mic:

Celula comună, iată, îţi va da ceea ce cauţi).

Acei elevi cari nu pot învăţa pe dinafară tabla înmulţirii pentru numerele mai mari de 5, se pot folosi de *regula leneşului* (regula Pigri). „*Intâi scrie înmulţitorul sub deînmulţit şi în dreptul fiecăruia pune diferenţa până la 10... Apoi înmulţeşte un rest cu celălalt şi suma întreagă, dacă se poate scrie printr'o singură cifră, o scrie, dacă se poate scrie cu două, scrie pe cea din dreapta, şi ţine în minte pe cea din stânga. In sfârşit scade fiecare rest din numărul opus lui prin cruce, scrie restul întreg din jos şi vei avea suma căutată*“ (p. 19).

Ca exemplă dă produsul lui 8 cu 7:

8		dif. 2
	X	
7		dif. 3
5		6

suma 56.

Ca verificare a înmulţirii avem iarăşi proba prin 9: I. „*Elimină din deînmulţit pe 9 de câte ori poţi, şi pune restul deasupra crucii.* II. *Elimină din înmulţitor de asemenea pe 9 de câte ori poţi: şi pune restul în josul crucii.* III. *Inmulţeşte între ele aceste două resturi şi din suma rezultantă elimină pe 9 şi pune restul înaintea crucii.* IV. *Elimină din suma pusă sub linie pe 9 de câte ori poţi şi scrie restul după cruce. Dacă aceste două resturi puse înaintea şi după cruce vor fi egale, e probabil că înmulţirea e bună*“ (p. 20). Procedeul e ilustrat de exemplul de mai jos.

4256		
24		8
17024	3 X	3
8512		6
102144		

Cap. II se ocupă cu *fracţiile:* scrierea şi cetirea, valoarea, reducerea la termenii minimi, reducerea la acelaşi numitor, reducerea la întregi şi invers, apoi cu cele patru operaţii asupra fracţiilor.

Cap. III este consacrat *regulei proporţiilor* sau *regulei de trei,* despre care menţionează că vulgar se mai numeşte şi *regula de aur,* din cauza excelentei sale întrebuinţări. Ea poate fi *simplă directă* sau *simplă inversă,* apoi *compusă directă* sau *compusă inversă.*

Cap. IV tratează despre *regula societăţii,* adică despre regula de asociere sau tovărăşie, Cap. V despre *„Regula falsi seu positionis“,* iar Cap. VI despre *regula amestecului.*

Cartea se încheie cu câteva exerciţii curioase din *„Arithmetica Divinatoria“,* de ex. să se afle ce număr gândeşte cineva, sau ce numere mai mici decât 10 gândesc mai multe persoane, etc.

Aritmetica lui SCHOTT este a cincia şi ultima carte de matematice, scoasă de Universitatea iezuiţilor înainte de desfiinţarea ordinului, la 1773, şi degradarea ei la rangul de liceu. Ea este un compendiu practic, care servea ca îndreptar atât în clasele de liceu cât şi în anii de universitate.

Menţionez că sub aceeaşi formă de extras şi în acelaşi format *Aritmetica* lui C. SCHOTT a fost tipărită în Ungaria încă în următoarele ediţii:

Arithmetica practica generalis, Tyrnaviae, 1721, per FRID. GALL, 72 p.

..... Tyrnaviae, 1769, 117 p.

..... Tyrnaviae, 1777, 117 g.

Compendium Arithmeticae practicae generalis ex cursu mathematico... in usum tyronum mathematicorum et aliorum. Casoviae, 1772, typis collegii soc. JESU, 64 + 4 p.

..... Agriae, 1776, typis scholae episcopalis, 72 p.

Numeroasele ediţii arată că timp de peste o jumătate de secol *Arithmetica* lui SCHOTT a fost manualul standard întrebuinţat în şcolile iezuiţilor nu numai în Ungaria, ci şi în Ardeal.

VICTOR MARIAN.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „V. CONTA"

In cursul anului acesta nu am primit nicio publicație sau manuscris de filosofia matematicei, care să merite să fie premiat. De aceea propunem ca premiul « V. CONTA » pe anul 1946 să nu fie decernat, iar valoarea lui să fie depusă pentru a mări premiul din anul viitor.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI
ING. ALEX. BUNESCU, PROF. PETRE SERGESCU,
PROF. ȘERBAN ȚIȚEICA.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 26 August 1946 a *Gazetei Matematice.*

NOTE MATEMATICE

5. *Asupra problemei 5321.* Problema 5321 a d-lui G. D. SIMIONESCU, rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 45, este valabilă în condiții puțin mai largi. Vom demonstra anume propoziția:

Fie ABC *un triunghiu de referință și două transversale* D = MNP, D′ = M′N′P′ (M, M′ *pe* BC; N, N′ *pe* AC; P, P′ *pe* AB). *Considerăm intersecțiile* U = (PN′, BC), V = (MP′, AC), W = (NM′, AB), I = (D, D′), J = (UV, D′), K = (D, UV), Q = (BJ, CI).

1°. *Punctele* U, V, W *sunt pe o dreaptă* Δ.

2°. *Punctele* A, K, Q *sunt colineare.*

Pentru 1° să considerăm cubicele degenerate T, formată de laturile triunghiului și C formată de dreptele MP′, NM′, PN′. Ele se taie pe dreptele MNP, M′N′P′ deci restul intersecției lor este format din puncte pe altă dreaptă Δ.

Pentru 2° observăm că triunghiurile BCQ, KNW sunt omologice, laturile lor tăindu-se în puncte colineare pe D′; deci dreptele KQ, BW, CN sunt concurente sau KQ trece prin A.

Observații a) Intersecțiile (P′N, BC), (M′P, AC), (N′M, AB) determină o dreaptă Δ cu proprietăți analoage.

b) Fie $X = (MP', NM'), \ldots$ dreptele AX, BY, CZ sunt concurente fiindcă triunghiul dreptelor PN', MP', NM' este omologic cu ABC, axa de omologie fiind Δ.

c) D-l P. P. DRĂGHICESCU observă în soluţia dată problemei 5321 unde D' este dreapta dela infinit, că dacă D se roteşte în jurul unui punct fix O, Δ înfăşoară o conică. Proprietatea este valabilă şi aici, când D' este fixă. Intr'adevăr V, W descriu diviziuni omografice pe laturile AC, AB căci fiind dat V el determină succesiv şi unic, intersecţiile $M = (P'N, BC)$, $N = (OM, AC)$, $W = (NM', AB)$ şi reciproc. Deci Δ înfăşoară o conică înscrisă triunghiului ABC.

N. N. MIHĂILEANU.

6. *Acum o sută de ani în lumea matematică* [1]. *Anul matematic 1846* [2].

Evenimentul matimatic cel mai de seamă îl constituie, în anul 1846, publicarea de către J. LIOUVILLE în revista sa „*Journal de Mathématiques pures et appliquées*", II, 381—444, a operei complete a genialului matematician EVARISTE GALOIS (25.10.1811 – 31. 5.1832), dispărut în vârsta de abia 21 de ani în urma unui nenorocit duel. Prin publicarea memoriilor inedite ale lui GALOIS, dintre care unele au fost prezentate în 1831 la Academia de Ştiinţe din Paris, însă au rămas rătăcite în vreun sertar al acesteia de pe urma raportului matematicianului POISSON (21.6.1781—25.4.1840) care le-a găsit din cauza unei redijări extrem de succinte-incomprehensibile, J. LIOUVILLE a oferit lumii matematice profundele jalonări care au constituit bazele teoriei grupurilor de substituţii şi au format fundamentele Algebrei moderne sub numele de „*Teoria lui Galois*". Lucrările lui GALOIS ocupă doar circa 60 pagine! Insă câte idei geniale şi scânteietoare conţin ele!

Căutând să aşterne pe hârtie, în ultimele clipe ale vieţii sale, stinsă aşa de timpuriu şi într'un chip aşa de tragic, ideile fundamentale ale descoperirilor sale minunate, GALOIS închce astfel scrisoarea sa de adio adresată prietenului său A. CHEVALIER:... „*Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr; mais tout ce que j'ai écrit là est*

1) Urmare la nota cu acelaşi titlu publicată la pag. 799, Vol. LI.

2) Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic al Universităţii din Iaşi din originalele timpului.

depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon interêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète. Tu prieras publiquement JACOBI ou GAUSS *de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes. Après cela, il y aura, j'espère des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tot ce gâchis*".

Înţeleasă, cristalizată şi extinsă în decursul anilor, mai ales prin lucrările lui CAMILLE JORDAN (5.1.1838 — 21.1.1922) strânsă laolaltă în monumentalul tratat al acestuia „*Traité des substitutions et des équations algèbriques*", opera matematică a lui GALOIS a făcut ca marele şi regretatul EMILE PICARD (24.7.1856 — 25.12.1941) să spună despre „*tânărul genial cu suflet de copil*":... „GALOIS *are, desigur, câţi-va egali printre marii matematicieni ai secolului său; dar niciunul nu-l întrece prin originalitatea şi adâncimea concepţiunilor sale*".

In afară de publicarea operei lui EVARISTE GALOIS deschizătoare de drumuri noi şi rămasă încă pentru un timp oarecare nebăgată în seamă, anul matematic 1846 este caracterizat în domeniile *Analizei Matematice, Geometriei* şi *Astronomiei* prin aporturi importante.

Revenind asupra teoriei potenţialului, schematizată de FOURIER (21.3.1768 — 17.5.1830) şi tratată apoi de GAUSS (30.4.1777 — 23.2.1855) şi W. THOMSON (26.6.1824 – 17.12.1907), LEJEUNE DIRICHLET (13.2.1805 — 5.5.1859) enunţă *(Crelle's J.,* 32) ceea ce numim noi astăzi „*Principiul lui* DIRICHLET", adică metoda de a conchide că soluţia V a „*problemei lui* DIRICHLLET" există dacă funcţia minimizează integrala $\int \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 d\sigma$.

Acest principiu, care a provocat atâtea studii şi atâtea discuţii, a fost luat ceva mai puţin în consideraţie în urma criticilor aduse de WEIERSTRASS (31.10.1815 — 19.2.1897), a triumfat însă în urma precizărilor aduse de HILBERT (23.1.1862 — 14.2.1943).

In domeniul Geometriei, cu toate că „*Principium methodi geometricae* et *analiyticae idem est*" — după cum proclamă JACOBI (10.12.1804 — 18.2.1851) în 1831 *Werke,* I, 454, & urm. Articolul „*Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt*") —, antagonismul între Geometria sintetică şi Geometria analitică devine

din ce în ce mai acut, trecând din Franța epocei discipolilor lui MONGE (10,5.1746 — 28.7.1818) în sânul școalei germane, strălucit reprezentate prin marii geometri MÖBIUS (17.11.1790 — 26.9. 1868), VON STAUDT (24.1.1798 — 1.6.1867), PLÜKER (16.6.1801 — 22.5.1868) și STEINER (18.3.1790 — 1.4.1863), și a celei engleze, reprezentate prin CAYLEY (16.8.1821 — 26.1.1899) și SALMON (5.9. 1819 — 22.1.1904). Totodată, în această perioadă începe să se cristalizeze tendința de a se separa geometria metrică de geometria proiectivă, tendință, ce a dus mai târziu, prin cristalizări de concepții din ce în ce mai profunde și mai unificatoare, la vederi exprimate în celebrul „*Program*“ (1872) al marelui matematician FELIX KLEIN (25.4,1849 — 22.6.1925).

In 1846, PLÜCKER, creator al geometriei tangențiale și a celor mai generale coordonate triliniare, introduse în tratatul său ce a apărut în acest an, întitulat „*System der Geometrie des Raumes*“, pag. 322 și urm., un spațiu cu patru „dimensiuni“ conceput dintr'un punct de vedere cu totul nou. PLÜCKER consideră dreapta dintr'un spațiu tridimensional euclidian ca un element generator se știe însă că ecuațiile unei drepte generice într'un astfel de spațiu sunt date prin două ecuații liniare ce conțin patru coeficienți-parametri ce intră și ei liniar. Un spațiu *n*-dimensional punctual e „*zu metaphysisch*“ spunea în chip obișnuit acest geometru. Concepția lui PLÜCKER relativă la spațiul „dreptelor“, a dat naștere la generalizări nebănuite și a constituit originea capitolelor importante de geometrie algebrică.

In domeniul Mecanicei cerești și acel al Astronomiei, preocupările matematicienilor au luat o formă concretă, cristalizată în subiectele concursurilor cu premii, propuse de Academia de Științe din Paris pentru anul 1845—46, în vederea perfecționării metodelor de calcul și teoriei perturbațiilor planetelor și sateliților lor.

Astronomul DELAUNAY (9.4.1816—5.8.1872) publică cu această ocazie (Comptes rendus, 23, 968 & urm.) o nouă teorie analitică a mișcării lunii și marele CAUCHY (21.8.1789 — 22.5.1857) publică câteva articole importante despre noile metode pentru determinarea orbitelor corpurilor cerești și în special a orbitelor cometelor (Comptes rendus, 23,887, 956,1002 & urm.).

Interesul vădit arătat Astronomiei și Mecanicei cerești era prilejuit, desigur, în bună parte, de lucrările pregătitoare și, mai

ales, de un eveniment ştiinţific de seamă care reunea într'însul calităţile „celei mai frumoase descoperiri cu cea mai mare sforţare a spiritului uman". Este vorba de lucrările care au dus la descoperirea planetei Neptun, făcută numai prin calcul, sau, cum s'a mai zis, „*în vârful condeiului*" de matematicianul şi astronomul francez LE VERRIER (13.3.1811 — 22.9.1877).

După fericita descoperire a planetei Uran, în 1781, W. HERSCHEL (15.11.1738 — 25.8.1822), astronomii au început, paralel cu observaţiile directe ale acestei planete, să-i calculeze poziţiile de pe orbită (efemeridele planetei) în baza teoriilor ce rezultau din legea newtoniană a gravitaţiei universale.

In 1821, după 40 de ani de observaţii şi de calcule, astronomul BOUVARD (27.6.1767 — 7.6.1843) reuneşte datele astfel căpătate în tabelele planetei Uran. Diferenţele (neegalităţile) ce reieşeau din aceste tabele între poziţiile planetei determinate prin observaţie şi poziţiile calculate pe bază de teorie, ţinându-se socoteală de „perturbaţiile" cauzate acesteia de câmpul gravitaţional al planetelor cunoscute din antichitate (în special de Jupiter şi Saturn), erau prea mari. Sarcina grea de a descoperi cauza acestor neegalităţi şi-a asumat-o LE VERRIER. Admiţând după o sumedenie de încercări infructuase, că neegalităţile în mişcarea planetei Uran nu pot fi explicate decât prin existenţa unei planete transuraniene, LE VERRIER îşi propuse să determene prin calcul, utilizând în cabinetul său de lucru doar puterea intuiţiei sale geniale combinată cu ingeniozitatea metodelor analitice întrebuinţate şi cu tezaurul cuceririlor ştiinţelor matematice din timpul său, poziţia prezumptivei planete, să-i măsoare mărimea, să-i calculeze greutatea şi toate datele mişcării acesteia. La 23 Sept. 1846 „majestatea" teoriilor matematice s'a confirmat. Astronomul GALLE (9.6.1812 — 10.7.1910) dela observatorul din Berlin a descoperit la ora şi la locul indicat prin calcule de LE VERRIER noua planetă, care, mai târziu, a primit numele neptun.

Curând după ce această descoperire a fost anunţată (Comptes rendus, 23,746), s'a aflat că un tânăr matematician englez ADAMS (5.6.1819 — 22.1.1892) a ajuns la rezultate teoretice analoage rezultatelor date de LE VERRIER.

De atunci încolo, sistemul nostru planetar capătă lărgiri noui nu numai pe bază de observaţii directe, ci şi prin calcul. Men-

ționăm astfel, descoperirea recentă a planetei transneptuniene *Pluton* (13.3.1931), făcută deasemenea cu ajutorul Matematicei la Observatorul Lowell din U.S.A.

D. I. MANGERON
Seminarul Matematic și Laboratorul de Mecanică al Politehnicii „GH. ASACHI", Iași.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXVI. Nr. 8. Octombrie 1946. M. GH. DUMITRESCU: Evoluția desvoltării geometriei neeuclidiene. R. BOUVAIST și V. THÉBAULT: Sur un tetraèdre spécial. Note matematice. Bibliografie, probleme rezolvate și propuse.

A. GLODEN. Table des factorisations des nombres x^4+1 dans l'intervalle $1000 \leqslant x \leqslant 3000$. (Extras).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

E. ABASON. Introduction à la théorie des variables et fonctions complexes. Donată de d-l OCTAV MOSCUNA.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2539. *Se dă un fașcicol de cercuri și un punct fix* P. *Care este locul punctelor duble ale involuțiilor determinat de fascicole pe o secantă variabilă ce trece prin* P?.

L. HAMBURGER.

Ne propunem problema mai generală, când fascicolul de cercuri este înlocuit printr'un fascicol de conice. Punctele duble ale involuției determinate de un fascicol de conice pe o dreaptă fixă, fiind punctele de contact ale celor două conice ale fascicolului tangente dreptei, problema noastră devine:

Să se găsească locul punctelor de contact ale tangentelor duse dintr'un punct P, fix conicelor unui fascicol linear.

Această problemă este bine cunoscută [1]. Iată o soluție analitică, simplă. Luăm ca triunghiu de referință triunghiul conjugat comun conicelor fascicolului.

Fie (F) *și* (G) *două din aceste conice. Ecuațiunile lor* sunt respectiv:

$$(F)\quad f \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad ; \quad (G)\quad g \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

λ fiind un parametru arbitrar, ecuațiunea unei conice oarecare a fascicolului este

$$f + \lambda g = 0. \qquad (1)$$

Ecuațiunea locului căutat se obține eliminând pe λ între ecuațiunea (1) și ecuațiunea polarei punctului fix $P(x_0, y_0, z_0)$ în raport cu conica, sau:

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z + \lambda (a x_0 x + b y + c z_9 z) = 0.$$

Ecuațiunea locului geometric căutat este deci:

$$\begin{vmatrix} f & x_0 x + y_0 y + z_0 z \\ g & a x_0 x + h y_0 y + c z_0 z \end{vmatrix} = 0. \qquad (\Gamma)$$

Această ecauțiune reprezintă o cubică (Γ) ce trece evident prin punctele $f = 0$, $g = 0$, comune conicelor fascicolului. Aceeași cubică trece și prin punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ precum și prin vârfurile (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ale triunghiului conjugat comun. In sfârșit, (Γ) mai trece și prin punctul comun polarelor

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0 \quad \text{și} \quad a x_0 x + b y_0 y + c z_0 z = 0,$$

adică prin punctul P' conjugat lui P în raport cu toate conicele fascicolului considerat.

In cazul problemei 2539 cubica (Γ) este circulară (trece prin punctele ciclice), trece prin punctele P și P', prin punctele de intersecție și prin punctele limită ale fascicolului de cercuri. Mai trece deasemeni și prin punctul de la infinit al axului radical comun.

Observare. Cubica (Γ') asociată punctului P' ca și cubica (Γ) punctului P, trece prin aceleași nouă puncte, anume: P și P', cele patru puncte comune conicelor fascicolului și cele trei vârfuri ale triunghiului conjugat comun. Deci.

---

1) Un studiu geometric complect al acestei chestiuni se găsește în GH. MICHEL *Compléments de géométrie moderne* pag. 104. Paris. (1926).

Prin punctele comune a două conice, prin vârfurile triunghiului conjugat comun și prin o pereche de puncte conjugate, în raport cu ambele conice, trec ∞^1 cubice.

In particular, când fascicolul de conice este fascicolul de hiperbole echilatere conjugate unui triunghiu această propoziţiune devine:

Prin vârfurile unui triunghiu, prin centrele cercurilor tritangente și prin o pereche de puncte invers isogonale trec ∞^1 cubice.

In fine, când cele două puncte isogonale sunt chiar punctele ciclice ale planului, obţinem:

Prin vârfurile unui triunghiu și prin centrele cercurilor tritangente trec ∞^1 cubice circulare.

Problema 2539 a fost rezolvată de d-nii C. H. NICOLAU (vol. XXIII) S-lt. (pe atunci) M. FOCȘĂNEANU (vol. XXXIII), M. MARGULIUS (vol. XXXVII) și N. N. MIHĂILEANU (pe atunci student, vol. XXXIX).

Ș. G.

PROBLEMA 4490. *Se dă patrulaterul* ABCD *și se notează:*

$E \equiv (AB\ ;\ CD)\ ;\ F \equiv (AD\ ;\ BC)\ ;\ I \equiv (AC\ ;\ BD).$

Fie Δ_1 *dreapta ortocentrelor celor patru triunghiuri formate de laturile patrulaterului* ABCD *și* Δ_2, Δ_3 *dreptele analoage în patrulaterele* IAED *și* IAFB.

Ce condiţie trebue să îndeplinească patrulaterul ABCD *pentru ca dreptele* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *să fie concurente?*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de d-l LT. MIRCEA D. POPA (Șc. Politehnică Bucureşti).

Se ştie că dreapta ortocentrelor unui patrulater complect este axa radicală a cercurilor descrise pe diagonalele patrulaterului ca diametre. Vom nota cu Ω_{uv} cercul descris pe segmentul $\overline{UV}$ ca diametru și atunci:

Δ_1 este axa radicală a cercurilor Ω_{ac} și Ω_{bd}

Δ_2 „ „ „ „ „ Ω_{ad} și Ω_{bc}

Δ_3 „ „ „ „ „ Ω_{ab} și Ω_{cd}

Dacă dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3 sunt concurente rezultă că există un punct T care are putere egală faţă de fiecare din perechile de cercuri de mai sus.

Notăm cu L, M, N, P mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA, iar cu R şi S mijloacele diagonalelor AC şi BD. Este lucru ştiut că dreptele MP, LN şi RS sunt concurente într'un punct G. Fie apoi O simetricul lui T faţă de G. Scriind că T are puteri egale faţă de cercurile Ω_{ad} şi Ω_{bc} avem:

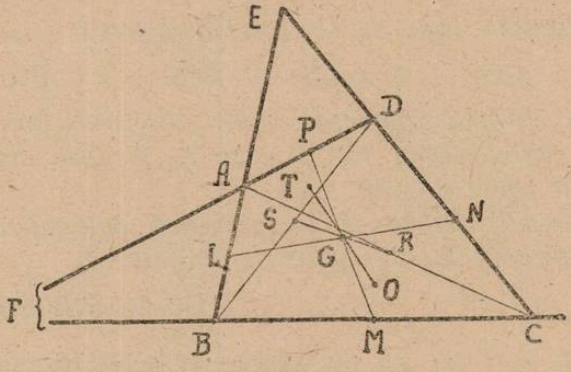
$$\overline{TM}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4} = \overline{TP}^2 - \frac{\overline{AD}^2}{4}.$$

Dar $\overline{TM} = \overline{OP}$ şi $\overline{TP} = \overline{OM}$ încât relaţia devine

$$4\,\overline{OP}^2 - \overline{BC}^2 = 4\,\overline{OM}^2 - \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

Insă OM şi OP sunt mediane în triunghiurile OBC şi OAD, de unde deducem:

$$4\,\overline{OM}^2 = 2(\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2) - \overline{BC}^2 \;;\; 4\,\overline{OP}^2 = 2(\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2) - \overline{AD}^2$$



Aseste valori introduse în (1) ne dă:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2.$$

In mod analog deducem:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 \quad \text{şi} \quad \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$$

Luând două câte două aceste relaţii şi scăzându-le obţinem:

$$\overline{OB} = \overline{OD} \;;\; \overline{OA} = \overline{OD} \;;\; \overline{OA} = \overline{OB}$$

sau în definitiv:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}.$$

Aşa dar condiţia ca Δ_1, Δ_2, Δ_3 să fie concurente este ca patrulaterul ABCD *să fie inscriptibil.*

Pornind invers se poate arăta că dacă un patrulater ABCD este inscriptibil, dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3 sunt concurente.

Observări: 1°. D-l Lt. Mircea D. Popa aminteşte că punctul T definit mai sus, simetricul centrului cercului ABCD faţă de punctul de întâlnire al bimedianelor patrulaterului se bucură de numeroase proprietăţi (F. G. M. *Ex. de géometrie* Ed. 8 p. 577).

2°. Tot d-sa dă următoarea demonstraţie a proprietăţii *directe* a patrulaterului inscriptibil:

„Se ştie că centrul O al cercului ABCD care taie două cercuri date, Ω_{bc} şi Ω_{ad} după diametrele BC şi AD se găseşte pe o dreaptă Δ simetrica axei radicale al cercurilor de mai sus faţă de mijlocul G al segmentului MP. Altfel spus simetricul T al lui O faţă de G se găseşte pe axa radicală a cercurilor Ω_{bc} şi Ω_{ad}.

La fel se arată că se află şi pe celelalte două axe radicale ale cercurilor Ω_{ab}, Ω_{cd} şi Ω_{ac}, Ω_{bc}".

3°. Axele radicale Δ_1, Δ_2, Δ_3 sunt evident perpendiculare pe dreptele RS, MP, LN care unesc centrele cercurilor respective. In cazul când ABCD este inscriptibil axele Δ_1, Δ_2, Δ_3 trec respectiv prin I, F şi E. Se poate spune deci: „Perpendicularele coborîte din punctele de intersecţie a loturilor opuse dintr'un patrulater inscriptibil, pe dreptele ce unesc mijloacele aceloraşi loturi se întâlnesc pe perpendiculara dusă din punctul comun diagonalelor pe dreapta lui Gaus.

4°. Când una din diagonale este diametru, atunci perpendicularele despre care s'a vorbit mai sus se întâlnesc pe a doua diagonală, în mijlocul ei.

PROBLEMA 5701. *Să se determine mişcările rectilinii ale căror elemente satisfac relaţiei:*

$$4v^4\,dv\,dx^2 + x\,(x\,dv + 2v\,dx)^3 = 0,$$

x fiind spaţiul, iar v vitesa. Să se demonstreze că printre acestea există şi o mişcare tautocronă.

M. Ghermănescu.

Vom da o soluţie, folosindu-ne de indicaţiile date de autor în lucrarea: *„Probleme şi Propoziţii din Dinamica Punctului"*, Ex. 60, pag. 66.

Dacă punem: $v' = \dfrac{dv}{dx}$, relaţia din enunţ se poate scrie:

$$\frac{4\,x^2v^4}{v'^2} = -\left(x^2 + \frac{2\,xv}{v'}\right)^3.$$

Dacă notăm:

$$-\left(x^2+\frac{2xv}{v'}\right)^3=u^6(x),$$

unde $u(x)$ este o funcţiune ce trebue determinată, avem, extrăgând rădăcina patrată:

$$\frac{2xv^2}{v'}=\pm u^3(x) \qquad (I)$$

şi ţinând seamă de substituţie:

$$x^2+\frac{2xv}{v'}=-u^2(x). \qquad (II)$$

Din relaţiile (I) şi (II), avem succesiv:

$$\frac{v'}{v^2}=\pm\frac{2x}{u^3(x)}\quad,\quad \frac{v'}{v}=\frac{-2x}{u^2(x)+x^2}.$$

Impărţind membru cu membru aceste două ultime relaţiuni obţinem:

$$v=\frac{\pm u^3(x)}{u^2+x^2}$$

şi introducând în valoarea lui $\frac{v'}{v}$ avem:

$$u'(u^2+3x^2)=0.$$

De aci deducem $u'=0$ sau $u^2+3x^2=0$. Singura soluţie care dă valori reale este $u'=0$, deci $u=$ constant.

Făcând $u=$ constant şi integrând, avem:

$$u^3t=u^2(x_0-x)+\frac{1}{3}(x_0^3-x^3). \qquad (III)$$

Această relaţiune se mai poate scrie:

$$\frac{1}{3}x^3+u^2x+u^3t-u^2x_0-\frac{1}{3}x_0^3=0.$$

Teorema lui DESCARTES indică o singură soluţie reală pentru x, deci există o singură lege a mişcării.

Timpul necesar mobilului pentru a ajunge în origine este:

$$T=\frac{u^2x_0+\frac{1}{3}x_0^3}{u^3}=\frac{x_0}{u}+\frac{1}{3}\frac{x_0^3}{u^3}.$$

Acest timp este independent de x_0 şi deci mişcarea este tautocronă, dacă: $u = kx_0$, unde $k =$ constant. Avem:

$$x_0 = v\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{k^3}\frac{x^3}{x_0^3}\right).$$

EUGEN WEGENER
Student-inginer.

PROBLEMA 5886. *Intr'un triunghiu oarecare* ABC, *în care notaţiile sunt cele obicinuite, avem totdeauna relaţiile:*

$$\frac{\sin\frac{C-A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} = \frac{c^3}{r_a^3}\cos\frac{B-A}{2},$$

$$\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C-B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}} \cdot \frac{3}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{r_c^3} = \frac{c^3}{r_a^3}\sin\frac{B-A}{2}$$

V. ALACI.

1°. Ţinând seamă că într'un triunghiu ABC avem

$$\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{C+A}{2}, \quad \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$$

şi notând cu E primul membru din relaţia 1-a, putem scrie succesiv

$$E = \frac{\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{(\cos A - \cos C)(1+\cos B) + (\cos B + \cos C)(1-\cos A)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\cos A + \cos B - \cos C(\cos B + \cos A)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} = \frac{(\cos A + \cos B)(1-\cos C)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A-B}{2}\sin^3\frac{C}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^3 \cos\frac{B-A}{2},$$

Dar [1],

$$r_a = \frac{c \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{c}{r_a},$$

şi atunci relaţia E devine

$$E = \frac{c^3}{r_a^3}\cos\frac{B-A}{2}$$

2°. Notând cu E_1 primul membru din relaţia a 2-a şi ţinând seamă de formulele folosite la 1°, putem scrie succesiv,

$$E_1 = \frac{\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + \sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$- \frac{3}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{r_a}$$

$$= \frac{(\sin C+\sin A)(1+\cos B)+(\sin C-\sin B)(1-\cos A)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} - \frac{3\sin\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{3\sin C+\sin A-\sin B+\sin C(\cos B-\cos A)}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}} - \frac{12\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}.$$

Dar,

$$3\sin C + \sin A - \sin B + \sin C(\cos B - \cos A)$$

$$= 3\sin C + \sin A - \sin B + 4\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

iar

$$4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{1}\cos\frac{B}{2} = \sin A - \sin B + \sin C.$$

---

1) *Compléments de Trigonométrie, par* „F. G. M", p. 177).

(*Compléments de Trigonométrie*, par „F. G. M.", p. 579), astfel că relația E_1 devine

$$E_1 = \frac{3\sin C+\sin A-\sin B-4\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}-3\sin A+3\sin B-3\sin C}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{2(\sin B-\sin A)-4\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{4\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{C}{2}\left(1-\cos^3\frac{C}{2}\right)}{\sin^3\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}}\sin\frac{B-A}{2},$$

sau

$$E_1 = \left(\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^3\sin\frac{B-A}{2} = \frac{c^3}{r_a^3}\sin\frac{B-A}{2}.$$

Soluții analoage date de d-nii: C-TIN CHIRIAC și P. P. DRĂGHICESCU (Polit., București).

Alte soluții date de d-nii: IOAN BARBU (Lic. Caracal), M. R. CONSTANTINESCU (Lic. Ploești), GHEORGHE GRIGORE, EMIL MARINESCU (Lic. Vlaicu, București), TRAIAN MUSTĂCESCU (Lic. Maiorescu, București), MIRCER PĂTRĂSCIOIU (Buzău), C-TIN STAICU (Lic. Milit., Timișoara), VLAD JURIST (Colegiul N. Filipescu, Predeal) GH. VRÂNCEANU (Lic. Milit., Timișoara), P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab", București), PAUL CONSTANTINESCU, C. V. ROȘU, I. T. MUNTEANU, C. CORDUNEANU, D. I. STOIAN, ILIE L. POPESCU și V. G. DIACONU.

PROBLEMA 6115. *Se consideră două triunghiuri* ABC *și* LMN *înscrise în același cerc. Să se arate că punctul lui* MIQUEL *al patrulaterului determinat de latura* BC *și de dreptele lui* SIMSON *ale punctelor* L, M *și* N, *în raport cu triunghiul* ABC, *coincide cu ortopolul dreptei* BC, *în raport cu triunghiul* LMN.

ȘERBAN GHEORGHIU.

Problema aceasta este în legătură cu două teoreme — bine cunoscute şi anume:

1. *Fiind date cinci drepte, în plan, punctele lui* MIQUEL *ale celor cinci patrulatere formate cu câte patru din dreptele considerate, se găsesc pe acelaşi cerc.*

Acest cerc se numeşte cercul lui MIQUEL.

2. *Cercul lui* MIQUEL *relativ la cinci tangente ale unei hipocicloide cu trei puncte de înapoiere se reduc la o dreaptă.*

Observ că proiecţia punctului B pe latura MN coincide cu punctul lui MIQUEL al patrulaterului format de laturile BA şi BC ale triunghiului ABC şi de dreptele lui SIMSON ale punctelor M. şi N. Aceasta fiindcă cercul circumscris triunghiului format de laturile BA şi BC şi de dreapta lui SIMSON a punctului M este cercul de diametru MB. Analog, cercul de diametru NB este circumscris, triunghiului determinat de dreapta lui SIMSON a lui N şi de laturile BA şi BC.

Proiecţiunile vârfului B pe laturile MN, NL şi LM fiind coliniare rezultă că cercul lui MIQUEL corespunzător dreptelor lui SIMSON ale punctelor L, M şi N în raport cu triunghiul ABC şi laturile BA şi BC se reduce la o dreaptă — dreapta lui SIMSON a vârfului B în raport cu triunghiul LMN.

In acest caz cercul lui MIQUEL se reduce la o dreaptă fiindcă laturile BA şi BC de o parte şi cele trei drepte ale lui SIMSON de alta, sunt cinci tangente ale unei hipocicloide cu trei puncte de înapoiere.

Rezultă în definitiv că punctul lui MIQUEL al patrulaterului format de dreptele lui SIMSON în raport cu ABC ale punctelor L, M şi N şi de latura BC se găseşte pe dreapta lui SIMSON a vârfului B în raport cu triunghiul LMN. Analog, punctul lui MIQUEL al aceluiaşi patrulater se găseşte şi pe dreapta lui SIMSON a vârfului C, coincide prin urmare cu intersecţia celor două drepte SIMSON, deci cu ortopolul laturei BC.

S'a primit o foarte bună soluţie dela D-nii: EM. E. MARINESCU (Bucureşti) şi CEZAR N. I. BOERESCU.

Ş. G.

PROBLEMA 6194. *Pe o dreaptă* Δ *se dau punctul fix* O *şi punctul mobil* B. *Fie* (Γ) *un cerc dat, tangent în* O *la* Δ, *iar* BT *tangenta la* (Γ). *Se consiaeră cercul* (γ) *tangent în* B *la* BT *şi trecând prin* O. *Se cere:* 1°. *Să se afle locul punctelor de pe* (γ) *în care tangenta este paralelă cu* Δ. 2°. *Să se deducă locul centrului lui* (γ). 3°. *Să se calculeze raza cercului* (γ) *în funcţie de distanţa lui* T *la* Δ.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l CEZAR N. I. BOERESCU (student Politehnica din Bucureşti).

Notăm ca O', O'' centrele cercurilor (Γ), (γ), cu M intersecţia lui (γ) cu BO', cu P proiecţia lui O' pe perpendiculara din T pe Δ.

1°. BT, BO fiind tangente la (Γ) avem

$$\sphericalangle O'BO = \sphericalangle MBO = \sphericalangle TBO'.$$

Dar ultimul unghiu este egal cu $\sphericalangle MOB$ ca având aceeaşi măsură căci BT este tangentă în B la (γ). Triunghiul MOB este isoscel şi perpendiculara din M pe BO trece prin mijlocul lui BO. Deci distanţa lui M la Δ este jumătate din O'O. Punctul M, care este evident unul din punctele în care tangenta lui (γ) este paralelă cu Δ, descrie dreapta Δ perpendiculară pe O'O în mijlocul segmentului OO'.

Fie N intersecţia lui MO'' cu (γ). N este al doilea punct de pe (γ) în care tangenta este paralelă cu Δ. Cum N este simetricul lui M faţă de O'' iar MN are o direcţie fixă urmează că locul lui N este o curbă analogă cu locul lui O'', în speţă o parabolă după cum se va vedea la punctul următor.

2°. De oare ce

$$O''M = O''O$$

locul lui O'' este parabola cu focarul în O şi directoarea Δ.

Se deduce, după felul cum este construit N că locul lui N este o parabolă cu vârful în O.

3°. Fie A mijlocul lui OB şi

$$TP = 2\alpha \quad \text{şi} \quad TO' = R.$$

Triunghiurile asemeni O PT, O″AB dau

$$\frac{O''B}{O''A} = \frac{O'T}{TP} \quad \therefore \quad x = O''B = O''A \frac{O'T}{TP}.$$

Dar

$$O''A = x - \frac{R}{2}, \quad O'T = R, \quad TP = d$$

$$\therefore \quad x = \left(x - \frac{R}{2}\right)\frac{R}{d} \quad \therefore \quad x = \frac{R^2}{2R - 2d}.$$

D-nii: ANTON I. VARGĂ (student-inginer), V. D. PĂLĂCEANU (Şcoala Ofiţeri Geniu), D. S. MARINESCU (Ploeşti), I. I. NOVAC (Liceul Brăila) şi M. V. SOARE au trimis o soluţie complectă prin geometria analitică.

Remarcăm forma extrem de îngrijită a soluţiei D-lui D. S. MARINESCU.

PROBLEMA 6225. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin 5x \cos x + 2 \sin 2x \cos^2 2x - 3 \sin 3x \cos 3x - 3 = (3 - \sin 2x) \cos 4x.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de d-l VICTOR GH. PIŢIGOI (Şcoala Politehnică Bucureşti).

Avem:

$$\sin 5x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x)$$

$$2 \sin 2x \cos^2 2x = \sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$$

$$3 \sin 3x \cos 3x = \frac{3}{2} \sin 6x$$

$$\sin 2x \cos 4x = \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x).$$

In baza acestor egalităţi ecuaţia dată se poate scrie succesiv

$$\sin 5x \cos x + 2 \sin 2x \cos^2 2x - 3 \sin 3x \cos 3x + \sin 2x \cos 4x - 3 \cos 4x - 3 = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x) + \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) - \frac{3}{2} \sin 6x + \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x) - 3 \cos 4x - 3 =$$

$$\frac{1}{2} \sin 4x - 3(1 + \cos 4x) = 0.$$

Transformând pe $\sin 4x$ şi $(1 + \cos 4x)$ ecuaţia devine

$$\sin 2x \cos 2x - 6\cos^2 2x = \cos 2x (\sin 2x - 6\cos 2x) = 0, \quad (1)$$

care se desface în două ecuaţii:

I. $\cos 2x = 0$ care dă $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, deci $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

II. $\cos 2x - 6\cos 2x = 0$ sau $\operatorname{tg} 2x = 6$.

Cu ajutorul tablelor de logaritmi găsim $2x = 80^0\,32'\,15''$ deci

$2x = k \cdot 180^0 + 80^0\,32'\,15''$ sau $x = k \cdot 90^0 + 40^0\,16'\,8''$.

Soluţii asemănătoare s'au primit dela d-nii: PETRE D. COLUMBEANU (Şcoala Politehnică Bucureşti), MIRCEA A. SĂVESCU (Col. „Sf. Sava" Bucureşti), PETRE P. TEODORESCU (Liceul „Matei Basarab" Bucureşti), CORNELIU COMŞA, MIRCEA CRINTEA, ION I. FĂGĂRĂŞEANU, PAUL FLORIAN, ADRIAN DUMITRESCU, AUREL MAN, ION PÂRVU, ALEX. SAROLA, PETRE V. STANCIU, ION. I. TOMA (Liceul Militar „Mihai Viteazul" Timişoara), MIRCEA V. SOARE. AL. GH. MORAITE, AD. M. EFTODE (Liceul Armatei, Craiova), CONST. MIHALACHE (Şcoala Ofiţeri de Artilerie, Piteşti), C. N. I. BOIERESCU (Student Politehnica Bucureşti), ŞT. GR. FIRESCU (Liceul „Fraţii Buzeşti" Craiova), CONST. G. MIHALACHE şi I. C. UDREA.

— Toţi aceştia au găsit corect ecuaţia (1), dar au dat arcele greşite sau la ecuaţia (I) sau la ecuaţia (II).

— Unii corespondenţi scriu arcele jumătate în radiani şi jumătate în grade, ceace nu e îngăduit. De ex. $x = k\pi + 40^0\,16'\,7''$.

EXERCIŢII

9. *Între elementele unui triunghiu avem*

$$\Sigma \sin^2 A = \frac{1}{4R} \Sigma (r_a - r)(r_b + r_c).$$

AL. GH. MORAITE.

R. Ţinem seama de relaţiile

$$\sin^2 A = 4\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}, \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{r_a - r}{4R},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r_b + r_c}{4R}, \quad r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

PROBLEME PROPUSE

6289[1]. Un corp greu aşezat pe un plan orizontal, mobil în raport cu un plan orizontal fix astfel încât distanţa x dintre aceste două plane este dată de ecuaţia $x = a \sin \omega t$ (a, ω constante, t timpul). Se cere condiţia ca în timput mişcării, corpul să nu părăsească planul mobil. Ce se întâmplă dacă această condiţie nu este îndeplinită?

ALEXANDRU STOENESCU.

6290. Să se găsească numărul N de 2 cifre ştiind că numărul ce se obţine scriind pe N, 2N şi 5N unul după altul, este patrat perfect.

G-L GH. BUICLIU.

6291. Am citit în 1945, în cotele bursei de devize

	Buc.	Paris	Berlin
Bucureşti	—	660	3950
Paris	14,8	—	x
Berlin	y	16,8	—

1°. Să se determine valorile lui x şi y pentru ca metoda parităţii să fie cea mai avantajoasă pentru un debitor din Bucureşti care ar avea să-şi plătească o datorie la Paris prin Berlin.

2°. Luând pentru x şi y valori care să difere cu 10% de limitele găsite la 1° să se calculeze ce sumă va trebui să cheltuiască debitorul pentru a achita o datorie de 13450 franci francezi.

V. MEHEDINCU.

6292. Se joacă un joc cu două zaruri. Regulile lui sunt: Câştigul este egal cu miza. Bancherul câştigă dacă obţine 7 şi pierde dacă obţine 2 sau 12. Dacă obţine alt număr, bancherul aruncă din nou cu zarurile şi anume până ce obţine numărul 7, în care caz bancherul câştigă sau unul din numerele 2 sau 12, în care caz el pierde.

Jocul este echitabil?

Care e probabilitatea ca bancherul să câştige cu alt număr decât 7, aruncând cu zarurile în aceeaşi partidă de cel mult n ori.

B. BARBĂLAT.

1) Problema 6289 din G. M., LII, pag. 104 fiind identică cu problema 6251 din G. M, LI, pag, 782 se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

6293. 1°. In orice poligon regulat ABCD..., cu un număr de laturi $\geqslant 7$, avem relaţiile

$$\left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2+\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=3 \quad \text{şi} \quad \left(\frac{\overline{AB}}{R}\right)^2+\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2=4, \qquad (1)$$

R fiind raza cercului circumscris poligonului.

2°. Din (1) să se deducă relaţia

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{AB}}$$

cunoscută [1] pentru orice eptagon regulat.

3°. Folosind relaţiile (1) să se calculeze cu două zecimale exacte, lungimile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ale laturilor eptagonului regulat, ştiind că

$$4\,\overline{AD}=5\,\overline{AC}.$$

C. MIHU.

6294. Fie pentru o piramidă regulată: φ unghiul diedru al muchiilor bazei, ψ unghiul diedru al muchiilor laterale şi θ unghiul la vârf al conului circumscris. Să se arate că

$$\cos\varphi=\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

ION C. VASILIU.

6295. Să însemnăm cu A'B'C' triunghiul format de polarele vârfurilor A, B, C ale unui triunghiu în raport cu cele trei cercuri exînscrise. Dacă S' este aria lui, avem relaţia

$$S'=\frac{p}{2R}(2R+r)^2.$$

EMIL MARINESCU.

6296. Să se arate, fără ajutorul derivatelor, că funcţiunile

$$y=(m^2-n^2)\sin x+2mn\cos x$$
$$z=2mn\sin x+(m^2-n^2)\cos x$$

au acelaşi maxim.

M. R. CONSTANTINESCU.

---

1) G. M, Vol. LI, p. 68, formula (4').

6297. Să se calculeze determinantul

$$\Delta_{k,i,\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i-2} & a_2^{i-2} & \dots & a_k^{i-2} \\ a_1^{i} & a_2^{i} & \dots & a_k^{i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \dots & a_k^{k-1} \\ a_1^{k+\alpha} & a_2^{k+\alpha} & \dots & a_k^{k+\alpha} \end{vmatrix}$$

obținut din determinantul VANDERMONDE prin suprimarea liniei de rang i și adăugirea liniei de un rang superior ultimei linii.

ING. F. NEDELCU.

6298. Se consideră pe o parabolă trei puncte A, B, C. Tangentele în aceste puncte la parabolă formează un triunghiu MNP (NP fiind tangenta în A, PM în B și MN în C). Prin B se duce o paralelă la axa parabolei care taie pe AC în L. Se cere:

1°. Să se arate că figura LMNP este un paralelogram.

2°. Că cercul circumscris triunghiului MNP trece prin focarul F al parabolei.

3°. Să se arate că dacă și L se află pe acest cerc, N se află pe directoarea paralelei.

4°. Presupunând că dreapta AC trece prin F și că dreapta BF este perpendiculară pe ea, să se găsească și să se construiască locul punctului L.

GH. TH. GHEORGHIU.

6299. Un conductor electric omogen, având rezistivitatea electrică φ are forma unei semisfere cu raza γ_1.

a) Să se calculeze rezistența electrică a conductorului opusă unui curent electric ce intră pe suprafața unui cerc cu raza a aflat în planul meridian.

b) Să se stabilească raza γ_0 a semisferei concentrice cu cercul a, pe care ar trebui să intre curentul în conductor astfel ca să rezulte aceeași rezistență electrică ca în cazul *a)*.

c) Să se repete calculele pentru cazul când raza γ_1, a conductorului tinde spre infinit.

A. AVRAMESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

August D. Nicu (6043, 47); *Căpraru C. Iulian* (6222); *Columbeanu D. P.* (6222, 62, 64, 82); *Constantinescu R. M.* (1270, 3699, 4558, 997, 5028, 72, 6251, 70, E, P); *Dănilă T.* (A, C); *Diaconu C. G.* (6222); *Doneaud E. A.* (6155, 262); *Eftode M. Ad.* (5521); *Furtunescu Dorin* (5599, 649, 6166); *Georgescu Răducanu* (P); *Marinescu E. E.* (5127, 901, 6173, 86, 216, 59, E, N, P); *Mihalache G. Const.* (5520, 924, 69, 6044, 47, 99, 111, 225); *Mihălcioiu M.* (5912, 28, 6111, 201, 22); *Mitroiu Em.* (6039, 101); *Moraite G. Al.* (6005, 173, 251); *Nedelcu Fl.* (P); *Pantazopol M. Silviu* (6222, 62); *Percea I. Fl.* (6027, 86, 87); *Pisanca N. I.* (6230, 43, E); *Puşcaşu M. Silviu* (6047, 173); *Soare V. M.* (4289, 6166, 73, 94, 227, 54, 64, 88, E); *Stăncescu Virgiliu* (6066, 102); *Stanciu I. Val.* (5914, 6036, 41, 101, 222, 28); *Ştefănescu D. Sofronie* (5792, 801, 6037, 86, 222, 33, E); *Tănăsescu S. C.* (6016, 83, 115, 29, 45, 66, 73, 81, 84, 86, 92, 93, 216, 22, 23, 49, 58, 59, 62, 71, 81, 86); *Udrea C. I.* (6200, 01, 23, 25); *Vasiliu M. Mircea*, (5915, 6086, 105, 222); *Velcescu A. M.* (6222); *Wegener N. E.* (P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 50 (cincizeci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 20.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 2.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X, XII, XV, XIV, XVI, XVII, XVII şi IX sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 4.500

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 12.500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 3.500

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 5.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 14.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 7.500

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 7.700

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 5.700

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 6.900

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 3.900

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 9.500

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 7.500

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul achitat până la 15 Decembrie 1946 este de 20.000 lei. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Decembrie 1946.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 10.000 lei pentru abonamentele plătite până la 15 Decembrie 1946. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Decembrie 1946.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 39.318.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 4. — DECEMBRIE 1946

SUMARUL

1. Teoreme din geometria triunghiului . . *Alex. V. Niculescu.*
2. Asupra problemei 5894 . . . . . *Şerban Gheorghiu.*
3. Congresul internaţional de mecanică aplicată dela Paris . . . . . *C. Iacob.*
4. Raport pentru decernarea premiului de istoria matematicii . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 7—8.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse
9. Probleme rezolvate: 1650, 4673, 5332, 5395, 5620, 5732, 5797, 6177.
10. Exerciţii: 10—12.
11. Probleme propuse: 6292, 6300—6309.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1946

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele două şedinţe lunare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Luni 16 Decemvrie, ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 5.
Luni 6 Ianuarie 1947, ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 5.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului Ll.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 100
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 4.500
— Medalia comemorativă, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 10.000

TEOREME DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

1. Datorez d-lui prof. DAN HULUBEI următoarea sugestie în legătură cu o problemă propusă la examenul de Mecanică din Octombrie 1945:

„Dacă Δ*-ul* ABC *are laturile paralele cu medianele* Δ*-ului* $A_1B_1C_1$, *atunci şi medianele* Δ*-ului* $A_1B_1C_1$ *sunt paralele cu* laturile Δ*-ului* ABC".

Voiu demonstra această chestiune în cazul particular, când Δ-ul $A_1B_1C_1$ este circumscris Δ-ului ABC şi voiu deduce de aci demonstraţia pentru cazul general; voiu arăta apoi câteva consecinţe în legătură cu această configuraţie, precum şi construcţia geometrică a *permutantelor* unui punct dat.

Considerând un sens de parcurs şi orientare pe laturile Δ-ului ABC, fie

$B_1C_1 \parallel BG$ şi trecând prin vârful A;
$C_1A_1 \parallel CG$ „ „ „ „ B;
$A_1B_1 \parallel AG$ „ „ „ „ C,

G fiind centrul de greutate al Δ-ului ABC.

Să arăt că Δ-urile $A_1B_1C_1$ şi ABC au acelaşi centru de greutate. Fie A' punctul unde AG taie latura A_1C_1, atunci figura BGA'G este evident un paralelogram şi avem: $BG \# A'C$; $AB_1 \# A'C$ deci $AB_1 \# BG$ şi prin urmare $AB \parallel A_1G$. Fie acum C' punctul de intersecţie al medianei CG cu latura B_1C_1; prin consideraţii analoage cu precedentele rezultă $GC' = GC$ şi cum $CC' \parallel A_1C$, deducem că B_1G e mediană în Δ-ul $A_1B_1C_1$. Reluând raţionamentul pentru dreptele A_1G şi C_1G, rezultă că G e centrul de greutate comun al celor două Δ-uri.

Aşa dar medianele Δ*-ului* $A_1B_1C_1$ *sunt paralele laturilor* Δ*-ului* ABC.

Observare. Avem aci o verificare a teoremei lui PAPPUS; în adevăr raportul pe care vârfurile A, B, C îl determină pe laturile respective ale Δ-ului $A_1B_1C_1$ este acelaşi, egal cu $^1/_2$.

2. Să considerăm acum un alt Δ-iu $A_2B_2C_2$, în planul Δ-ului $A_1B_1C_1$, şi omotetic cu acesta. Elementele lor corespondente fiind paralele şi în acelaşi raport de omotetie, rezultă demonstraţia teoremei propuse.

Consecințe. Se poate arăta acum imediat, folosind relațiile între laturi și mediane că

a) *Dacă* Δ-ul ABC *este dreptunghic, atunci între laturile* Δ-*ului* $A_1B_1C_1$ *avem relația* $b_1^2 + c_1^2 = 5a_1^2$ *și reciproc;*

b) *Triunghiurile* ABC *și* $A_1B_1C_1$ *sunt automediane* ($2a^2 = b^2 + c^2$) *în același timp.*

3. *Generalizare* [1]. *„Dacă* Δ-*ul* ABC *are laturile paralele cu un sistem de ceviene concurente ale* Δ-*ului* $A_1B_1C_1$, *atunci există un sistem de ceviene concurente în* Δ-*ul* ABC, *paralele respectiv cu laturile* Δ-*ului* $A_1B_1C_1$".

Voiu folosi pentru demonstrație coordonatele baricentrice, care vor pune în evidență legătura între cele două sisteme de ceviene, mai precis între punctele lor de concurență.

Fie ABC Δ-ul de referință:

$$(BC) \equiv \alpha = 0 \quad ; \quad (CA) \equiv \beta = 0 \quad ; \quad AB \equiv (\gamma) = 0$$

ecuațiile laturilor lui; $M(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un punct în planul Δ-ului și $A_1B_1C_1$, Δ-ul circumscris Δ-ului ABC, astfel că

$$B_1C_1 \parallel BM \quad ; \quad C_1A_1 \parallel CM \quad ; \quad A_1B_1 \parallel AM$$

Ecuațiile acestor laturi se obțin imediat și avem

$$(B_1C_1) \equiv \beta \cdot \gamma_0 + (\alpha_0 + \gamma_0) \cdot \gamma = 0$$

$$(C_1A_1) \equiv \gamma \cdot \alpha_0 + (\alpha_0 + \beta_0) \cdot \alpha = 0$$

$$(A_1B_1) \equiv \alpha \cdot \beta_0 + (\beta_0 + \gamma_0) \cdot \beta = 0$$

---

1) Iată o soluțiune geometrică a propoziținei § 3.

Fie P un punct în planul triunghiului ABC. Paralela dusă din A la dreapta BP întâlnește pe CP în Q. De asemeni, paralela dusă din Q laturei BC întâlnește pe AB în R, iar, paralela dusă din P laturei AC întâlnește pe AB în R*. Propoziținea revine la a arăta că punctele R și R* coincid.

C' fiind punctul comun laturei AB și cevianei CP avem evident.

$$\frac{\overline{C'R}}{\overline{C'Q}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'C}} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{C'R^*}}{\overline{C'P}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'C}} \quad \therefore \quad \overline{C'R} = \overline{C'R^*}.$$

In triunghiul APQ ale cărui laturi sunt paralele ca cevienele AP, BP și CP, cevienele QR, PR și AR sunt paralele respectiv laturilor BC, CA și BA.

(Ș. G.).

iar ecuațiile cevienelor care trec respectiv prin A_1, B_1, C_1 și paralele cu laturile AC, AB și BC sunt

$$\alpha . \alpha_0 - \beta (\beta_0 + \gamma_0) + \gamma\alpha_0 = 0$$

$$\alpha\beta_0 + \beta . \beta_0 - \gamma (\alpha_0 + \gamma_0) = 0$$

$$\alpha (\alpha_0 + \beta_0) - \beta\gamma_0 - \gamma . \gamma^0 = 0;$$

determinantul acestui sistem fiind nul, rezultă că cele trei ceviene sunt concurente. Intersectând primele două drepte, obținem pentru punctul lor de concurență M coordonatele

$$\frac{\alpha}{\gamma_0} = \frac{\beta}{\alpha_0} = \frac{\gamma}{\beta_0},$$

adică tocmai unul din permutantele punctului M_0 $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

Dacă luăm sensul de parcurs invers, în construcția paralelelor, găsim celălalt permutant $(\beta_0, \gamma_0, \alpha_0)$ al punctului M. *Am obținut astfel construcția geometrică a permutantelor unui punct dat* [1].

Observare. Printr'o rotație de 90°, în jurul lui M, obținem teorema ortologiei, de care aceste chestiuni sunt strâns legate.

Aplicații. Să presupunem că M coincide succesiv cu câte unul din punctele remarcabile ale Δ-ului ABC; vom obține atunci următoarele teoreme:

a) Permutantele ortocentrului unui Δ-iu sunt respectiv ortocentre în Δ-urile circumscrise (în sens direct și invers de parcurs) *Δ-ului dat cu laturile paralele înălțimilor;*

b) Permutantele centrului cercului înscris unui Δ-iu, sunt respectiv centrele cercurilor circumscrise Δ-urilor cu laturile paralele bisectoarelor Δ-ului dat;

c) Permutantele centrului cercului circumscris unui Δ-iu, sunt respectiv centrele cercurilor înscrise în Δ-ule circumscrise Δ-ului dat și având laturile paralele razelor duse la vârfurile Δ-ului;

d) Permutantele punctului lui BROCARD *al unui Δ-iu, sunt respectiv puncte* BROCARD *în Δ-urile circumscrise Δ-ului dat și având laturile paralele cevienelor punctului lui* BROCARD.

1) In manualele clasice: ROUCHÉ-COMBEROUSSE, HADAMARD, GUICHARD și F. G. M. n'am găsit această construcție, punctele permutante fiind definite pe cale analitică.

Aici putem face o precizare, anume: Dacă e vorba de punctul retrograd în Δ-ul ABC, atunci permutantul obținut prin construcția arătată (sens direct de parcurs) este punctul direct al lui BROCARD și în Δ-ul ABC și în Δ-ul $A_1B_1C_1$. (Δ-uri asemenea între ele).

De sigur că se pot face și alte extinderi și se pot găsi noi relații între elementele unui Δ-iu, calculând elementele geometrice ale Δ-urilor $A_1B_1C_1$.

ALEXANDRU V. NICOLESCU.

ASUPRA PROBLEMEI 5.894

Reamintesc, mai întâi teorema comparării seriilor. Fie:

(U) $\quad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

(V) $\quad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$

două serii cu termeni pozitivi. *Dacă, pentru* $n \geqq N$ (N *fix*) *avem*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

și dacă (V) *este convergentă și seria* (U) *este de asemeni convergentă. Analog, dacă pentru* $n \geqq N$ (N *fix*), *avem*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

și dacă seria (V) *este divergentă și seria* (U) *este de asemeni divergentă.* Demonstrația acestei propoziții este imediată.

Astfel, punem: $u_n = q_n v_n$ factorii q_n fiind evident pozitivi. In primul caz avem pentru $n \geqq N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q_{n+1} v_{n+1}}{q_n v_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad \therefore \; q_{n+1} \leqq q_n .$$

Rezultă:

$$u_N + u_{N+1} + \ldots \leqq q_N (v_N + v_{N+1} + \ldots),$$

iar seria din membrul al doilea fiind convergentă, urmează că și seria din primul membru este de asemeni convergentă.

In cel de al doilea caz, demonstrația este cu totul asemănătoare.

Acestea fiind reamintite, îmi propun să studiez seria:

$$u_n = \frac{(c+a)(2c+a)\ldots[(n-1)c+a]}{(c+b)(2c+b)\ldots[(n-1)c+b]}$$

a, b, c fiind positive. Această serie formează obiectul problemei 5.894 (G. M., Vol. L, pag. 231).

Relativ la seria considerată avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nc+a}{nc+b}.$$

Comparăm seria Σu_n cu seria armonică $v_n = \frac{1}{n}$. Pentru $0 \leqq a - b + c$ avem și:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} < \frac{nc+a}{nc+b} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

sau $$0 < (a-b+c)\,n + a.$$

Rezultă, că în acest caz seria Σu_n este divergentă.

Presupunem apoi $a - b + c < 0$, comparând cu seria $v_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ vom arăta că seria propusă este convergentă. Mai precis, ne propunem să arătăm că putem să determinăm pe α pozitiv, astfel ca pentru $n \geqq N$, N suficient de mare, să avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

sau $$\frac{nc+a}{nc+b} < \frac{n^{1+\alpha}}{(n+1)^{1+\alpha}}. \qquad (1)$$

Avem evident

$$(n+1)^{1+\alpha} = n^{1+\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} = n^{1+\alpha}\left[1+\frac{1+\alpha}{n}+\frac{O(n)}{n^2}\right],$$

$O(n)$ fiind o funcțiune de n ce tinde către o limită finită pentru $n \to \infty$. Inegalitatea (1) devine:

$$(nc+a)\left[1+\frac{1+\alpha}{n}+\frac{O(n)}{n^2}\right] < nc+b$$

$$\therefore \quad 0 < b - a - (1+\alpha)c + O_1(n) \qquad (2)$$

$O_1(n)$ fiind o funcţiune de n ce tinde către zero când $n \to \infty$. Deoarece am presupus că $b - a - c$ este mai mare decât zero, este clar că pentru $n \geqq N$, N suficient de mare, deci $O_1(n)$ suficient de mic în valoare absolută, putem determina pe α pozitiv, nu nul, astfel ca inegalitatea (2) să fie verificată. Rezultă, în definitiv, că seria Σu_n este convergentă.

* * *

Se obţine acelaşi rezultat căutând *direct* ordinul de mărime al lui u_n în raport cu n.

Observ, că pentru ca seria Σu_n să fie convergentă este *necesar* să avem $a < b$. Intr'adevăr, în cazul contrar sau $b \geqq a$, avem şi $u_{n+1} \geqq u_n$ de unde se deduce că seria considerată este divergentă, termenii săi nefiind descrescători.

In cele ce urmează admitem deci, că avem $a < b$. Punem:

$$\frac{nc + a}{nc + b} = 1 - \frac{b - a}{nc + b} = 1 - \theta_n.$$

Termenii θ_n sunt pozitivi, mai mici decât 1 şi tind către zero pentru $n \to \infty$. Se ştie că avem

$$\log(1 - \theta_n) = -\theta_n - \frac{1}{2} h_n \theta_n^2$$

h_n fiind factori pozitivi ce tind către 1 pentru $\theta_n \to 0$ sau $n \to \infty$.

In aceste condiţiuni, termenul general u_n devine:

$$u_n = e^{-\sum_1^{n-1} \theta_k - \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} h_k \theta_k^2}.$$

Se poate uşor demonstra, fie astfel cum se demonstrează existenţa *constantei lui* EULER, fie prin metoda CAUCHY, cu ajutorul unei integrale, că avem

$$(b - a) \int_1^n \frac{dx}{cx + b} \sim \sum_1^{n-1} \theta_k = \sum_1^{n-1} \frac{b - a}{kc + b} = \frac{b - a}{c} \log n + A_n$$

constantele A_n fiind finite şi având o limită finită pentru $n \to \infty$. De asemeni, avem

$$\frac{1}{2} \sum_1^{n-1} h_k \theta_k^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} h_k \frac{(b - a)^2}{(kc + b)^2} = B_n$$

B_n fiind finit şi având limită finită. Rezultă, de aci că:

$$u_n = C_n n^{-\frac{b-a}{c}} \quad (C_n = e^{A_n + B_n}).$$

Deci, pentru $b - a \leqq c$ seria este divergentă, iar pentru $b - a > c$ seria considerată este convergentă.

Este de remarcat, că atât soluțiunea publicată — soluțiune obținută cu ajutorul criteriului RAABE-DUHAMEL — cât și cele două soluțiuni, ce preced deși diferite ca formă, sunt în fond aplicațiuni ale aceleiași metode generale: metoda de comparare a seriilor.

Pe de altă parte, prin ultima soluțiune stabilindu-se ordinul de mărime al lui u_n în raport cu n se explică de ce primele două soluțiuni au reușit.

ȘERBAN GHEORGHIU.

CONGRESUL INTERNAȚIONAL DE MECANICĂ APLICATĂ DELA PARIS

Intre 22—29 Septembrie a. c., a avut loc la Paris cel de al 6-lea Congres internațional de mecanică aplicată. Această primă mare manifestare științifică dela încetarea războiului a reunit numeroși savanți, fiind o excelentă ocazie de luare de contact și de trecere în revistă a considerabilelor progrese realizate în mecanică în ultimii opt ani. Reamintim cu acest prilej că ultimele congrese internaționale de mecanică au avut loc în 1934 la Cambridge (Anglia) și în 1938 la Cambridge (Massachussets, U. S. A.).

Congresul dela Paris a fost organizat sub auspiciile Academiei de științe și a altor instituții științifice franceze, de către un comitet prezidat de d-l H. VILLAT, membru al Institutului Franței și profesor la Sorbonna. Ditre membrii comitetului de organizare menționăm pe d-nii LOUIS DE BROGLIE, creatorul mecanicei ondulatorii, laureat al premiului NOBEL, FREDERIC JOLIOT, cunoscutul cercetător în domeniul fizicei nucleare, laureat al premiului NOBEL, J. PÉRÈS, membru al Institutului, etc.

Participarea românească la congresele anterioare a fost redusă. La congresul din Cambridge (Anglia), ultimul ținut în Europa, singurul dintre compatrioții noștri care a luat parte a fost semnatarul acestor rânduri.

De data aceasta este înbucurător să constatăm că mai multe instituţii române de înaltă cultură şi-au putut trimite delegaţi. Academia Română a fost reprezentată de d-nii: Prof. Ing. N. VASILESCU-KARPEN, Prof. Ing. D. GERMANI, Prof. V. VÂLCOVICI; Universitatea din Bucureşti de d-nii: Prof. V. VÂLCOVICI şi GR. C. MOISIL; Universitatea din Cluj de d-l Prof. C. IACOB; Politehnica din Bucureşti de d-nii: Prof. P. SERGESCU şi Prof. E. CARAFOLI şi Institutul de Aerodinamică din Bucureşti de d-nii: Prof. V. VÂLCOVICI, Prof. E. CARAFOLI, Ing. I. CÂRSTOIU şi Prof. I. STROESCU.

Delegaţii români au sosit la Paris cu oarecare întârziere din cauza dificultăţilor de transport. Totuşi, prin modificarea programului, ei şi-au putut desvolta comunicările în secţiunile congresului, o şedinţă de secţiune fiind chiar prezidată de un delegat român, d-l Prof. E. CARAFOLI. S'au făcut următoarele comunicări:

Prof. N. VASILESCU-KARPEN: *L'adhérence du fer au béton dans le béton armé. Mesure pratique de l'adhérence.*

Pof. D. GERMANI: *Sur les lois de similitude.*

Prof. V. VÂLCOVICI — Prof. I. STROESCU: *Un nouveau tunnel aérodynamique.*

Prof. E. CARAFOLI: 1. *Solutions explicites pour les caractéristiques aérodynamiques des ailes d'envergure finie.* 2. *Vérifications expérimentales des profils de forme générale.*

Prof. GR. C. MOSIL: *Hydrodynamique plane des liquides visqueux.*

Prof. C. IACOB: *La méthode hodographique en mécanique des fluides compressibles.*

Prof. I. CÂRSTOIU: *Le mouvement rotationnel d'un fluide.*

La şedinţa de închidere a congresului în numele delegaţilor români a vorbit d-l Prof. Ing. N. VASILESCU-KARPEN.

C. IACOB.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ISTORIA MATEMATICII

Imprejurările grele prin care trecem, scumpetea aproape prohibitivă a imprimeriei, lipsa de hârtie, au împiedecat publicarea în ritm normal a lucrărilor ştiinţifice. Multe periodice matematice

şi-au încetat apariţia, alte le-au redus simţitor numărul paginilor imprimate. Această restrângere a făcut să se dea precădere publicării articolelor de strictă specialitate, lăsând pentru mai târziu înserarea studiilor de istoria matematicii.

Chiar şi la *Gazeta Matematică*, avem câteva manuscrise de istoria matematicii, care au fost acceptate, dar care-şi aşteaptă de multă vreme rândul la tipărire. Aceasta face că în anul curent nu avem de relevat publicaţii de istoria matematicii.

Dar, dacă nu s'au imprimat, totuşi s'au făcut numeroase studii în această disciplină. Ele vor fi publicate când timpurile o vor îngădui.

Deocamdată, noi suntem nevoiţi să cercetăm manuscrisele de care am luat cunoştinţă, ca să facem propunerile în vederea acordării primului premiu de istoria matematicii, decernat de *Gazeta Matematică*.

Intre aceste manuscrise, acelea care ne-au atras luarea aminte cu deosebire, sunt ultimele lucrări ale d-lui Prof. VICTOR MARIAN, conferenţiar la Universitatea din Cluj. Dânsul a scris un studiu amplu asupra Vieţii şi operei lui I. NEWTON, destinat revistei proiectate la congresul al treilea al matematicienilor români, revistă care n'a putut apare încă.

De asemeni, la redacţia *Gazetei Matematice* a trimis câteva articole în legătură cu trecutul matematicei româneşti.

Activitatea de istoric al matematicii, desfăşurate de d-l Prof. VICTOR MARIAN, este în deobşte cunoscută. Pe lângă numeroase studii, îi datorim singura traducere integrală a lui EUCLID în româneşte, cu note şi comentarii, precum şi traducerea nemuritoarelor Principia ale lui NEWTON, care aşteaptă încă lumina tiparului.

Credem că d-l VICTOR MARIAN este cel mai îndreptăţit cercetător român la recunoaşterea activităţii meritelor sale de istorie a matematicii.

De aceea propunem să i se decearnă premiul pe 1946 de Istoria Matematicii.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI
DE ISTORIA MATEMATICII

Ing. I. S. ANTONIU, I. IONESCU, Prof. PETRE SERGESCU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea Generală din 26 August 1946 a *Gazetei Matematice*.

NOTE MATEMATICE

7. *O teoremă a lui* NEUBERG şi GOB [1]. 1°. Fie P_a, P_b, P_c şi Q_a, Q_b, Q_c proiecţiile a două puncte oarecare P şi Q din planul triunghiului ABC pe laturile BC, CA, AB. Fie încă M extremitatea unui vector $\overline{AM}$ echipolent lui $\overrightarrow{PQ}$, N_a şi M_a proiecţiile lui M pe AC şi AB. Avem

$$\overline{AM_a} = \overline{P_c Q_c} \quad \text{şi} \quad \overline{AN_a} = \overline{P_b Q_b}$$

presupunând că sensurile pozitive sunt pe AC şi AB. Dacă se ia pe AB şi AC punctele D şi E aşa încât

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{P_b Q_b}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{P_c Q_c}} = k \tag{1}$$

se deduce

$$\overline{AD} \cdot \overline{AM_a} = \overline{AE} \cdot \overline{AN_a}$$

din D, E sunt transformatele lui M_a, N_a în inversiunea $(A, \overline{AE} \cdot \overline{AM_a})$; dar M_a şi N_a sunt pe cercul de diametru AM a cărui inversă este dreapta DE; deci DE este perpendiculară pe diametrul AM şi prin urmare pe PQ. După (1), triunghiurile AED şi $AM_a N_a$ sunt asemeni, raportul de similitudine fiind $|k|$, raza cercului circumscris triunghiului AED este deci $|k|\frac{PQ}{2}$. Aceasta demonstrează teorema lui NEUBERG şi GOB [2].

2°. Când $k = 2$, raza cercului circumscris triunghiului $AM_a N_a$ este egală cu PQ, ca şi razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $BM_b N_b$, $CM_c N_c$, obţinute la fel. Dacă w_a, w_b, w_c sunt centrele acestor cercuri, Ax înălţimea triunghiului $AM_a N_a$, avem egalităţile de unghiuri

$$(AP, PQ) = (Ax, AN_a) + (AP, AQ) = (AM_a, Aw_a) + (AP, AC)$$

şi

$$(PA, Aw_a) = (AM_a, Aw_a) + (AB, AP).$$

Dacă $(AB, AP) = (AP, AC)$, adică *dacă* P *coincide cu centrul* I *al cercului înscris în* ABC, *patrulaterele* $AIQw_a$, $BIQw_b$, $CIQw_c$ *sunt trapeze ale căror laturi egale sunt simetrice faţă de*

1) *Journal de G. de* LONGCHAMPS, 1888—49.

2) V. THÉBAULT. *Gazeta Matematică*. Vol. XXXVI, pag. 361.

laturile triunghiului cu vârfurile în punctele A_1, B_1, C_1 *intersecțiile bisectoarelor* AI, BI, CI *cu cercul* (O) *circumscris triunghiurilor* ABC, $A_1B_1C_1$ *și reciproc.*

Rezultă că dreptele Aw_a, Bw_b, Cw_c *concură într'un punct* F *de pe cercul* (O) [1] *și că prin urmare tangentele în* A, B, C *la cercurile* (w_a), (w_b), (w_c) *concură în punctut* F' *diametral opus lui* F *în cercul* (O). Punctul F este anticomplimentar ortopolului dreptei IQ iar F' anticomplimentar ortopolului perpendicularei în I pe IQ, pentru triunghiul $A_1B_1C_1$. Mai mult, din cauza paralelismului laturilor triunghiului $w_a w_b w_c$ cu bisectoarele AI, BI, CI ale triunghiului ABC, *laturile acestor două triunghiuri sunt văzute din* Q *și* I *sub unghiuri egale. Dacă* ABC *este echilateral, punctul* Q *coincide cu unul din centrele isogoane ale triunghiului* $w_a w_b w_c$.

V. THÉBAULT.

8. *Asupra identităților de la Cap. VI Prob. Nr. 33 și 34. (C. P. Trigonometrie P. I.).*

Formulele lui EULER și LEGENDRE date respectiv de Problemele Nr. 33 și 34 dela Cap. VI. (C. P. Trig. P. I.°) se obțin și fără a face uz de valorile liniilor trigonometrice ale arcelor din acele formule, servindu-ne de identitățile generale

$$\sin a + \sin\left(a+\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(a+\frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left[a+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = 0$$

$$\cos a + \cos\left(a+\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(a+\frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left[a+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = 0$$

(Trigonométrie par BOURLET. Ex. [2] 32, pag. 107).

Intr'adevăr, pentru $n=5$, *din prima identitate generală* se obține

$$\sin a + \sin(a+72^0) + \sin(a+144^0) + \sin(a+216^0) + \sin(a+288^0) = 0,$$

sau

$$\sin a + \sin(72^0+a) + \sin(36^0-a) - \sin(36^0+a) - \sin(72^0-a) = 0;$$

1) J. NEUBERG, *Mathesis*, 1885—143 și 1886—142.

2) Aceste exerciții se probează imediat, deoarece fiind respectiv o sumă de sinusuri și de cosinusuri de arce în progresie aritmetică cu rația $\frac{2\pi}{n}$, valorile respective ale sumelor sunt nule, având $\sin\frac{nr}{2} = \sin\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{n} = 0$.

iar, *din a doua identitate generală*, avem

$$\cos a + \cos(a+72^0) + \cos(a+144^0) + \cos(a+216^0) + \cos(a+288^0) = 0,$$

sau

$$\cos a + \cos(72^0+a) - \cos(36^0-a) - \cos(36^0+a) + \cos(72^0-a) =$$

$$\cos a + \sin(18^0-a) - \sin(54^0+a) - \sin(54^0-a) + \sin(18^0+a) = 0,$$

G-RAL GH. LITEANU.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVI. Nr. 9. Noembrie 1946. MARIA NEUMANN. Asupra unor proprietăţi ale iperbolei şi aplicaţiile lor. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

M. ST. BOŢEZ. Contribuţie pentru o simplificare a sistemului de proiecţie MONGE, într'un caz special. (Ext. Rev. Ştiinţifică „V. Adamachi" Vol. XXXII).

M. ST. BOTEZ. Remarcă asupra metodei KUBOTA. (Ext. Revista Matematică din Timişoara, Vol. XXIV).

M. ST. BOTEZ. Sur une surface cerclée particulière. (Ext. Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi" Vol. I).

CERERI

Răspuns la cererea 245 (Gazeta Matematică XL, 309). Se întreba ce se ştie de profesorul de matematici BASAKKE, scris uneori BAYAR, alteori BAYARD care a profesat pe la 1831 la Pensionul dela Miroslava de lângă Iaşi.

In lucrarea *Oraşul Iaşi* monografia istorică şi socială, ilustrată de N. A. BOGDAN — ediţia a doua — la pagina 21, se reproduc relaţiile date de GHEORGHE SEULESCU asupra ruinelor Iaşilor şi anume :

...„ *Intre alte descoperiri mi-au arătat răposatul inginer* G. BAYARDI, *că însărcinat fiind el cu facerea zidului, ridicat din partea despre grădina Curţii Domneşti, aicea săpându-se au dat peste o catacombă boltită, în care pe lângă mai multe picturi şi reliefuri arheologice, ar fi aflat şi un sarcofag de piatră, în el un schelet şi mai multe lucruri antice*".

La pagina 56, găsim :

...„ *După aceasta, în 1819, un inginer italian* GIUSEPPE BAYARDI, *a ridicat un plan ichnographic al Iaşului şi împrejurimilor sale, de pe care se găseşte astăzi numai o copie manuscrisă la Biblioteca Centrală din localitate, donată de fostul primar al Iaşului* SCARLAT PASTIA, *planul original găsindu-se între hârtiele fostului arheolog* LT.-COLONEL PAPAZOGLU *din Bucureşti*".

Acest plan se află reprodus în facsimile la pagina 368 şi are următoarea dedicaţie:

„Dedicat Alteţei Sale Serenissime Monseniorul Principe Domnitor al Moldovei MIHAIL *de* GRIGORIE ŞUŢU, *de către prea umilitul şi prea supusul servitor* IOSEPH DE BAJADI, *Inginer*".

La pagina 84, se găseşte descris capitolul:

„Uliţele din Iaşi, la 1819, după planul dresat de G. BAYARDI".

Mai departe la pagina 267, găsim:

... *„La 1831, cel dintâi român ce 'şi ia sarcină de a înfiinţa o şcoală particulară, e sulgerul* TEODOR BURADA, *care deschide o Pensioane de nobile Demoazele, iar la Miroslava lângă Iaşi, trei franţuji,* LINCOURT, CHEFNEUX *şi* BAYARD, *înfiinţează un asemenea pension pentru băeţi...*"

Iar la pagina 466, din nou găsim:

... *„Pe tapşanul cel mai inalt al dealului Galata este situată cotuna Miroslava, care în unele timpuri îşi avu numele mai bogat în seamă decât alte comune apropiate de Iaşi, prin faptul că, în nişte vechi curţi boereşti, a proprietarului moşiei de sigur, se instalase un Institut superior de educaţie de către trei profesori franceji, veniţi în Iaşi după dezastrul lui* NAPOLEON CEL MARE *din Rusia. De* LINCOURT, CHEFNEUX *şi* JOSEPH BAYARD *deschisese aici pe la 1830, un fel de Pensionat-Gimnaziu, în care se învaţă limbele streine, cele mai căutate în acele vremi, franceza, germana şi greceasca, cum şi matematicile, gramatica, geografia, istoria, etc...*"

Din cele extrase mai sus se desprinde faptul că există o contrazicere asupra originei lui G. BAYADI (JOSEPH de BAJARDI, BAYARD.), căci în unele locuri este scris Inginer Italian — iar în alte părţi — profesor francez.

Fapt cert este că acel profesor la şcoala din Miroslava — a fost în primul rând inginer —, după cum reese din documente (planul ichnografic al laşului şi împrejurimilor sale) şi atunci de sigur a fost şi profesor de matematici la Pensionul din Miroslava ţinând seama de specialitatea sa, ingineria.

MAIOR EUG. ŞT. IACOB.

DIVERSE

a) Redacţionale

Relaţia (4) din articolul: *Varietăţi osculatoare la curbe normale parabolice* (*Gazeta Matematică*, Vol. LI pag. 109) a fost dată anterior de d-l prof. D. BARBILIAN cu ocazia rezolvării problemei 4890, (*Gazeta Matematică*, Vol. XLVII pag. 177 formula (6)).

b) Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"

In Adunarea Generală Extraordinară dela 9 Decembrie 1946 au fost aleşi ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* Domnii: Ing. D. BOIANGIU; Ing. ANASTASE LASCARIDE; Licenţiat în matematici MARIN I. POPA; Ing. ALEX. ŞCODRANU şi Ing. P. VARLAM.

c) **Cedarea dreptului de autor**

Doamna IULIA V. CRISTESCU, soţia decedatului membru fondator Ing. V. CRISTESCU, a cedat societăţii *„Gazeta Matematică"*, toate drepturile ce-i revin din vânzarea *Culegerelor de Probleme de Trigonometrie*, pentru sporirea fondului premiului de trigonometrie „V. Cristescu".

De asemeni d-l general GH. LITEANU a cedat în acelaşi scop, toate sumele ce-i revin din vânzarea *Culegerii de Probleme de Trigonometrie Sferică.*

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1650. *Care sunt ecuaţiile algebrice ireductibile şi cu coeficienţi reali, care admiţând rădăcina* α *admit şi rădăcina* $1/\alpha^{s^r}$, r *şi* s *fiind două numere prime pozitive şi* $r \neq 2$?

N. PRAPORGESCU.

Insemnând pentru prescurtare $\overline{\alpha^{s^r}} = \theta(\alpha)$ ecuaţia ireductibilă căutată admiţând rădăcinile α şi $\theta(\alpha)$ admite şi rădăcinile $\theta\theta(\alpha) = \theta^2(\alpha)$, $\theta\theta^2(\alpha) = \theta^3(\alpha)$... Numărul acestor rădăcini fiind limitat se demonstrează [1] că trebue să avem $\theta^m(\alpha) = \alpha$, adică

$$\alpha^{(-s^r)^m} = \alpha$$

α trebue prin urmare să verifice o ecuaţie de forma $x^{n'} - 1 = v$, în care s'a pus $n' = (-s^r)^m - (-1)^m$ sau o ecuaţie de aceeaşi formă

$$P(n) = x^n - 1 = 0$$

n fiind un divizor al lui $n!$ Această ecuaţie este reductibilă.

Se ştie [2] însă că polinomul din primul membru se descompune în factori primi ireductibili astfel:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = Q(n) \cdot Q(n_1) \cdot Q(n_2) \ldots,$$

în care $n_i = n : d_i$, d_i este un divizor al lui n cu i factori numere prime, diferite între ele şi

$$Q(n) = \frac{P(n) \cdot \Pi P(n_2) \cdot \Pi P(n_4) \ldots}{\Pi P(n_1) \cdot \Pi P(n_3) \ldots}$$

1) A. VOGT: *Le cours sur le résolution algébrique des équations*, pag. 127.

2) Se va vedea soluţia problemei 1735, propusă la pag, 464 vol. XVI.

iar $Q(n_i)$ are o expresie similară, n înlocuindu-se prin n_i, între divizorii lui n_i nefiind cuprinşi aceia care intră în compunerea lui d_i.

α trebue prin urmare să anuleze unul din polinoamele ireductibile cu coeficienţi întregi $Q(n_i)$. Ecuaţia căutată este deci $Q_i(x) = Q(n_i) = 0$, care dă rădăcinile primitive ale ecuaţiei $P_i(x) = P(n_i) = x^{n_i} - 1 = 0$ şi care este ecuaţia binoamă de gradul cel mai mic satisfăcută de α. Polinomul Q_i fiind ireductibil α nu poate să mai anuleze vreun altul din polinoamele Q.

Dacă $n_i = p^k \cdot p'^{k'} \ldots$, $p, p', \ldots$ fiind numere prime, se ştie[1] că rădăcinile primitive ale ecuaţiei $P_i = 0$, adică rădăcinile ecuaţiei $Q_i = 0$ sunt egale cu produsul rădăcinilor primitive $\omega, \omega', \ldots$ respectiv ale ecuaţiilor

$$x^{p^k} - 1 = 0 \ , \ x^{p'^{k'}} - 1 = 0, \ldots \qquad (1)$$

Dacă apoi $g, g', \ldots$ reprezintă câte o rădăcină primitivă a congruenţelor

$$x^{\varphi(p^k)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^k}, \ x^{\varphi(p'^{k'})} - 1 \equiv 0 \pmod{p'^{k'}} \ldots \qquad (2)$$

se ştie[2] de asemenea că şirurile:

$$\begin{aligned} &\omega, \omega^g, \omega^{g^2}, \ldots \omega^{g^{\varphi(p^k)-1}} \\ &\omega', \omega'^{g'}, \omega^{g'^2}, \ldots \omega'^{g'^{\varphi(p'^{k'})-1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (3)$$

reprezintă rădăcinile primitive ale ecuaţiilor (1), aşa că rădăcinile primitive ale ecuaţiei $P_i(x) = 0$ se pot scrie sub forma:

$$\omega^{g^a}, \ \omega'^{g'^{a'}} \ldots$$

a, a' luând respectiv valorile $0, 1', 2 \ldots [\varphi(p^k) - 1]$ $0, 1, 2, \ldots [\varphi(p'^{k'}) - 1]$.

Rădăcinile congruenţelor (2) sunt toate numerile întregi mai mici şi prime respectiv cu $p^k, p'^{k'}, \ldots$[3]. Dacă p^k este cel mai mic din factorii lui n_i, atunci toate numerile întregi mai mici ca p^k şi prime cu $p, p', \ldots$ sunt rădăcini comune ale congruenţelor (2). Din acestea, acelea care nu verifică congruenţe de aceeaş formă (2) de un grad mai mic ca $\varphi(p^k)$ sunt rădăcini primitive comune ale congruenţelor (2); fie s una din acestea.

---

1) P. BACHMANN : *Die Lehre von der Kreistheilung*, pag. 17.
2) P. BACHMANN : loco cit., pag. 44.
3) P. BACHMANN : loc. cit., pag. 29.

Punând $\alpha = \omega \cdot \omega' \ldots$ şirul

$$\alpha, \alpha^s, \ldots \alpha^{s'^{4-1}} \qquad (4)$$

reprezintă μ rădăcini primitive ale ecuaţii $P_i(n) = 0$, μ fiind cel mai mic multiplu comun al numerelor $\varphi(p^k)$, $\varphi(p'^{k'})$, ...

Dacă se înlocueşte α prin $\alpha_r = \alpha^{s^r}$ atunci şirul

$$\alpha_r, \alpha_r^s, \ldots \alpha_r^{s'^{4-1}}$$

reprezintă tot şirul (4) scris în altă ordine.

Celelalte rădăcini ale ecuaţiei $Qi = 0$ se exprimă prin alte şiruri similare cu (4), înlocuind pe α prin anumite valori μ, γ, ... din şirul (3)' diferite între ele şi diferite de acelea cuprinse în (4) [1]. Aceste şiruri în număr de $\varphi(n_i)$: μ, ne dau toate cele $\varphi(n_i)$ rădăcini ale polinomului Q_i.

Cantităţile α, s, r şi m nu sunt complet independente. Dacă se dă s şi r, atunci m trebue aşa fel ales ca unul sau mai mulţi factori primi ai lui n' să admită pe s ca rădăcină primitivă comună, iar α să verifice o ecuaţie binomă de un grad egal cu produsul acestor factori.

Exemplu: Pentru $s = 2$, $r = 2$, $m = 3$ se găseşte $n' = 65 = 5 \times 13$; 2 fiind rădăcină primitivă comună factorilor 5 şi 13 putem lua $n = 5 \times 13$. Avem apoi $d_1 = 13, 5$; $d_2 = 5, 13$; $n_1 = 5, 13$; $\mu = 12$, $\varphi(n) = 12 \times 4 = 48$; $\alpha^{65} - 1 = 0$, $\omega^5 - 1 = 0$, $\omega'^{13} - 1 = 0$; $P(65) = x^{65} - 1$ $s\alpha$.

$$Q(65) = \frac{P(65) \cdot P(1)}{P(5) \cdot P(13)}$$

precum şi $\alpha = \omega\omega'$, $\mu = \omega\omega'^2$, $\gamma = \omega\omega'^{2^2}$, $\gamma = \omega\omega'^{2^2}$. Rădăcinile polinomului Q (65) în număr de 48 sunt:

$\alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{2^{11}}$; $\mu, \mu^2, \ldots \mu^{2^{11}}$; $\gamma, \gamma^2, \ldots \gamma^{2^{11}}$ şi $\delta, \delta^2, \ldots \delta^{2^{11}}$.

Rădăcinile α sunt toate numere complexe, ca atare ele sunt conjugate două câte două. Pe de altă parte dacă $\alpha = a + bi$, avem $a - bi = 1/(a + bi)$, deoarece $a^2 + b^2 = 1$, afixul punctului $a + bi$ aflându-se pe cercul de rază egală cu unitatea, α fiind o rădăcină a unităţii. Rezultă astfel, că dacă α este o rădăcină a ecuaţiei căutate, nu numai α^{s^r} dar şi α^{-s^r} sunt rădăcini ale aceleiaşi ecuaţii.

1) H. VOGT loc. cit., pag. 128.

In general ecuația $Q_i = 0$ fiind o ecuație *abeliană* de tipul cel mai simplu, rădăcinile ei se pot scrie sub forma funcțională,

$$\theta^a \theta'^{a'} \ldots (\alpha) = \omega^{g^a} . \omega'^{g'^{a'}} \ldots \qquad (5)$$

în care $\theta = \omega^g . \omega' \ldots$, $\theta' = \omega . \omega'^{g'} \ldots$, relația precedentă fiind independentă de ordinea în care se aplică operațiile funcționale $\theta, \theta', \ldots$, iar $a, a', \ldots$ fiind întregi pozitive.

Dacă un număr oarecare din factorii primi ai lui n, de pildă trei din ei p, p', p'' au o rădăcină primitivă comună g, atunci vom lua

$$a' = a + b', \quad a'' = a + b''$$

b' și b'' având valori întregi determinate și operația funcțională (5) devine :

$$\theta^a \theta'^{a'} \theta''^{a''} \ldots \theta'^{b'} \theta''^{b''} (\omega\omega' \ldots) = (\omega\omega'^{g^{b'}} \omega''^{g^{b''}})^{g^a} \omega'''^{g'''^{a'''}} \ldots (5')$$

$$= \theta_3^a \theta'''^{a''} \ldots (\omega\omega'^{g^{b'}} \omega''^{g^{b''}} . \omega''' \ldots),$$

în care primele trei operații s'au contractat în una singură

$$\theta\theta' \theta'' = \theta_3 = (\omega\, \omega'\, \omega'')^g$$

a având μ valori, μ fiind cel mai mic multiplu comun al numerelor $\varphi(p^k), \varphi(p'^{k'}) \varphi(p''^{k''})$, iar b', b'' având împreună $\varphi(p^k p'^{k'} p''^{k''})$: μ valori.

Expresiile (5) și (5)' sunt forma cea mai generală a rădăcinilor primitive ale ecuațiilor binoame.

N. PRAPORGESCU.

Soluții bune au trimis în anul 1913 d-nii S. PAȘCANU și D. STAN.

PROBLEMA 4673. *Să se stabilească vitesa în km/oră a avionului care sburând dealungul unei paralele date, la o înălțime constantă dată, trece deasupra fiecărui punct al paralelei la ora 12.*

Nu se va ține seama de variația densității atmosferei în raport cu înălțimea.

ALEXANDRU D. BUNESCU.

Soluție dată de d-l EUGEN MARCOVICI (Iași).

Avionul fiind deasupra unui punct de pe paralel *în același timp* cu soarele, va trebui să aibe o mișcare uniformă circulară *dela est către vest* cu o vitesă unghiulară *egală* cu aceea a rotației pământului.

Fie v vitesa căutată, R raza pământului, λ latitudinea, h înălţimea dela sol a avionului, r raza cercului descris de avion.

Avem:

$$v = r\omega = (R + h)\,\omega \cos\lambda.$$

Dar:

$$\omega = \frac{2\pi}{24} = 0{,}2618 \frac{\text{radiani}}{\text{oră}} \quad ; \quad R = 6370 \text{ km}.$$

$v = 0{,}2618\,(6370 + h)\cos\lambda$ în km/oră, h fiind exprimat în km.

In general h este foarte mic în raport cu R şi deci se poate lua:

$$v = 1667 \cos\lambda \frac{\text{km}}{\text{oră}}.$$

La ecuator: $\lambda = 0$ $v = 1667$ km/oră.

Pentru $\lambda = 45^0$ (aproximativ paralelul ce trece prin Bucureşti)

$$v = 1178 \text{ km/oră}.$$

AL. ST.

Problema a fost rezolvată şi de d-l G. G. CONSTANTINESCU, când era student.

PROBLEMA 5332. *Care sunt patrulaterele inscriptibile într'un cerc ale căror laturi sunt laturi ale poligoanelor regulate convexe înscrise în cerc?*

I. IONESCU.

Fie poligoanele regulate convexe de câte x, y, z, t laturi cu ale căror laturi se pot forma patrulatere ABCD înscrise într'un cerc O. Este evident că 2 sau mai multe din cele 4 laturi ale patrulaterului pot fi egale între ele. Unghiurile la centru AOB, BOC, COD, DOA au respectiv valorile $\frac{2\pi}{y}, \frac{2\pi}{x}, \frac{2\pi}{z}, \frac{2\pi}{t}$, iar suma lor este 2π aşa ca între numerele x, y, z, t avem relaţiunea

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1 \qquad (1)$$

şi atunci răspunsul la problemă este că vor fi atâtea patrulatere în condiţiile enunţului câte din grupele de soluţii întregi are ecuaţia (1) sunt laturi de poligoane regulate.

D-l ST. D. CETĂŢEANU a rezolvat problema în felul următor pentru câte-va cazuri particulare.

1°. Să presupunem că avem 2 laturi de triunghiu echilateral. Ele subîntind arce de $2 \times 120 = 240°$. Mai trebue să găsim 2 laturi de poligoane regulate care să subîntindă 12°. Acestea sunt cel mult 2 laturi de exagon regulat căci $3 \times 60° = 120°$, sau o latură de pătrat şi una de duodecagon regulat căci $90° + 30° = 120°$.

2°. Să presupunem că avem o latură de triunghiu echilateral şi una de pătrat. Ele subîntind $120° + 90° = 120°$. Restul de 150° pot fi subîntinse de o latură de pătrat şi una de exagon regulat.

3°. Putem avea 4 laturi de pătrat căci $4 \times 90° = 360°$.

La această soluţie parţială a d-lui ST. CETĂŢEANU mai trebue de adăugat că cu un grup de soluţii ale ecuaţiei (1) se pot construi mai multe patrulatere *diferite între ele.* Aşa de exemplu pentru soluţia dela 1° să însemnăm cu T latura triunghiului echilateral cu E, P şi D laturile exagonului, duodecagonului şi a patratului. Vom avea soluţiile următoare diferite între ele: TTEE, TETE, TTPD, TDTP, etc. I. I.

Problema a fost redijată de regretatul I. IONESCU şi dată la redacţie la 1 Iulie 1946.

PROBLEMA 5395. *Fie:*

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei $P(x) = 0$ *ştiind că*

$$P(1) = a_1 \quad , \quad P(2) = a_2 \quad , \quad P(3) = a_3 ,$$

$$a_1, a_2, a_3$$

fiind trei numere în progresie geometrică.

EMILIAN MEREUŢĂ.

Soluţie dată de d-ra LIDIA M. TUDORAN şi d-nii: I. ANDONIU (Liceu Bucureşti), N. ANDRIEVICI (student Iaşi), M. R. CONSTANTINESCU (Liceul Ploeşti), C. DEAC, P. P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar Iaşi), RADU V. MARTAC (student Bucureşti), DORU MUSCELEANU (Liceul Caracal), C. PANTELIMON (Şcoala Ofiţeri A. C. A.), FLORIAN POPESCU (Bucureşti), I. GH. RADOSLAV (student Bucureşti), N. ŞTEFĂNESCU, GH. SBÂRNEA (Liceul Tecuci), V. N. ŢAPU, SLT. ŞTEFAN TILICĂ, D. GH. VASILIU (Liceul Militar Iaşi) şi RADU P. VOINEA (Liceul Craiova).

a_1, a_2, a_3 fiind trei numere în progresie geometrică

$$a_2 = a_1 q \quad \text{şi} \quad a_3 = a_1 q^2$$

iar: $P(1) = a + b + c = a_1$; $P(2) = 4a + 2b + c = a_1 q$

$$P(3) = 9a + 3b + c = a_1 q^2$$

Rezolvând acest sistem în raport cu a, b, c găsim:

$$a = \frac{1}{2} a_1 (q-1)^2 \; ; \; b = -\frac{1}{2} a_1 (q-1)(3q-5) \; ; \; c = a_1 (q^2 - 3q + 3).$$

Pentru a studia natura rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$, vom calcula expresiile lui R, P, S

$$R = b^2 - 4ac = \frac{1}{4} a_1^2 (q-1)^2 (q^2 - 6q + 1)$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{2(q^2 - 3q + 3)}{(q-1)^2} \quad \text{și} \quad S = -\frac{b}{a} = \frac{3q-5}{q-1}$$

deci:

$R \geqslant 0$ când $q \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ sau $q \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$

$R \leqslant 0$ „ $3 - 2\sqrt{2} \leqslant q \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$

$P > 0$ oricare ar fi q real iar:

$S \geqslant 0$ când $q \leqslant 1$ sau $q \geqslant \frac{5}{3}$

$S \leqslant 0$ „ $1 \leqslant q \leqslant \frac{5}{3}$

discuția completă ne este dată de tabloul

q	R	P	S	Natura rădăcinilor
$-\infty$				
	+	+	+	reale
$3 - 2\sqrt{2}$	0	+	+	reale și egale, $x = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$
	—			
1	0			
	—			imaginare
$\frac{5}{3}$				
	—			
$3 + 2\sqrt{2}$	0	+	+	reale și egale, $x = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$
	+	+	+	reale
$+\infty$				

Domnii: C. D. EFTIMIE (elev-inginer Bucureşti), MIRCEA C. NICULESCU (Liceul Titu Maiorescu Bucureşti), pornind dela proprietatea cunoscută că $a_1 a_3 = a_2^2$, au calculat realizantul în funcţie de a şi b şi apoi, au separat planul în regiuni după valorile lui a şi b.

Nota. Deşi problema propusă este de puterea unui elev de clasa V, totuşi o bună parte din soluţiile primite au fost fie eronate fie sumar tratate.

E. M.

PROBLEMA 5620. M *fiind un punct în planul triunghiului* ABC, *iar* O *centrul cercului circumscris, să se arate că avem:*

$$\Sigma\, a^2 (\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2) = 16\, S^2 \cdot \overline{MO}^2.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

Fie $A_0 B_0 C_0$ triunghiul median al triunghiului ABC, $A'B'C'$ triunghiul podar al lui M, A_1, B_1, C_1 proiecţiile lui O pe MA', MB', MC', α, β, γ proecţiile lui 0 pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Voi face mai întâi câteva observaţii.

Triunghiul $A_1B_1C_1$ este înscris în cercul de diametru OM. Vom avea deci

$$\sphericalangle C_1 A_1 B_1 = 180 - C_1OB_1 = \sphericalangle A$$
$$\sphericalangle A_1 B_1 C_1 = \sphericalangle A_1 OC_1 = \sphericalangle B$$
$$\sphericalangle B_1 C_1 A_1 = \sphericalangle B_1 OA_1 = \sphericalangle C$$

Triunghiul $A_1 B_1 C_1$ este deci asemenea cu ABC. Vom avea deci

$$\frac{a}{\overline{B_1C_1}} = \frac{b}{\overline{C_1A_1}} = \frac{c}{\overline{A_1B_1}} = \frac{2R}{\overline{OM}} \qquad (1)$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{OM}^2 \cdot \sin A \sin B \sin C. \qquad (2)$$

Din triunghiul BMA deduc

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{AB} \cdot \overline{C'C_0} = 2c\,\overline{C'C_0} \qquad (3)$$

Analog din triunghiul CMA:

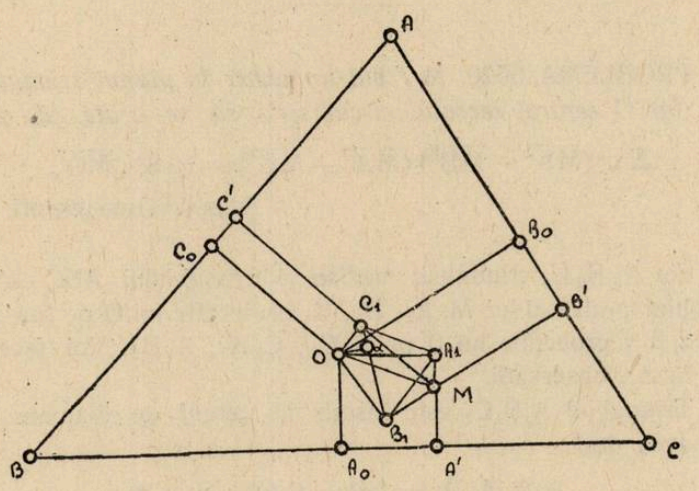
$$\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{B'B_0} = 2b\,\overline{B'B_0}. \qquad (4)$$

Din (3) și (4) deduc:

$$a_1 = a^2 (\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - MC^2) = 4a^2 bc \cdot \overline{B'B_0} \cdot \overline{C'C_0}. \quad (5)$$

Insă $B'B_0$ și $C'C_0$ sunt respectiv egale cu $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$, deci

$$\overline{B'B_0} = \overline{C'C_0} = \overline{OB_1} \cdot \overline{OC_1} = \overline{OM} \cdot \overline{O\alpha}.$$



Deci (5) devine

$$a_1 = 16\, RS \cdot \overline{OM} \cdot a \cdot \overline{O\alpha} \quad (6)$$

Din (1) deduc însă

$$a = \frac{2R}{\overline{OM}} \cdot \overline{B_1C_1}.$$

Deci

$$a \cdot \overline{O\alpha} = \frac{2R}{OM} \cdot \overline{B_1C_1} \cdot \overline{O\alpha} = \frac{4R}{OM} \cdot S_{OB_1C_1}.$$

Astfel (6) devine

$$a_1 = 64\, R^2\, S\, S_{OB_1C_1}.$$

Și deci

$$E = \Sigma a^2 (\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2) = \Sigma a_1 =$$
$$= 64\, R^2\, S\, (S_{OB_1C_1} + S_{OC_1A_1} + S_{OA_1B_1}). \quad (7)$$

Avem însă în mărime şi sens

$$S_{OB_1C_1} + S_{OC_1A_1} + S_{OA_1B_1} = S_{A_1B_1C_1}$$

şi deci

$$E = 64\,R^2 S \,.\, S_{A_1B_1C_1}.$$

Ţinând seamă de relaţia (2) şi apoi de

$$S = 2\,R^2 \sin A \sin B \sin C$$

se deduce:

$$E = 32\,R^2 \,.\, S \,.\, \overline{OM}^2 \,.\, \sin A \sin B \sin C = 16\,S^2 \,.\, \overline{OM}^2$$

$$\therefore \quad \Sigma a^2 (\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2) = 16\,S^2 \,.\, \overline{OM}^2.$$

LT. M. D. POPA.

Altă soluţie. Se ştie că între laturile şi distanţele punctului M la vârfuri avem relaţiunea

$$\Sigma a^2 (\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2) - \Sigma a^2 (-a^2 + b^2 + c^2)\,\overline{MA}^2 + a^2b^2c^2 = 0 \quad (1)$$

Fie M' inversul (simetricul) punctului M în raport cu cercul circumscris. Se ştie că avem:

$$\frac{M'A}{MA} = \frac{M'B}{MB} = \frac{M'C}{MC} = \frac{R}{MO}.$$

Rezultă că ecuaţiunea în λ, ce se obţine înlocuind în (1) pe $\overline{MA}^2$, $\overline{MB}^2$, $\overline{MC}^2$ respectiv prin $\lambda\,\overline{MA}^2$, $\lambda\,MB^2$, $\lambda\,\overline{MC}^2$ admite rădăcinile 1 şi $\frac{R^2}{MO^2}$.

Formând produsul rădăcinilor acestei ecuaţiuni, obţinem:

$$\frac{\Sigma a^2 (\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2)}{a^2 b^2 c^2} = \frac{\overline{MO}^2}{R^2}.$$

Deoarece avem $abc = 4\,RS$, rezultă imediat relaţiunea din enunţ.

Se obţine evident o relaţiune analogă formând în loc de produs, suma rădăcinilor aceleiaşi ecuaţiuni.

S'a primit o soluţiune asemănătoare acesteia dela d-nul DUMITRU GH. VASILIU (Lic. Militar, Iaşi), o soluţiune trigonometrică dela d-nul ALDEA V. MINEA (student-inginer Buzău) şi o alta cu ajutorul coordonatelor baricentrice dela d-nul P. P. DRĂGHICESCU (Lic. Militar, Iaşi).

A rezolvat problema şi d-l M. R. CONSTANTINESCU.

PROBLEMA 5732. *Să se rezolve ecuația*

$$x+\sum_{k=0}^{3}\operatorname{cotg}\left(\frac{k\pi}{4}+x\right)\cdot\sum_{k=0}^{3}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{8}-x\right]=17$$

V. ALACI.

In virtutea relației

$$\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=2\operatorname{cotg}2\alpha,$$

sumele din enunț se pot transforma succesiv astfel,

$$\sum_{k=0}^{3}\operatorname{cotg}\left(\frac{k\pi}{4}+x\right)=\operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)$$

$$=\operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=(\operatorname{cotg}x-\operatorname{tg}x)$$

$$+\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=2\operatorname{cotg}2x+2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+2x\right),$$

deci

$$\sum_{k=0}^{3}\operatorname{cotg}\left(\frac{k\pi}{4}+x\right)=2(\operatorname{cotg}2x-\operatorname{tg}2x)=4\operatorname{cotg}4x; \qquad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{3}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{8}-x\right]=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{8}-x\right)$$

$$+\operatorname{cotg}\left(\frac{5\pi}{8}-x\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{7\pi}{8}-x\right)=\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{8}-x\right)$$

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}-x\right)=\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\right]$$

$$+\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{8}-x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}-x\right)\right]=2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+2\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)$$

deci

$$\sum_{k=0}^{3}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{8}-x\right]=2\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right]$$

$$=4\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=4\operatorname{tg}4x \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$\sum_{k=0}^{3} \operatorname{cotg}\left(\frac{k\pi}{4}+x\right) \cdot \sum_{k=0}^{3} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{8}-x\right] = 16,$$

astfel că ecuaţia dată devine

$$x+16=17 \quad \therefore \quad x=1.$$

Soluţii date de d-nii: M. ANDREESCU, I. ENĂCHESCU (Liceul Militar, Iaşi), A. CUBAT (Polit. Bucureşti), GH. DONŢU (Iaşi), IOHANNES MAHRENHOLZ (Cottbus), EUGEN WEGENER (Bucureşti), VLAD JURIST (Colegiul Naţional „N. Filipescu") OCTAVIAN E. GHEORGHIU şi V. D. PĂLĂCEANU.

PROBLEMA 5797. *Să se demonstreze:*

1. *Cercurile osculatoare în* A, B, C *elipsei lui* STEINER *circumscrisă triunghiului* ABC *trec prin punctul lui* STEINER.

2. *Razele celor trei cercuri osculatoare sunt date de:*

$$\frac{\rho_a}{a^3}=\frac{\rho_b}{b^3}=\frac{\rho_c}{c^3}=\frac{1}{4S}.$$

3. *Suprafaţa triunghiului format de centrele celor trei cercuri este:*

$$\Omega=\frac{3}{4}S\,(\operatorname{cotg}^2\omega-3)$$

unde ω *este unghiul lui* BROCARD.

4. *Lungimile normalelor în* A, B, C *la elipsa lui* STEINER *verifică relaţia:*

$$\sum \frac{a}{\eta_a}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0.$$

ION C. VASILIU.

Fie

$$(\Gamma)\; p\beta\gamma+q\gamma\alpha+r\alpha\beta=0$$

o conică circumscrisă triunghiului ABC. Prin vârful A ducem două drepte: $\beta-\lambda_1\gamma=0$ şi $\beta-\lambda_1\gamma=0$ cari taie conica în punctele:

$$A_1\,[-\lambda_1 p\;,\;\lambda_1(q+\lambda_1 r)\;,\;q+\lambda_1 r]$$
$$A_2\,[-\lambda_2 p\;,\;\lambda_2(q+\lambda_2 r)\;,\;q+\lambda_2 r].$$

Fie: $F/\delta = y\beta + z\gamma$ cercul AA_1A_2. Calculăm coeficienţii y şi z şi facem apoi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{q}{r}.$$

Găsim:

$$y = \frac{-a^2 qr + b^2 r(q-r) + c^2 q(p-q+r)}{pq}$$

$$z = \frac{-a^2 qr + b^2 r(p+q-r) - c^2 q(q-r)}{rp}$$

cercul osculator în A e astfel determinat.

Se deduce apoi prin calcul raza de curbură:

$$\rho_a^2 = \frac{[c^2 q^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)\, qr + b^2 r^2]^3}{16\, S^2\, p^2\, q^2\, r^2}.$$

Pentru: $p = q = r = 1$ găsim datele din enunţ şi anume:

1. Cercul corespunzător vârfului A:

$$F/\delta = \beta(c^2 - a^2) - \gamma(a^2 - b^2)$$

care trece prin punctul lui STEINER

$$\left[\frac{1}{b^2 - c^2}, \frac{1}{c^2 - a^2}, \frac{1}{a^2 - b^2}\right].$$

La fel celelalte două cercuri.

2. Se calculează:

$$\rho_a = \frac{a^3}{4S}, \text{ etc.}$$

Coordonatele centrului cercului O_a:

$$\frac{\alpha}{16S^2 - 2a^4} = \frac{\beta}{a^2(a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{\gamma}{a^2(a^2 - b^2 + c^2)}.$$

De unde se calculează suprafaţa triunghiului $O_a O_b O_c$:

$$\Omega = \frac{3}{4} S(\cot^2 \omega - 3).$$

3. Intersecţia înălţimii din A cu elipsa lui STEINER, e punctul A_0 de coordonate:

$$\frac{\alpha}{-1} = \frac{\beta(a^2 - b^2 + c^2)}{2a^2} = \frac{\gamma(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2}.$$

De unde:

$$\eta_a = \overline{AA_0} = \frac{a^3}{a^2 \operatorname{cot}\omega - 2S} \text{ etc.}$$

şi rezultă relaţia din enunţ.

O interesantă soluţie, mai lungă însă, în coordonate carteziene, s'a primit dela D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Observaţiuni. 1. Cazul general al conicei

$$p\beta\gamma + q\gamma\alpha + r\alpha\beta = 0.$$

Fie d_a semidiametrul conjugat diametrului trecând prin A.

Se calculează:

$$d_a^2 = \frac{c^2 q^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)\, qr + b^2 r^2}{-\Sigma p^2 + 2\Sigma qr}$$

Şi se găseşte relaţia:

$$\frac{\rho_a}{d_a^3} = \frac{\rho_b}{d_b^3} = \frac{\rho_c}{d_c^3}.$$

Dacă numim t_a tangenta în A la conica (Γ) lungimea acesteia limitată la latura BC, avem:

$$t_a^2 = \frac{c^2 q^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)\, qr + b^2 r^2}{(q-r)^2}.$$

De unde relaţiile generale:

$$\frac{\sqrt[3]{\rho_a}}{t_a} + \frac{\sqrt[3]{\rho_b}}{t_b} + \frac{\sqrt[3]{\rho_c}}{t_c} = 0 \quad ; \quad \frac{d_a}{t_a} + \frac{d_b}{t_b} + \frac{d_c}{t_c} = 0.$$

2) Cazul elipsei lui STEINER. Avem relaţiunile:

$$\frac{\rho_a}{a} + \frac{\rho_b}{b} + \frac{\rho_c}{c} = \operatorname{cotg}\omega \quad ; \quad \rho_a \rho_b \rho_c = R^3.$$

Se calculează:

$$\overline{HO}_a = \frac{R}{bc}(2a^2 - b^2 - c^2) \quad \therefore \quad \frac{\overline{HO}_a}{a} + \frac{\overline{HO}_b}{b} + \frac{\overline{HO}_c}{c} = 0.$$

Dacă m_a, m_b, m_c sunt medianele triunghiului ABC, se găseşte:

$$\frac{\overline{O_b O_c}}{m_a} = \frac{\overline{O_c O_a}}{m_b} = \frac{\overline{O_a O_b}}{m_c} = \sqrt{3\,(\operatorname{cotg}^2\omega - 3)}.$$

Dacă triunghiul ABC e automedian, $(2a^2 = b^2 + c^2)$ cercul osculator în A elipsei lui STEINER trece prin centrul de greutate G.

Dacă $a = h_a$, cercul de mai sus e tangent laturei BC.

I. C. V.

PROBLEMA 6177. *Fie* Ox, Oy *două drepte perpendiculare şi* D *o dreaptă arbitrară*; M *un punct mobil pe* D *şi* P, Q *proiecţiile lui pe* Ox, Oy. *Perpendiculara din M pe* PQ *înfăşoară o parabolă tangentă la* D.

Caz particular; D *paralelă cu una din bisectoarele unghiului* (Ox, Oy).

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie analitică dată de D-nii: I. A. BARBU (Politechnica, Bucureşti); C. N. BOERESCU (idem); C. I. CANTUNIAR (idem); M. R. CONSTANTINESCU (liceul Ploieşti); I. KINSKI (Politechnica, Timişoara); A. G. MORAITE (Bucureşti); TR. V. MUSTĂCESCU (Politechnica, Bucureşti); M. D. PETCULESCU (idem) şi M. V. SOARE (Bucureşti).

Fie $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ecuaţia dreptei D şi M (α, β), deci

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1. \qquad (1)$$

Perpendiculara din M pe PQ are ecuaţia

$$y - \beta = \frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \qquad (2)$$

şi eliminând pe β între (1) şi (2) obţinem ecuaţia

$$\alpha^2 (a^2 - b^2) + a\alpha (2b^2 - ax - by) + a^2 b (y - b) = 0.$$

Se ştie că dacă parametrul α intră în ecuaţia unei curbe la gradul doi

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

înfăşurătoarea este $B^2 = 4AC$. In cazul nostru

$$(2b^2 - ax - by)^2 = 4b^2 (a^2 - b^2)(y - b)$$

sau

$$(ax + by)^2 - 4a^2 b^2 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0$$

ecuaţia care reprezintă o parabolă tangenta dreptei D şi axelor în punctele A, B în care dreapta D le taie. Determinantul

$$\Delta = -4a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2$$

ce anulează în afară de cazurile fără interes $a = 0$, $b = 0$ când $a = \pm b$ deci D paralelă cu una din bisectoare. In acest caz perpendiculara trece printr'un punct fix, (proprietate cunoscută).

Observare. Pentru a demonstra însuşirea geometric, s'ar putea proceda astfel. Observăm întâi că P, Q împart în rapoarte inverse segmentele OA, OB deci PQ înfăşoară o parabolă tangentă axelor în A, B. Perpendiculara din M pe PQ taie paralelele din A, B la axe în U şi V. Se justifică relaţia

$$\frac{UA}{OA} = \frac{BV}{OB}.$$

Fie X intersecţia paralelelor din U, V la axe. OX este perpendiculară pe D deci fixă. Aplicând prima însuşire rezultă că UV înfăşoară o parabolă tangentă dreptelor CA, CB în punctele lor de intersecţie cu OX.

EXERCIŢII

10. *Să se găsească pătratul de şapte cifre de forma* a b a b a a b.

MAIOR E. ST. IACOB.

După tabloul ultimelor 4 cifre ale unui patrat perfect din articolul *Patrate izofinale* din G. M., Vol. XLIX, pag. 397, patratul cerut trebue căutat printre numerele: 1616116, 2424224, 2525225, 3636336, 4141444, 4949449, 8181881, 8484884, 8989889 şi 9696996.

Se elimină 3636336 care este *mult.* 3 fără a fi *mult.* 9 şi 2525225, 8181881, 8989889 care sunt de forma *mult.* $3 + 2$. Ridicând la patrat numerele rămase se găseşte soluţia.

$$3114^2 = 9696996.$$

11. *Să se demonstreze că* $2^n (n+1)! - (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$ *se divide prin* $2n+3$.

† T. STOICESCU.

R. Din relaţia

$$(x-1)(x-3)\ldots[x-(2n-1)] = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + \\ + (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$$

se deduce

$$(x-1)(x-3)\ldots[x-(2n-1)] - (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) = \\ = x[x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}]$$

Rezultă că membrul I se divide prin x. Dacă înlocuim acolo pe x prin $2n+3$ se obţine expresia din enunţ.

12. *Dacă într'un triunghiu rapoartele*

$$\frac{r}{h_a}, \frac{r}{h_b}, \frac{r}{h_c}$$

sunt în progresie geometrică atunci şi laturile triunghiului sunt în progresie geometrică.

P. P. TEODORESCU.

R. Conform enunţului avem

$$\frac{r^2}{h_a^2} = \frac{r}{h_b} \cdot \frac{r}{h_c} \qquad (1)$$

Apoi [1])

$$\frac{r}{h_a} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Din (1) şi (2) se scoate

$$\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \therefore \quad \sin^2 A = \sin B \sin C$$

care conduce la

$$a^2 = b \cdot c.$$

PROBLEME PROPUSE

6292 [2]). Se joacă un joc cu două zaruri. Regulile lui sunt: Câştigul este egal cu miza. Bancherul câştigă dacă obţine 7 şi pierde dacă obţine 2 sau 12. Dacă obţinem un număr N diferit de 7, 2 sau 12, bancherul aruncă din nou cu zarurile şi anume până ce obţine acel număr N — în care caz bancherul câştigă — dacă între timp nu a obţinut 7, în care caz pierde.

Jocul este echitabil?

Care este probabilitatea ca bancherul să câştige cu alt număr decât 7, aruncând cu zarurile în aceeaşi partidă de cel mult n ori?

B. BARBĂLAT.

6300. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$(x^2 + 5y^2)(z^2 + 5t^2) = 2709^3.$$

M. GHERMĂNESCU.

---

1) *Exercices de Trigonometrie* par F. G. M. page 174.

2) Problema 6292 propusă la pag. 134 din acest volum, se publică din nou cu un enunţ complectat.

6301. Să se demonstreze că niciun număr întreg şi pozitiv nu se poate descompune în suma a 3 numere consecutive din şirul numerelor prime cu el.

I. B. FLORESCU.

6302. In cercul O se dau doi diametri perpendiculari AB, CD. Coarda AE ca diametru al cercului O_1 taie pe OC în M. Cercul O_1 taie pe CD în H. Coarda AHF este diametrul cercului O_2. Cercurile O_1 şi O_2 se taie în I. Dreptele MF şi EH se taie în P. Dreapta MF taie cercul O_1 în G şi G' (G în afara cercului O). Dreapta AG taie diametrul QT al cercului O_1, perpendicular pe AE, în N. Să se arate că:

1°. Punctele E, I şi F sunt coliniare.

2°. Punctele A, P şi I sunt coliniare.

3°. Punctele I, M şi N sunt coliniare.

GHEORGHE A. GRIGORE.

6303. Se dă ecuaţia algebrică $f(x) = 0$ de gradul n şi cu rădăcinile reale. Dacă x este cuprins între două rădăcini consecutive ale acestei ecuaţii, există neegalitatea

$$(n^2 - n - 1)\frac{f'^2(x)}{f^2(x)} - n^2\frac{f''(x)}{f(x)} > 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

6304. Să se elimine x, y şi z între ecuaţiile

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0 \quad , \quad y^2 + p_2x + q_2 = 0,$$
$$z^2 + p_3x + q_3 = 0 \text{ şi } xyz = \lambda.$$

Aplicaţie. Se consideră în triunghiul ABC cevienele AA', BB', CC'. Punem:

$$l = \overline{AA'}^2 \quad , \quad m = \overline{BB'}^2 \quad , \quad n = \overline{CC'}^2.$$

Să se formeze relaţia dintre l, m, n şi patratele a^2, b^2, c^2 ale laturilor triunghiului ABC.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6305. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 2x = 2\sin(a + x).$$

G-L GH. BUICLIU.

6306. Să se demonstreze că înfăşurătoarea conicelor circumscrise unui triunghiu şi ale căror asimptote fac un unghiu constant, este o cuartică bitangentă dreptei dela infinit în punctele ciclice şi având vârfurile triunghiului ca puncte duble.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6307. Se consideră un cerc fix (Γ) şi fie AB o coardă a acestui cerc, iar M un punct pe AB.

Se ia cercul tangent în M dreptei AB şi tangent şi cercului (Γ); fie (C_1) acest cerc. Fie apoi (C_2) cercul tangent cercurilor (C_1) şi (Γ) şi dreptei AB. Se cere locul centrului cercului (C_2) când:

1°. Punctul M se mişcă pe AB.

2°. Punctul M e fix şi AB mobilă în jurul lui M.

VIRGIL CLAUDIAN.

6308. Să se calculeze următoarele integrale definite

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{p\cos t} \cos(p \sin t) \cos nt \, dt$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{p\cos t} \sin(p \sin t) \sin nt \, dt$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} e^{p\sin t} \cos(p \cos t) \cos nt \, dt$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} e^{p\sin t} \sin(p \cos t) \sin nt \, dt.$$

A. I. VARGĂ.

6309. Două corpuri de forme şi greutăţi diferite, sunt legate între ele cu o sfoară de lungime dată. Dacă lăsăm să cadă acele două corpuri dela o mare înălţime, după cât timp sfoara va fi complet întinsă, iar la atingerea pământului ce tensiune va fi în sfoară?

Se va presupune rezistenţa aerului direct proporţională cu patratul vitesei.

† COMANDOR I. LINTEŞ.

ERATĂ. La problema 6278, propusă la pag. 64 din acest volum, se înlocueşte ultima frază prin următoarea: *Să se determine poziţia de echilibru dinamic pentru o viteză unghiulară dată în jurul barei* AB. *Să se studieze în cazul particular m = M, cele 2 bile fiind pe aceeaşi orizontală, care este viteza unghiulară necesară pentru echilibrul dinamic.*

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

August D. N. (6262); *Boerescu N. Cezar* (5597, 98, 619, 62, 6030, 83, 193, 51, 58, 59, 65, 81, 82, 96); *Chirilă A. R.* (E); *Constantinescu N. Ilie* (E, P); *Constantinescu R. M.* (4641, 5848, 914, 99, 6033, 44, 61, 174, 202, 07, 11, 86, 87, A, E, P); *Constantinescu Paul* (4435, 6222, 25, 53, 61, 62, 65, 67, 85); *Constantinescu Val.* (6262); *Constantinescu G. Virgil* (6166, 73, 222, 28, 38, 42, 62, P); *Corduneanu C.* (4435, 5999, 6001, 238, 62); *Dănescu Gh. Al.* (6282, 96); *Dăscălescu I. M.* (6282, 96); *Diaconu C. C.* (6146); *Diaconu C. Gh.* (6254); *Diaconu Gh. Vasile* (6261, 62, 65, 67, 70, 85); *Doneaud E. A.* (6139, 85, 89); *Enescu G. G.* (6282); *Firescu Gr. St.* (6187); *Fânaru N. D.* (6286, 87, 88); *Furtunescu Dorin* (6187, 222); *Gămănescu St.* (6262); *Haret Sp. Radu* (6225, 62); *Iosifescu G. M.* (5076, 598, 616, 49, 907, 57, 85, 6001, 05, 105, 55, 66, 87, 206, 69, 85, 87, 96, E); *Marinescu E. Em.* (6032, P); *Mihalache C.* (5924, 69); *Mihălcioiu M.* (6083, 102, 271); *Moraitè G. Al.* (5957, 6027, 223, 88, E, P); *Munteanu T. I.* (4435, 5999, 6001, 238, 61, 65, 67); *Nanul A. St.* (6206); *Nedelcu Fl.* (P); *Nedelcu Fl. Mariana* (6294, P); *Nicolescu C. I.* (6262); *Pantazopol C. Stelian* (6282, 69, 82, 96, P); *Petcu A. Pandele-Valeriu* (6043, 88, 168); *Popa D. Mircea* (2827, 4104, 631, 84, 316, 854, 89, 5460, 534, 662, 805, 06, 900, 6056, 111, 91, 6201, 16, 23, 32, 34, 35, 36, 42, 48, 49, 50, 54, 57, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 72, 73, 81, 82, E, P); *Popescu L. Ilie* (6261, 65); *Săvescu A. Mircea* (5969, 6153, 238); *Soare V. M.* (5843, 6216, 59; P); *Stăncescu Virgiliu* (6083, 88, 223, 62); *Stanciu N. V.* (E, P); *Stoian I. D.* (6265, 69, 85, 87); *Tănăsescu S. C.* (6238, 72, 87, 88); *Teodorescu P. P.* (6074, 129, 267, 71, 93, E); *Udrea C. I.* (6262); *Vasiliu E. Dan* (6261, 22, 96); *Vasiliu Mircea* (6271, 72); *Vişan G. A.* (6262); *Voinea D. Mircea* (6282, 85).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 50 (cincizeci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 30.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 3.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X, XII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII şi IX sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 10.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 28.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 8.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 13.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 33.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . . Lei 21.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 9.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 11.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 13.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 10.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 15.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 13.000

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul achitat până la 1 Martie 1947 este de 36.000 lei. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Martie 1947.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 15.000 lei pentru abonamentele plătite până la 1 Martie 1947. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Martie 1947.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 39.810.

N3297

Biblioteca ASTRA
SIBIU

D.O. III 2014
77

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1947

SUMARUL

1. Asupra unor transformări omografice . . *C. Ionescu-Bujor.*
2. Raport pentru decernarea premiului „Nicolae G. Botea" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
3. Note matematice: 9—10.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Probleme rezolvate: 2423, 5286, 5460, 5573, 6104, 6147, 6166, 6184, 6210, 6219, 6238, 6251.
8. Exerciţii: 13—14.
9. Probleme propuse: 6310—6319.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

83507

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele două şedinţe lunare ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 27 Ianuarie, ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 6 şi alegerea candidaţilor la concurs.

Luni 10 Februarie, ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 6.

Luni 17 Februarie, ora 17: Prima Adunare Generală ordinară.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 7, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 1.000

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 9.000

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 10.000

Direcţiunea Lic. Gh. Lazăr - Sibiu

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI OMOGRAFICE

1°. Domnul Prof. TH. ANGHELUŢĂ [1] determină omografiile

$$x'' = \frac{Ax' + B}{Cx' + D} \tag{1}$$

care transformă o ecuaţie de gradul II

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

în ea însăşi.

Ne propunem să determinăm aceste omografii pe o cale diferită, precizând şi câteva elemente geometrice ale lor.

Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei date şi două puncte $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ pe o axă. Omografiile care transformă ecuaţia (2) în ea însăşi sunt: *a) acelea care admit punctele* M_1 *şi* M_2 *ca puncte duble* sau *b)* acelea care transformă pe M_1 în M_2 şi pe M_2 în M_1, deci *involuţiile cu* M_1, M_2 *puncte omoloage.*

Cazul a) Omografia este

$$\frac{x'' - x_1}{x'' - x_2} = k\,\frac{x' - x_1}{x' - x_2}$$

sau

$$(1-k)\,x'x'' - (x_1 - kx_2)\,x' - (x_2 - kx_1)\,x'' + (1-k)\,x_1 x_2 = 0 \tag{3}$$

unde

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

sau notând

$$\alpha = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}, \quad \beta = \frac{x_2 - kx_1}{1-k} \tag{4}$$

omografia devine

$$x'x'' - \alpha x' - \beta x'' + \frac{c}{a} = 0. \tag{5}$$

Din (4) deducem

$$\alpha + \beta = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

şi transformarea căutată este

$$x'x'' - \alpha x' + \left(\alpha + \frac{b}{a}\right)x'' + \frac{c}{a} = 0 \tag{6}$$

α fiind un parametru variabil.

---

1) TH. ANGHELUŢĂ: Determinarea transformărilor omografice care lasă neschimbată o ecuaţie de gradul II, *Gazeta Matematică,* Vol. XLII. p. 561.

83507

Punctele $M_k(\alpha)$, $M(\beta)$ *sunt simetrice față cu mijlocul segmentului punctelor duble* $M_1 M_2$.

Cazul b) Ecuația unei involuții fiind

$$x'x'' + \alpha(x' + x'') + \beta = 0,$$

trebue să avem $x_1 x_2 + \alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$

sau $$\frac{c}{a} - \alpha\frac{b}{a} + \beta = 0 \quad \therefore \quad \beta = \frac{b\alpha - ac}{a},$$

deci involuția căutată este

$$x'x'' + \alpha(x' + x'') + \frac{b\alpha - ac}{a} = 0. \tag{7}$$

Concluzie: Transformările omografice care lasă neschimbată ecuația (2) sunt (6) și (7). Ele depind de un parametru.

2°. Punctele duble I, J ale involuției (7) au abcisele x_i, x_j date de ecuația

$$x^2 + 2\alpha x + \frac{b\alpha - ac}{a} = 0.$$

Deci $$\frac{x_i + x_j}{2} = -\alpha \quad , \quad x_i x_j = \frac{b\alpha - ac}{a},$$

de unde $$2ax_i x_j + b(x_i + x_j) + 2ac = 0.$$

Punctele duble ale involuțiilor ce transformă o ecuație de gradul II (2) în ea însăși se corespund în involuția (8).

3°. **Generalizare.** Să considerăm și generalizarea D-lui Prof. TH. ANGHELUȚĂ, a se găsi omografiile care transformă ecuația

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \tag{9}$$

în ecuația $$a''x^2 + b''x + c'' = 0. \tag{10}$$

Fie x_1', x_2' rădăcinile primei ecuații și x_1'', x_2'' rădăcinile ecuației (10); α și β fiind punctele duble ale omografiei, transformarea este

$$\frac{x'' - \alpha}{x'' - \beta} = k\frac{x' - \alpha}{x' - \beta}$$

va trebui să avem

$$\frac{x_1'' - \alpha}{x_1'' - \beta} = k\frac{x_1' - \alpha}{x_1' - \beta} \quad , \quad \frac{x_2'' - \alpha}{x_2'' - \beta} = k\frac{x_2' - \alpha}{x_2' - \beta}, \tag{11}$$

de unde

$$\frac{(x_1'' - \alpha)(x_2'' - \beta)}{(x_1'' - \beta)(x_2'' - \alpha)} = \frac{(x_1' - \alpha)(x_2' - \beta)}{(x_1' - \beta)(x_2' - \alpha)}.$$

Făcând operaţiile şi ţinând seamă de proprietăţile proporţiilor, deducem

$$\frac{2\alpha\beta+\frac{b''}{a''}(\alpha+\beta)+2\frac{c''}{a''}}{\sqrt{r''}}=\frac{2\alpha\beta+\frac{b'}{a'}(\alpha+\beta)+2\frac{c'}{a'}}{\pm\sqrt{r'}},$$

unde

$$\alpha=\frac{(a''b'\sqrt{r''}\mp a'b''\sqrt{r''})\beta+2a''c'\sqrt{r''}\mp 2a'c''\sqrt{r'}}{2(\pm\sqrt{r'}-\sqrt{r''})a'a''\beta\pm a'b''\sqrt{r'}-a''b'\sqrt{r''}}. \quad (12)$$

Punctele duble ale omografiilor care transformă o ecuaţie de gradul II în altă ecuaţie de gradul II se corespund într'o involuţie.

Scăzând egalităţile (11), deducem

$$k=\frac{a''r''(a'\beta^2+b'\beta+c')}{\pm a'r'(a''\beta^2+b''\beta+c'')}. \quad (13)$$

Deci omografiile ce transformă ecuaţia (9) în (10) depind de un parametru.

Dacă luăm

$$k=\left[\frac{a''r''(a'\beta^2+b'\beta+c')}{\pm a'r'(a''\beta^2+b''\beta+c'')}\right]^{\frac{1}{n}}$$

avem omografiile care aplicate ecuaţiei (10) şi transformatelor succesive de n *ori, ne dau ecuaţia (11).*

4°. *Omografiile, ale căror puncte duble se corespund într'o involuţie, au coeficienţi cari satisfac o relaţie liniară.*

Fie $$\alpha x'x''+\beta x'+\gamma x''+\delta=0 \quad (14)$$

omografia ale cărei puncte duble se corespund în involuţia

$$Ax_1x_2+B(x_1+x_2)+C=0 \quad (15)$$

x_1, x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei

$$\alpha x^2+(\beta+\gamma)x+\delta=0,$$

rezultă relaţia

$$C\alpha-B\beta-B\gamma+A\delta=0. \quad (16)$$

Deci între coeficienţii omografiei ce transformă o ecuaţie de gradul II în altă ecuaţie de gradul II, există o relaţie liniară.

C. IONESCU-BUJOR.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA“

Subsemnații, membri în comisiunea pentru acordarea premiului « NICOLAE G. BOTEA », având în vedere activitatea corespondenților în Vol. LI al *Gazetei Matematice*, propunem ca premiul să fie decernat în acest an d-lui MARINESCU E. EMIL, elev al Liceului „Aurel Vlaicu“ din București.

Activitatea d-sale, în cadrul regulamentului acestui premiu se compune din: Exercițiul propus Nr. 24 și soluțiile problemelor 5535, 6015, 5987.

Este unicul rezolvitor al ultimei probleme.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA“

Ing. E. N. BOTEA, ȘERBAN GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea Generală din 26 August 1946 a *Gazetei Matematice*.

NOTE MATEMATICE

9. *Asupra notei „Despre centrele izodinamice“* (G. M., L, pag. 349).

D-l ANDREI DOBRESCU a stabilit, printre altele, că:

$$a.\overline{AW'} = b.\overline{BW'} = c.\overline{CW'} = abc.\sqrt{\frac{\Sigma a^2 - 4\sqrt{3}.S}{\Sigma (b^2 - c^2)^2}} \qquad (1)$$

$$a.\overline{AW''} = b.\overline{BW''} = c.\overline{CW''} = abc.\sqrt{\frac{\Sigma a^2 + 4\sqrt{3}.S}{\Sigma (b^2 - c^2)^2}} \qquad (2)$$

$$\overline{OW'} = R.\sqrt{\frac{\sin(30^0 - \omega)}{\sin(30^0 + \omega)}} \qquad (3)$$

$$\overline{OW''} = R.\sqrt{\frac{\sin(30^0 + \omega)}{\sin(30^0 - \omega)}}. \qquad (4)$$

Folosind aceste rezultate, se pot stabili alte relații interesante.

Ţinând seamă de relaţiile:

$$\Sigma a^2 = 4S \cdot \operatorname{cotg}\omega, \quad \Sigma a^2 b^2 = \frac{4S^2}{\sin^2 \omega},$$

relaţiile (1) şi (2) se aduc uşor la forma:

$$a \cdot \overline{AW'} = b \cdot \overline{BW'} = c \cdot \overline{CW'} = 2R \cdot \sqrt{\frac{S \sin\omega}{\sin(30^0 + \omega)}}, \qquad (1')$$

$$a \cdot \overline{AW''} = b \cdot \overline{BW''} = c \cdot \overline{CW''} = 2R \cdot \sqrt{\frac{S \sin\omega}{\sin(30^0 - \omega)}}. \qquad (2')$$

Dacă A'B'C' este triunghiul podar al punctului M faţă de triunghiul ABC, se ştie că:

$$\overline{B'C'} = \overline{AM} \cdot \sin A, \ldots \qquad (5)$$

Aşa fiind, să însemnăm cu α' şi α'' laturile triunghiurilor podare (echilaterale) ale centrelor izodinamice W' şi W'' ale lui ABC.

Urmează, ţinând seamă de (1') şi (2'):

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\overline{AW'}}{\overline{AW''}} = \sqrt{\frac{\sin(30^0 - \omega)}{\sin(30^0 + \omega)}}.$$

Cum însă, potrivit relaţiilor (3) şi (4), avem:

$$\frac{\overline{OW'}}{\overline{OW''}} = \frac{\sin(30^0 - \omega)}{\sin(30^0 + \omega)},$$

deducem:

$$\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^2 = \frac{\overline{OW'}}{\overline{OW''}},$$

adică: *raportul distanţelor centrului cercului circumscris al unui triunghiu* ABC, *la cele 2 centre izodinamice, este egal cu pătratul raportului de asemănare al triunghiurilor podare ale centrelor izodinamice.*

O expresie interesantă găsim şi pentru produsul laturilor triunghiurilor podare ale centrelor izodinamice.

Avem, ţinând seamă de (5), (1') şi (2'):

$$\alpha' \cdot \alpha'' = \overline{AW'} \cdot \overline{AW''} \cdot \sin^2 A = \frac{a^2 \cdot \overline{AW'} \cdot \overline{AW''}}{4R^2}$$

$$= \frac{S \sin\omega}{\sqrt{\sin(30^0 + \omega)\sin(30^0 - \omega)}} = \frac{2S}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}}.$$

Insă în nota d-lui DOBRESCU s'a arătat că:

$$\overline{W'W''} = \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}}, \qquad (6)$$

astfel încât obţinem:

$$\alpha' \cdot \alpha'' = \frac{S \cdot \overline{W'W''}}{R\sqrt{3}}.$$

Ridicând pe (2') şi (1') la pătrat şi scăzându-le, găsim:

$$a^2 \cdot (\overline{AW''^2} - \overline{AW'^2}) = b^2 \cdot (\overline{BW''^2} - \overline{BW'^2}) = c^2 (\overline{CW''^2} - \overline{CW'^2})$$

$$= 4R^2 S \sin\omega \left[\frac{1}{\sin(30^0 - \omega)} - \frac{1}{\sin(30^0 + \omega)} \right].$$

Cu uşurinţă, ţinând seamă de (6), deducem:

$$a^2 (\overline{AW''^2} - \overline{AW'^2}) = \ldots = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot S \cdot \overline{W'W''^2}.$$

EMIL E. MARINESCU.

10. *Asupra problemei 6063.* D-l EUG. CARAMALĂU observă că valoarea lui μ determinată în soluţia dată problemei la pag. 483, Vol. L, trebue să fie mai mică decât zero, deci problema e imposibilă aşa cum a fost scrisă în enunţ, deoarece mobilul nu se poate ridica la acelaşi nivel cu cel al poziţiei sale iniţiale, decât în cazul unei mişcări fără pierdere de energie prin frecare sau ciocnire.

In adevăr, în cazul problemei, μ pus sub forma mai simplă decât cea dată la soluţie, este:

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{8k \sin\alpha \cos\alpha [2(1+k)\cos^2\alpha - (1+2k)]}$$

$$= \frac{8k \sin^2\alpha [2(1+k)\cos^2\alpha - (1+2k)] - 1}{8k \sin\alpha \cos\alpha [2(1+k)\cos^2\alpha - (-1+2k)]}. \qquad (1)$$

Conform condiţiei găsite în soluţie:

$$k < \operatorname{ctg}2\alpha \operatorname{ctg}\alpha \; ; \quad \cos^2\alpha > \frac{1+2k}{2(1+k)} < 1. \qquad (2)$$

Paranteza mare dela numitor din (1) e pozitivă; deasemenea şi termenul $8k \sin\alpha \cos\alpha$ pentru $\alpha < \frac{\pi}{4}$ cum e cazul problemei.

Numitorul fiind pozitiv, se vede că numărătorul este negativ din cauza condiţiei (2) chiar în cazul cel mai favorabil al ciocnirii perfect elastice ($k = 1$).

Rezultă $\mu < 0$. Problema poate totuşi exista cu toate concluziile ei, dacă considerăm în locul unei forţe de frecare, că lucrează asupra mobilului o forţă constantă $\mu\, mg \cos\alpha$ care-l împinge în josul planului înclinat.

GAB. Ţ.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI

Facultatea de Agronomie. Examenul de admitere 1946

I. Un agricultor a depozitat grâul recoltat într'un siloz.

1. El vinde dubla de grâu (dubludecalitrul) cu 30.000 lei sau kilogramul cu 2.200 lei. Care este greutatea hectolitrică a grâului presupunând că preţurile au fost corect stabilite? Dacă greutatea hectolitrică reală ar fi mai mică, este mai avantajos să se cumpere grâu cu dubla sau cu kilogramul?

2. Silozul are forma unui trunchiu de con la care agricultorul poate măsura numai lungimile circonferinţelor exterioare de bază, $L = 7{,}54$ m şi $l = 5{,}65$ m, precum şi lungimea generatoarei $AB = 2$ m. Ştiind că grosimea zidului silozului este de 20 cm, să se determine volumul V al întregului siloz şi, în caz când acesta este plin, greutatea grâului conţinut pentru o greutate hectolitrică de 75 kg.

3. Agricultorul vrea să calculeze exact greutatea hectolitrică a grâului. Pentru aceasta, el ia o căldare care, umplută cu grâu, cântăreşte 13,85 kg, iar plină cu apă, cântăreşte 18 kg. Când a turnat apa dintr'un bidon plin de 17 litri agricultorul a observat că au mai rămas pe dinafară 3,5 decilitri. Care este atunci greutatea hectolitrică reală a grâului?

4. Cheltuielile totale de regie până la înmagazinarea grâului în siloz au fost de lei 4.719.000 şi el observă că această sumă este tocmai 65% din suma totală încasată prin operaţiile dela punctul 1. Câte duble şi câţi saci de 75 kg a vândut el atunci? Care a fost beneficiul net realizat şi ce procent corespunde la suma totală investită (adică la cheltuielile de regie)?

II. Un agricultor vrea să traseze un drum rectiliniu dela locuinţa A la un hambar B, între acestea fiind un pâlc de arbori care împiedică observaţiile directe. *El nu are decât un lanţ pentru măsurat lungimile astfel că nu poate măsura unghiurile.*

Ce operații trigonometrice trebue să efectueze agricultorul pentru ca să determine direcția în care va porni drumul din A și să calculeze distanța AB? Se presupune că terenul pe care sunt așezați arborii și clădirile este perfect plan.

Alegerea cifrelor este lăsată la latidudinea candidaților.

III. Se consideră diferența

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{Kx(x-2)}{x^2-1}.$$

a) Să se descompună în factori numitorii și să se determine cel mai mic multiplu comun al lor.

b) Să se aducă fracțiile la același numitor și să se ordoneze numărătorul după puterile descrescătoare ale lui x.

c) Să se determine valoarea lui K astfel ca polinomul dela numărător să admită rădăcina $x=-2$ și să se găsească toate rădăcinile polinomului obținut după ce s'a înlocuit K cu valoarea calculată.

d) Nu se putea simplifica problema dela început utilizând o cale mai ușoară?

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXVII. Nr. 10. Decembrie 1946. V. ALACI. Câteva teoreme în trigonometria patratică. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate și propuse.

CERERI

Răspuns la cererea 10. (G. M., XXIII, 235). Se întreabă ce se știe despre științele matematice ale lui GHEORGHE — fiul Banului RADU GOLESCU.

In broșura „*Marele vornic Iordache Golescu*" de N. BĂNESCU, Profesor la Universitatea din Cluj (Cunoștințe Folositoare seria C, Nr. 56), găsim la pag. 12, următoarele:

„*La 2 Martie 1818,* IORDACHE GOLESCU *e numit Efor al școlilor, într'unul din locurile rămase vacante. El putuse aprecia cunoștințele matematice ale marelui dascăl,...*".

(Marele dascăl este GHEORGHE LAZĂR).

In broșura „GHEORGHE LAZĂR și opera sa" de PAUL I. PAPADOPOL — Profesor — (Cunoștințe Folositoare seria C, Nr. 68), la pagina 22, găsim:

„Și V. A. URECHE acela care relatează faptul continuă:

„LAZĂR măsură locul cu mari dificultăți, pentrucă trebui să-și fabrice mai întâi instrumentele de inginer. Boierul dete lucrarea făcută de LAZĂR în controlare lui GOLESCU care avea *orecari noțiuni de matematică.* Aceasta o aprobă...".

LT. COL. EUG. ȘT. IACOB.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2423. *Se unesc extremitățile* A *și* B *ale unui diametru al cercului* O *cu două puncte* C *și* D *de pe acest cerc. Se duce prin* O *o transversală oarecare care taie dreptele* AC, BD, BC *și* AD *respectiv în punctele* E, F, G, H. *Să se demonstreze că fiecare din segmentele* EF *și* GH *se vede din punctele* C *și* D *sub unghiuri egale.*

ȘT. CODREANU.

Soluția I-a. Diametrul EF taie cercul în M și N. Avem evident

$$C\,(MEFN) = D\,(MEFN) = D\,(NFEM)$$

dar unghiurile perechilor de raze

$$(CM, CN),\ (DN, DM) \text{ și } (CM, CE),\ (DN, DF)$$

sunt respectiv egale deci fascicolele sunt superpozabile. Rezultă atunci și

$$\sphericalangle\,(CF, CF) = \sphericalangle\,(DF, DE).$$

Soluția II-a. Considerăm două drepte c, d arbitrare și un punct C, respectiv D pe fiecare din ele; ducem prin C o dreaptă u și prin D o dreaptă v astfel ca

$$\sphericalangle\,(c, u) = \sphericalangle\,(d, v) = \theta$$

Considerăm intersecțiile $E = (c, v)$, $F = (d, u)$. Vom arăta că dreapta EF trece printr'un punct fix O. In adevăr E și F descriu diviziuni omografice pe dreptele c și d, intersecția lor I fiind autoomoloagă pentru $\theta = 0$.

Pentru $\theta = 90^0$ perpendiculara în C pe c taie pe d în B și perpendiculara în D pe d taie pe c în A, AB este o poziție a dreptei EF deci O este situat pe AB; în plus patrulaterul ADBC este inscriptibil în cercul de diametru AB.

Presupunem acuma că laturile origine ale unghiurilor egale (c, u) și (d, v) trec una prin I și a doua este opusă. Când $E \equiv C$ avem

$$\sphericalangle\,(AE, u) = \sphericalangle\,EDB = \sphericalangle\,CAB$$

deci noua poziție a lui u, care devine o dreaptă EF trece prin centrul cercului; punctul fix O este deci centrul cercului de diametru AB.

Demonstrăm astfel, pe o cale indirectă că

$$\sphericalangle EDF = \sphericalangle ECF.$$

Restul enunțului este o repetare a aceleiași propoziții.

Observări. 1°. Soluția I mi-a fost comunicată de d-l prof. ARNO KAHANE. S'a mai primit o soluție dela d-l M. GRÜNBAUM, care a fost anunțată în Vol. XXV pe copertă.

2°. Îmi pare rău că la această frumoasă problemă nu s'au păstrat soluțiile foștilor corespondenți.

N. M.

PROBLEMA 5286. *Un experimentator a introdus într'un recipient de sticlă transparentă, mercur și un gaz presupus pefect și de solubilitate în mercur neglijabilă. După* închiderea ermetică *a recipientului a avut nevoie să cunoască presiunea gazului. Cum a mai putut-o măsura?*

Aceiași chestiune dacă în loc de mercur ar fi apă.

Discuțiunea rezultatului și a preciziunei măsurei.

N. V. K.

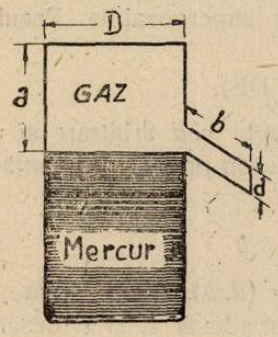


Fig. 1.

Fie p presiunea gazului exprimată în mm. de mercur, V_1 volumul gazului în tubul mare, v_1 volumul gazului în tubul mic, astfel cum ele rezultă din dimensiunile figurei.

Se rotește aparatul în planul său, până când suprafața *orizontală* a mercurului are poziția A — B; în acest moment volumele gazelor au rămas V_1, V_2.

Continuând rotația, gazul se comprimă în tubul mic și volumul său devine v_2, și se dilată în tubul mare volumul său devenind V_2; în același timp se stabilește o diferență de nivel h, între mercurul de suprafață *orizontală* A' — B' din tubul mare și mercurul din tubul mic.

Dacă h este exprimat în milimetri, presiunile vor fi:

$p\frac{v_1}{v_2}$ în tubul mic şi $p\frac{V_2}{V_1}$ în tubul mare, va trebui deci ca:

$$p\frac{v_1}{v_2} = p\frac{V_2}{V_1} + h \text{ ; de unde:}$$

$$p = \frac{h}{\frac{v_1}{v_2} - \frac{V_2}{V_1}}.$$

Vom avea deci valoarea lui p, măsurând pe v_2 şi pe h, căci v_1, V_1, sunt cunoscuţi, iar volumul mercurului rămânând constant, în timpul experienţei, avem:

$$v_2 + V_2 = v_1 + V_1 \quad , \quad V_2 = V_1 + v_1 - v_2.$$

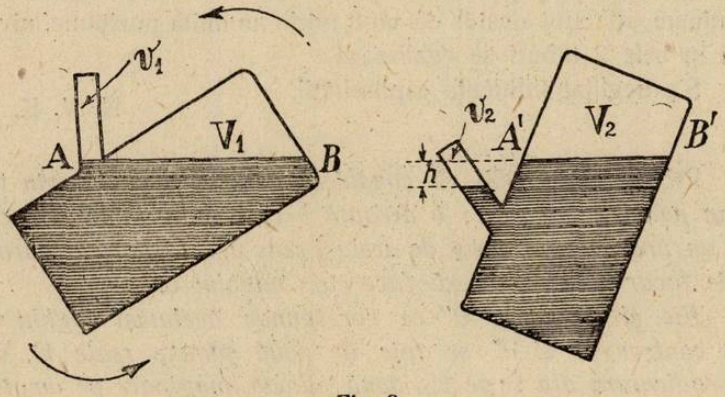


Fig. 2.

Dacă V_1 este foarte mare faţă de v_1 (cum este cazul în figură), $v_1 - v_2$ este neglijabil, V_2 este foarte vecin de V_1 şi expresiunea lui p devine:

$$p = \frac{h}{\frac{v_1}{v_2} - 1}.$$

Preciziunea măsurei lui p depinde de preciziunea măsurei lui h şi a măsurei numitorului $\frac{v_1}{v_2} - 1$.

Pentru o aceaşi eroare asupra măsurei lui v_2, cea mai mică eroare asupra lui $\frac{v_1}{v_2} - 1$, are loc pentru $v_2 = \frac{v_1}{2}$, pe care vom căuta s'o obţinem print'o potrivită înclinare a aparatului. In acest caz expresiunea lui p se reduce la $p = h$.

Dar lucrul nu este posibil decât dacă cantitatea de mercur este suficientă pentru ca, cel puţin pentru poziţia verticală a tubului mare, înălţimea h să ajungă pentru ca volumul gazului în tubul mic să fie redus la jumătate.

In cazul apei, dacă gazul este insolubil în apă, aceleaşi formule sunt valabile, presiunea fiind dată în milimetri de apă.

Dacă gazul este solubil în apă, experienţa trebue condusă cu atât mai repede cu cât gazul este mai solubil, căci comprimânduse în tubul mic gazul se disolvă, iar dilatându-se în tubul mare gazul se degajază şi formulele nu mai sunt exacte. Dacă menţinem aparatul destul de mult într'o anumită poziţiune, nivelele apei în cele 2 tuburi se egalizează.

S'a neglijat influenţa capilarităţii.

N. V. K.

PROBLEMA 5460. *Se consideră punctul* F *şi dreapta* t. *Fie* M *un punct mobil pe* t; *o dreaptă* δ *ce trece prin* M *şi face cu* MF *un unghiu constant şi de acelaşi sens* u, *înfăşoară o parabolă* P' *de focar* F, *a cărei axă face cu* t *unghiul* u.

Fie şi parabola P'' *ce corespunde aceluiaşi unghiu* u, *în sens contrar*; P' *şi* P'' *se taie în două puncte reale* U, V *pe perpendiculara din* F *pe* t *şi două puncte imaginare pe omotetica* (F, 2) *a dreptei* t. *Dacă* O *este proiecţia lui* F *pe* t, *punctele* U, V *sunt inverse în raport cu cercul* (O, F). *Să se afle înfăşurătoarea parabolelor* P' *când* u *variază.*

Să se transforme figura într'o inversiune de pol F, *modul arbitrar. Să se demonstreze şi direct, propoziţia obţinută.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie analitică dată de d-l CRISTU I. CANTUNIAR (Bucureşti).

Alegem ca axe Ox, Oy pe OF şi t şi fie F (a, O); o dreaptă variabilă MF: $y = \lambda(x - a)$ taie axa Oy în M $(O, -a\lambda)$; dreapta δ are ecuaţia

$$(\delta) \qquad y + a\lambda = \frac{\lambda + k}{1 - \lambda k} x \quad , \quad k = \operatorname{tg} u;$$

sau scriind-o sub forma

$$ak\lambda^2 + (x + ky - a)\lambda + kx - y = 0$$

obținem înfășurătoarea prin condiția ca ecuația precedentă să aibă o rădăcină dublă în λ:

$$(x + ky - a)^2 - 4ak(kx - y) = 0;$$

se vede că această ecuație reprezintă o parabolă de axă $x + ky = a$ și de tangentă în vârf $y = kx$, adică dreapta t' dusă prin O și făcând unghiul u cu Ox. Parametrul p' (calculat după formula $p^2 = -\Delta : \eta^3$) este dat de $p' = p \cos u$, $p = 2a$ fiind parametrul parabolei P de focar F și tangentă în vârf t. Fie F' (α, β) focarul parabolei P'; α, β verifică ecuația axei și distanța dela F' la t' este a, ceeace conduce la F' = F.

Să ordonăm ecuația parabolei P' în raport cu k

$$(P') \quad (y^2 - 4ax)k^2 + 2y(x + a)k + (x - a)^2 = 0;$$

ecuația parabolei (P'') se obține schimbând semnul lui k. Rezolvând acest sistem de ecuații aflăm pe de o parte $y = 0, (x - a)^2 = 4ak^2x$ deci $x_1 x_2 = a^2$; pe de altă parte $x = -a$, $y = \pm 2ai \operatorname{cosec} u$.

Pentru a afla înfășurătoarea parabolelor P' scriem că ecuația în k are o rădăcină dublă, deci

$$x[y^2 + (x - a)^2] = 0$$

și cum parabolele nu trec prin focar, înfășurătoarea este $x = 0$ adică dreapta t.

Transformarea prin inversiune ne dă propoziția: *Fie* F *un punct fix al unui cerc* O *și* M *un punct mobil pe același cerc. Cercurile* δ *descrise pe coarda* MF *capabile de același unghiu* u *înfășoară o cardioidă* P' *cu un punct dublu în* F. *Toate aceste cardioide, pentru diferitele valori ale lui* u, *înfășoară cercul omotetic* (F, 2) *al lui* O.

Observări. 1. D-l CANTUNIAR demonstrează prin geometria analitică și propoziția transformată.

2. Ea se poate învedera geometric astfel; fie C mijlocul coardei FM, care descrie cercul de diametru OF; fie și C' centrul cercului δ; triunghiul CFC' rămâne asemenea cu el însuși iar F este fix; C' descrie deci cercul de coardă OF, capabil de unghiul u; se știe însă că *cercurile ce trec printr'un punct fix* F *și cu centrele pe un cerc* (C') *ce trece prin* F *înfășoară o cardioidă.*

3. Pentru $u = 90^0$, proprietatea precedentă este clasică.

4. D-l Cr. Cantuniar recunoaşte poziţia focarului parabolei P', scriind că o dreaptă isotropă dusă prin acest punct este tangentă parabolei.

5. Propoziţia iniţială se poate învedera geometric astfel. Proiectăm pe F în M' pe Δ. In patrulaterul inscriptibil OM M' F unghiul M' OF = u deci OM' este o dreaptă fixă, fie t'. M' fiind mobil pe t', perpendiculara δ în M' pe M' F înfăşoară parabola P' de focar F şi tangentă în vârf t'. Vârful O' este proiecţia lui O pe t' deci locul vârfurilor paraboleler P' este cercul de diametru OF. Raportul de asemănare al parabolelor P', P este $\overline{FO'} : \overline{FO} = \cos u$. Dreapta t este şi ea o tangentă a parabolei P' pentru o poziţie a lui M astfel ca unghiul $(F M, t) = u$ deci parabolele P' înfăşoară tangenta t. Axa Ox a parabolei P taie parabola P' în U şi V conjugatele armonice ale focarului F comun şi piciorului comun al directoarelor d, d', pe axă ; deci U, V sunt inverse în raport cu cercul (O, F). Parabolele P', P'' fiind simetrice faţă de Ox se taie în U, V şi a doua coardă a lor este perpendiculară pe Ox.

6. In ultimul timp s'a primit o bună soluţie dela d-l Mircea D. Popa.

PROBLEMA 5573. *Se consideră un triunghiu* ABC *înscris în cercul* (O). *Se construeşte triunghiul echilateral* $AB_a C_a$ *înscris în cercul* (O) *şi având unul din vârfuri în* A. *Fie* A' *punctul comun dreptelor* BC *şi* $B_a C_a$.

Se obţin analog punctele B' *şi* C'. *Să se arate că:*

1°. *Punctele* A', B', C' *sunt pe aceeaşi dreaptă* Δ.

2°. *Cercul* (O) *determină pe dreapta* Δ *o coardă egală cu latura triunghiului echilateral înscris.*

Şerban Gheorghiu.

Problema propusă se mai poate enunţa:

ABC *fiind un trinnghiu înscris în cercul* (O), A_1, B_1, C_1 *punctele diametral opuse vârfurilor în acest cerc, iar* A_2, B_2, C_2 *mijloacele segmentelor* $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$, *perpendicularele în* A_2, B_2, C_2 *pe* AA_1, BB_1, CC_1, *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în trei puncte situate pe o dreaptă tangentă cercului* $A_2 B_2 C_2$.

Transformând această propoziţie prin polare reciproce, obţinem:

Laturile unui triunghiu ABC *sunt tangente în* A_1, B_1, C_1 *cercului înscris* (I, 2r). *Perpendiculara în* A_1 *pe* BC *tae cercul* (I, 2r) *în* A_2, A *şi* A_2 *fiind de aceeaşi parte a laturii* BC. *Dreapta* AA_2 *şi analoagele ei trec prin acelaşi punct situat pe cercul* (I, 2r).

Sau, ceeace-i tot una:

A_1, B_1, C_1 *fiind punctele în care laturile* BC, CA, AB *ale unui triunghiu* ABC *sunt tangente cercului înscris* (I), A', B', C' *punctele diametral opuse punctelor* A_1, B_1, C_1 *în cercul* (I), *iar* A'', B'', C'' *mijloacele segmentelor* $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$, *dreptele* A''A', B''B', C''C' *sunt concurente într'un punct de pe cercul* (I).

Voi da o soluţie baricentrică acestei din urmă probleme. Fie ABC triunghiul de referinţă.

$$I(a, b, c) \quad , \quad A''(2p + a, b, c) \quad , \quad A_1(0, p - c, p - b)$$

Deci:

$$(A_1 I) \quad \alpha(b - c)(p - a) + \beta a(p - b) - \gamma a(p - c) = 0$$

$$A'[a^2, (p - a)(p - b) \quad , \quad (p - a)(p - c)]$$

Deci:

$$(A'A'') \quad \alpha(p - a)(b - c) - \beta[2(p - a)(p - c) - a(p - b)]$$
$$+ \gamma[2(p - a)(p - b) - a(p - c)] = 0.$$

Dreapta A'A'' retae cercul (I) în punctul lui FEUERBACH.

$$P[(p - a)(b - c)^2 \quad , \quad (p - b)(c - a)^2 \quad , \quad (p - c)(a - b)^2].$$

Din cauza simetriei rezultă că şi celelalte drepte trec prin acest punct.

Dreptele $A''A_1$, $B''B_1$, $C''C_1$ concură în punctul

$$Q[(2p+a)(b+c)(p-b)(p-c) \quad , \quad (2p+b)(c+a)(p-c)(p-a),$$
$$(2p+c)(a+b)(p-a)(p-b).$$

Putem deci enunţa:

ABC *fiind un triunghiu înscris în cercul* (O, R), *cercul* (O, R/2) *tae dreptele* AO, BO, CO *în* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, *astfel încât tangentele în aceste puncte la cercul* (O, R/2) *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *ale triunghiului* ABC *în şase puncte aşezate pe două drepte, dintre care una este tangentă cercului* (O, R/2).

P. P. DRĂGHICESCU.

Altă soluţie. **Imi propun să demonstrez următoarea propoziţiune, ceva mai generală:**

Se consideră un triunghiu **ABC** ***înscris în conica*** **(O)** ***şi conica*** **(E)** ***astfel că există triunghiuri înscrise în conica*** **(O)** ***şi circumscrise conicei*** **(E).**

Tangentele duse din A *la conica* (E) *întâlnesc a doua oară conica* (O) *în punctele* Ba *şi* Ca. *Fie* A′ *punctul comun lui* BC *şi* Ba Ca. *Se determină analog punctele* B′ *şi* C′.

Punctele A′, B′, C′ *sunt colineare iar dreapta* A′B′C′ *este ngentă conicei* (E).

Fie (T) un triunghiu înscris în conica (O) şi circumscris conicei (E). Triunghiurile (T) şi ABC fiind înscrise în aceeaşi conică sunt şi circumscrise unei aceleiaşi conice. Fie (γ) aceasta din urmă conică. Conicele (E) şi (γ) admit după cum se ştie patru tangente comune: laturile triunghiului (T) şi o a patra, pe care o notăm cu δ. Vom demonstra că această tangentă coincide cu dreapta A′B′C′.

Să efectuăm o transformare omografică astfel ca punctele comune lui δ şi conicei (O) să devină punctele ciclice ale planului transformat. Prin această transformare conica (O) devine un cerc (O_1) iar conicele (E) şi (γ) devin două parabole (E_1) şi (γ_1). Triunghiurile ABC şi (T) devin acum două triunghiuri S — $A_1B_1C_1$ şi (T_1) — fiind înscrise în acelaşi cerc (O_1) şi circumscrise aceleaşi parabole (γ_1).

Pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ şi parabola (E_1) propoziţiunea noastră este imediată.

Inadevăr punctul A_1', ce corespunde lui A_1 prin construcţia din enunţ, este punctul dela infinit al lui B_1C_1. Astfel, tangentele duse din A_1 la parabolele înscrise în triunghiul (T_1) sunt în involuţie. Rezultă că dreptele ce unesc punctele unde aceste tangente întâlnesc a doua oară cercul (O_1) trec printr'un punct fix, care este tocmai punctul dela infinit al lui B_1C_1. Aceasta fiindcă printre parabolele înscrise în (T_1) există una cu focarul în A_1 deci punctul fix este pe dreapta dela infinit, iar parabola (γ) este înscrisă în triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi (T_1), deci punctul în chestiune, se găseşte şi pe latura B_1C_1.

Rezultă în definitiv că punctele A_1', B_1', C_1' se găsesc pe dreapta dela infinit, sau pe cea de a patra tangentă comună parabolelor (E_1) şi (γ_1).

Această proprietate fiind proiectivă propoziţiunea noastră este demonstrată.

Trlunghiul (T) variind, dar rămânând înscris în conica (O) şi circumscris conicei (E), dreapta A′B′C′ rămâne evident aceeaşi.

Regăsim astfel propoziţiunea ce a fost demonstrată în *Gazeta Matematică* Vol. XLVIII, pag. 205, § 8 al cărui enunţ îl reproduc.

Se consideră un triunghiu fix ABC *înscris în conica* (O) *şi un triunghiu variabil* (T) *înscris în aceeaşi conică* (O) *şi circumscris conicei* (E). *Triunghiurile* (T) *variind, conicele înscrise în triunghiurile* ABC *şi* (T) *au cu conica* (E) *o tangentă comună fixă.*

In particular, dacă triunghiul (T) are unul din vârfuri în A, conica înscrisă în trlunghiurile ABC şi (T) se reduce la punctele A şi A′. Rezultă că punctul A′ şi analoagele sale B′ şi C′ se găsesc pe o tangentă a conicei (E).

Ş. G.

PROBLEMA 6104. *Fie* V *un centru isogon al triunghiului* ABC *şi* A_1, B_1, C_1 *vârfurile triunghiurilor echilaterale* BCA_1, CAB_1, BAC_1 *corespunzătoare.*

Purtăm pe cevienele lui V:

$$\overline{A_1A'} = \overline{AV} \quad , \quad \overline{B_1B'} = \overline{BV} \quad , \quad \overline{C_1C'} = CV.$$

Să se arate că V *este centrul de greutate al triunghiului* A'B'C'.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de d-nii: MIHAI A. BARBAIANI, CONSTANTIN C. DIACONU, MIHAIL AL. LEON (liceul Aurel Vlaicu, Bucureşti); EMIL E. MARINESCU (bacalaureat), MIRCEA D. POPA (locotenent) şi PETRE P. TEODORESCU (clasa VI-a, liceul Matei Basarab, Bucureşti).

Se ştie [1] că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 se taie într'un centru isogon V sub unghiuri de câte 120° (teorema TORRICELLI). Se ştie de asemenea [2] — şi este lesne de justificat, de altfel, din triunghiurile egale ACA_1, BCB_1 — că segmentele AA_1, BB_1, CC_1 sunt egale. Rezultă egalitatea segmentelor VA', VB', VC' purtate pe drepte ce fac unghiuri egale; deci triunghiul A'B'C' este echilateral de centru V.

Demonstraţia este făcută independent de faptul că triunghiurile echilaterale de pe laturi sunt construite exterior ori interor.

Observaţii. 1. Proprietatea se menţine dacă A, B, C sunt colineare (M. D. POPA).

2. S fiind aria triunghiului şi ω unghiul lui BROCARD, avem

$$\overline{VA'}^2 = \overline{AA_1}^2 = 2S(\operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{3}) \ ,$$

$$\text{aria } A'VB' = \text{aria } B'VC' = \text{aria } C'VA' = \frac{\sqrt{3}}{2} S\ (\operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{3})$$

după cum facem construcţia exterior ori interior. (EM. E. MARINESCU).

3. D-l EM. E. MARINESCU însoţeşte soluţia şi cu alte observaţii, care vor fi folosite altfel.

4. *Altă soluţie.* Scriem vectorial

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} \ , \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} \ , \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1}$$

---

1) *Culegere de Probleme de Geometrie* de G. ŢIŢEICA, probl. 38, cap. IV.

2) F. G. M. *Exercices de Géométrie* pag. 323.

dar vectorii AC, CB, BA sunt aplicaţi pe laturile triunghiului şi suma lor este nulă; de asemenea vectorii CA_1, AB_1, BC_1 pot fi aşezaţi pe laturile unui triunghiu egal cu ABC, rotit de 60°, deci au suma nulă. Suma vectorilor AA_1, BB_1, CC_1 deci a vectorilor VA', VB', VC' este nulă şi V este centrul de greutate al triunghiului A'B'C'.

PROBLEMA 6147. *Să se calculeze suprafaţa celor două heptagoane regulate convexe, ce se obţin în interiorul heptagonului regulat convex* AB... G, *înscris în cercul de rază* R, *atunci când se construesc cele 2 heptagoane stelate, ştiind că:*

$$\frac{\overline{AB}}{R} = \frac{43}{50}.$$

Se cer două zecimale exacte.

C. MIHU.

Soluţie dată de d-l MIHAI R. CONSTANTINESCU (cl. 8-a Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti).

Fie S_1 şi S_2 suprafeţele heptagoanelor A'B'... G', respectiv A"B"... G".

Calculul lui S_1: Din triunghiul AA'B avem:

$$\sphericalangle A'AB = \sphericalangle A'BA = \frac{\sphericalangle AOB}{2} = \frac{360^0}{2\times 7} = \frac{180^0}{7} = \alpha;$$

Din triunghiul AMO, M fiind mijlocul lui AB, avem:

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = R \cdot \sin AOM = R \cdot \sin \frac{AOB}{2} = R \sin\alpha;$$

cum din enunţ:

$$\frac{\overline{AB}}{2R} = \frac{43}{100} = 0{,}43$$

rezultă:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{2R} = 0{,}43. \qquad (1)$$

Avem apoi urmărind pe figură:

$$\overline{A'M} = \overline{AM}\,tg\alpha = R\,.\,sin\alpha\,.\,tg\,.\,\alpha;$$

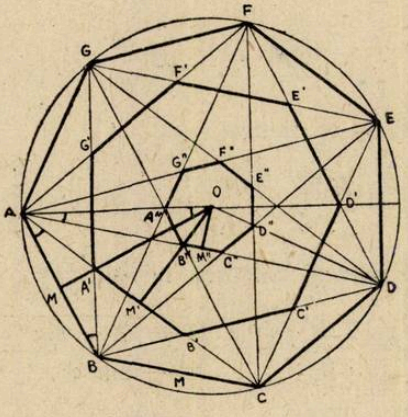
$$\overline{OA'} = \overline{OM} - \overline{MA'} = R\cos\alpha - R\sin\alpha\,.\,tg\alpha = R\,.\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\overline{A'B'} = 2\,.\,\overline{A'M'} = 2\,.\,\overline{OA'}\,.\,\sin\alpha = R\,.\cos 2\alpha\,.\,tg\alpha;$$

$$\overline{OM'} = \overline{OA'}\,.\cos\alpha = R\,.\cos 2\alpha;$$

$$\overline{A'B'} = 2\,R\,.\cos 2\alpha\,.\,tg\alpha;$$

$$\overline{OM'} = R\,.\cos 2\alpha; \qquad (2)$$



Expresia lui S_1 va fi (ţinând seama de (2)):

$$S_1 = \frac{7\,.\,\overline{A'B'}\,.\,\overline{OM'}}{2} = 7\,.\,R^2\,.\cos 2\alpha\,.\,tg\alpha;$$

exprimând pe cos 2α şi tg α în funcţie de sin α şi ţinând seama de (1) avem:

$$S_1 = 7\,R^2\,(1 - 2\sin^2\alpha).\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};$$

$$S_1 = 7\,.\,R^2\,(1 - 2 \times 0{,}43^2)\,.\,\frac{0{,}43}{\sqrt{1 - 0{,}43^2}} = 1{,}32\ldots R^2;$$

$$S_1 = 1{,}32\ldots R^2;$$

Calculul lui S_2: Din triunghiul AOD avem:

$$\sphericalangle OAD = \frac{\sphericalangle EAD}{4} = \frac{\alpha}{2};$$

$$\overline{OM''} = \overline{OA} \cdot \sin OAD = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\overline{M''B''} = \overline{OM''} \cdot \operatorname{tg}\alpha = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\overline{A''B''} = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\overline{OM''} = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Expresia lui S_2 va fi deci:

$$S_2 = \frac{7 \cdot \overline{A''B''} \cdot \overline{OM''}}{2} = 7 \cdot R^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

sau în funcţie de $\sin\alpha$ şi valoarea lui din (1):

$$S_2 = \frac{7 \cdot R^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot (1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha})}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};$$

$$S_2 = \frac{7 \cdot R^2}{2} \cdot \frac{0{,}43\,(1 - \sqrt{1 - 0{,}43^2})}{\sqrt{1 - 0{,}43^2}} = 0{,}16\ldots R^2;$$

$$S_2 = 0{,}16\ldots R^2.$$

Notă: Dacă notăm cu S supr. heptagonului AB ... G avem:

$$S = K \cdot \cos^2\alpha\ ;\ S_1 = K \cdot \cos^2 2\alpha\ ;\ S_2 = K \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

unde $K = 7R^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Eliminând pe K şi α din aceste trei relaţii se poate obţine o relaţie în S; S_1; S_2; sau eliminând numai pe α din două din ele se poate obţine o relaţie între S şi S_1; S şi S_2 sau S_1 şi S_2.

C. MIHU.

PROBLEMA 6166. *Fie* A, A' *capetele unui diametru al unui cerc* O, *de rază* R *şi* C, D *două puncte pe un diametru perpendicular, de o parte şi de alta a centrului* O, *astfel ca*

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}R,\ \overline{OD} = 2R;$$

A'C *retaie cercul în* H *şi* AD *retaie cercul în* G. GH *taie diametrul* AA' *în* I. *Să se arate că:*

1°. GH *este perpendiculară pe* AA';

2°. $\dfrac{\overline{OI}}{\overline{IA}} = \dfrac{3}{2}$.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de d-nii: RADU I. BEŞCHEA (Politehnică, Bucureşti); CEZAR N. BOERESCU (idem); ANDRÉ E. DONEAUD (liceul T. Maiorescu, Bucureşti); SORIN F. DUMITRESCU, SILVIO E. FANCIOTTI (Politehnică, Bucureşti); GHEORGHE A. GRIGORE (idem); ALEXANDRU I. KLANG (idem); GEORGE V. MANOLESCU (liceul Brăila); EMIL E. MARINESCU (student); MIRCEA D. PETCULESCU (Politehnica, Bucureşti); A. I. VARGĂ (student).

1°. Triunghiurile dreptunghice A'OC, AOD având catetele proporţionale sunt asemenea. Rezultă egalitatea unghiurilor

$$A'CO = OAG = A'HG.$$

Unghiurile corespondente C şi H fiind astfel egale, latura HG este paralelă cu OC deci perpendiculară pe AA'.

2°. Din grupele de triunghiuri asemenea A'CO, A'HI şi OAD, IAG rezultă

$$\overline{A'I} = 2\overline{IH} = 2\overline{GI} = 4\overline{IA}$$

adică

$$\overline{IA} = \frac{1}{5}\overline{AA'} = \frac{2}{5}R\ ,\ \overline{OI} = \frac{3}{5}R$$

ceea ce justifică raportul din enunţ.

Observaţii. 1°. Alte soluţii geometrice bune date de d-şoara SANDA HANGAN şi de d-nii: M. BARBAIANI, A. BÂRZOTESCU, C. CANTUNIAR, P. COLUMBEANU, R. HARET, M. MIŞICU, A. MORAITE, I. MUNTEANU, T. MUSTĂCESCU, S. NANUL, V. PĂLĂCEANU, I. POPESCU, C. ŞERBAN (S-lt), P. P. TEODORESCU, SILVIU M. PUŞCAŞU, DORIN FURTUNESCU, MIRCEA V. SOARE, C. S. TĂNĂSESCU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU, M. G. IOSIFESCU.

2°. Au rezolvat problema prin geometria analitică, d-nii: G. D. BRAŞOVEANU, M. R. CONSTANTINESCU, C. DIACONU, G. MANOLESCU, L. MANOLIU, M. PETCULESCU, G. RULEA, M. SĂVESCU.

3°. Au mai rezolvat problema d-nii: VALERIU-PANDELE A. PETCU şi D. SENI.

PROBLEMA 6184. *Fie* D, E, F *punctele de contact ale cercului* I *înscris în triunghiul* ABC *cu laturile triunghiului. Paralelele duse prin centrele cercurilor* AEF, BDF, CDE *respectiv la dreptele* AD, BE, CF *sunt concurente.*

THEODOR COCEA.

Soluţie dată de D-nii: ION A. BARBU (student Bucureşti), GHEORGHE A. GRIGORE (student-inginer), EMIL E. MARINESCU (student-inginer, Bucureşti), TRAIAN V. MUSTĂCESCU (Politehnică, Bucureşti), PETRE P. TEODORESCU (clasa VI. liceul Matei Basarab, Bucureşti).

Cercul AEF trece prin I, E şi F fiind proiecţiile lui I pe laturile unghiului A. Deci centrul cercului AEF este la mijlocul segmentului AI. Pe de altă parte, dreptele AD, BE, CF sunt concurente în punctul Γ (GERGONNE). Deci paralelele duse prin mijloacele segmentelor AI, BI, CI la AD, BE, CF trec prin mijlocul segmentului IΓ.

PROBLEMA 6210. *Un salahor timp de 8 ore pe zi, asvârle câte 120 cărămizi pe oră unui alt salahor care le primeşte spre a le trimite mai departe.*

Unghiul de asvârlire al cărămizilor cu orizontala este de 30°, distanţa orizontală de asvârlire între primul şi al doilea salahor este 8 m, iar greutatea unei cărămizi este 4 kg. Să se arate că salahorul poate economisi o parte din energia ce consumă în timpul lucrului şi să se determine cât este această energie pentru o zi de lucru. Rezistenţa aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de d-nii: ADRIAN M. EFTODE, VAL. STANCIU (Liceul Militar Craiova).

Luând ca origine O a axelor de coordonate *punctul de asvârlire*, axa Ox *orizontală* axa Oy *verticală* şi notând cu v_0 *viteza de asvârlire*, cu α *unghiul de asvârlire* şi cu t *timpul* avem:

$$x = v_0 t \cos\alpha \quad , \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

în care g este *acceleraţia gravitaţiei*, $g = 9{,}81$ m/sec^2.

Ecuaţia traiectoriei se obţine prin eliminarea timpului t între ecuaţiile (1) ale mişcării:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \tag{2}$$

Pentru $y = 0$ se obţine din (2) *bătaia* l

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{3}$$

iar din (1) timpul T necesar pentru a străbate traectoria:

$$T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \operatorname{tg}\alpha \tag{4}$$

Energia cinetică E, necesară asvârlirii proiectilului este:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 . \tag{5}$$

Sau, ţinând seamă de (3):

$$E = \frac{mgl}{2 \sin 2\alpha} . \tag{6}$$

Din (6) se observă că pentru aceiaşi bătaie l, energia E este minimă pentru $\sin 2\alpha = 1$; $\alpha = 45^0$.

Rezultă:

$$E_{min} = \frac{mgl}{2} . \tag{7}$$

Pierderea de energie rezultată prin asvârlirea proiectilului sub un unghiu $\alpha \neq 45^0$ va fi:

$$\Delta E = E - E_{min} = \frac{mgl}{2} \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - 1 \right) \tag{8}$$

In cazul problemei date, în timp de o zi, se asvârl $120 \times 8 = 960$ cărămizi în greutate de $960 \times 4 = 3840$ kg; deci unghiul α este 30^0. Rezultă:

$$E = \frac{3840 \times 8}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 17.736 \text{ kgm}$$

$$E_{min} = \frac{3840 \times 8}{2} = 15.360 \text{ kgm}$$

$$\Delta E = E - E_{min} = 2376 \text{ kgm.}$$

Aceasta înseamnă că salahorul ar putea *cu aceiași oboseală fizică să arunce un număr mai mare de cărămizi.*

In adevăr, energia minimă necesară asvârlirii unei cărămizi este de $\frac{4 \times 8}{2} = 16$ kgm, iar energiei E îi corespunde asvârlirea a

$$\frac{17.735}{16} = 1.108 \text{ cărămizi}$$

deci cu $1108 - 960 = 148$ *cărămizi mai mult.*

Rezultă deci că *producția se poate spori cu 15,6% fără a aduce nici un spor de oboseală salahorului.*

D-l A. M. EFTODE calculează și timpul T cu formula (4) timp în care cărămida străbate traiectoria între primul și al doilea salahor.

Pentru $\alpha = 30^0$:

$$T = \sqrt{\frac{2 \times 8}{9,81} tg30^0} = 0,97 \text{ secunde}$$

Pentru $\alpha = 45^0$:

$$T = \sqrt{\frac{2 \times 8}{9,81} tg45^0} = 1,28 \text{ secunde.}$$

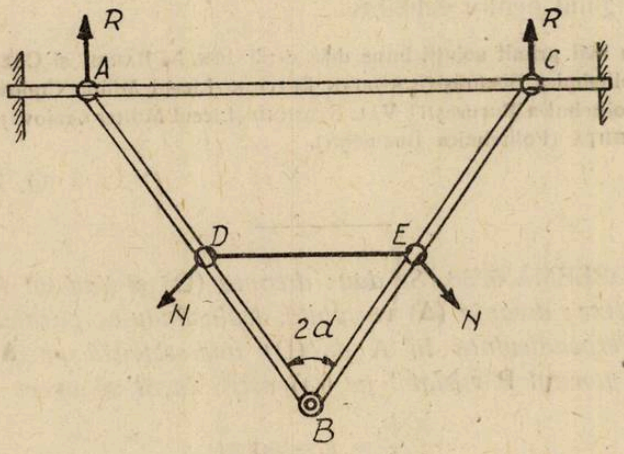
AL. ST.

PROBLEMA 6219. *Se dau 2 bare identice* AB *și* BC *de lungime* l, *articulate între ele în* B, *fără greutate proprie și prevăzute în* A *și* C *cu câte un inel mic fără greutate proprie și care lunecă pe o bară fixă orizontală fără frecare. Pe aceste bare lunecă fără frecare o altă bară* DE *de lungime* $\frac{1}{2}$ *și greutate* G, *prin intermediul inelelor fără greutate proprie* D (*care lunecă pe bara* AB) *și* E *care lunecă pe bara* BC. *Să se determine care va fi poziția de echilibru a sistemului* (*unghiul* 2α *cu care se deschid barele în* B).

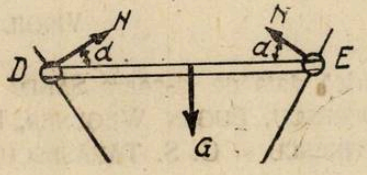
GABRIELA ȚIȚEICA.

Soluție dată de d-l PETRE D. COLUMBEANU (Politehnica București).

Sistemul este simetric față de axa verticală ce trece prin B. *Asupra barei* DE vor lucra forțele: G = greutatea barei, și 2 forțe N de sprijin perpendiculare pe barele AB și BC, egale între ele din cauza simetriei.



BARA DE



Scriind echilibrul acestor forțe, avem din proecția lor pe verticală:

$$2\,N \sin\alpha = G \quad \text{deci} \quad N = \frac{G}{2\sin\alpha}.$$

Asupra fiecăreia din barele AB, BC vor lucra câte o forță egală și de sens contrar cu N în punctele D și E, forțe de susținere R în punctele A și C perpendiculare pe bara orizontală și câte o forță orizontală în punctul de articulație B.

Pentru echilibrul barei AB, luăm momentele față de B, notând DB = x, deci

$$x = \frac{l}{4\sin\alpha} \quad \therefore \quad R\,l\sin\alpha = N\,x.$$

De unde, ținând seama că $R = \frac{G}{2}$, căpătăm: $\sin^3\alpha = \frac{1}{4}$, care ne dă unghiul pentru echilibru.

S'au mai primit soluții bune dela d-nii ION A. BARBU și CEZAR BOERESCU (Politehnica București), ADRIAN EFTODE (Liceul Militar Craiova), IOAN KINSKY (Politehnica București), VAL. STANCIU (Liceul Militar Craiova), ȘTEFAN I. GHEORGHIȚĂ (Politehnica București).

G. Ț.

PROBLEMA 6238. *Se dau: dreapta* (D) *și punctul* A *de pe aceasta, fixe; dreapta* (Δ) *variabilă, deplasându-se paralel cu ea însăși. Perpendiculara în* A *pe* (D) *intersectează pe* (Δ) *în* N. *Fie punctul* P *variabil pe* (D) *astfel încât să avem*

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = k = \text{const.}$$

Se cere locul geometric al punctului M, *proecția lui* P *pe* (Δ).

VIRGIL GHIȚESCU.

Soluție geometrică dată de d-șoara SANDA M. HANGANU și de d-nii: CEZAR BOERESCU, EUGEN WEGENER, I. T. MUNTEANU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU și C. S. TĂNĂSESCU.

Din $\frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = \text{const.}$ rezultă că triunghiul dreptunghic ANP variază rămânând mereu asemenea cu el însuși; în consecință $\sphericalangle ANP = \text{const.}$ Deci și

$$\sphericalangle PNM = \sphericalangle ANM - \sphericalangle ANP = \text{const.}$$

Apoi din patrulaterul inscriptibil ANMP mai deducem

$$\sphericalangle MAP = \sphericalangle PNM = \text{const.}$$

Punctul A fiind fix iar $\sphericalangle MAP$ fiind constant, rezultă că locul geometric al punctului M este dreapta fixă AM.

Altă soluție pur geometrică a dat D-l P. P. TEODORESCU, arătând că punctele locului M_1, M_2, M_3, ..., sunt colineare pe o dreaptă fixă trecând prin A.

Soluție prin geometrie analitică dată de d-nii: M. R. CONSTANTINESCU, MIRCEA G. IOSIFESCU, R. SP. HARET, I. I. NOVAC, SILVIU PUȘCAȘU, MIRCEA V. SOARE, GEORGE B. D. STĂNILĂ, V. I. ȘANDRU, EUG. WEGENER, C. CORDUNEANU, MIRCEA A. SĂVESCU și C. S. TĂNĂSESCU.

Luăm ca axe de coordonate pe $(D) \equiv x'x$ și $(AN) \equiv y'y$. In raport cu aceste axe vom obține

$$(\Delta) \equiv y = mx + \alpha \ (m \text{ constant}, \alpha \text{ variabil}), \ P\left(\frac{\alpha}{k}, 0\right).$$

Ecuația dreptei MP va fi

$$y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{\alpha}{k}\right).$$

Eliminând pe α între precedentele două ecuații, vom afla ecuația locului geometric căutat

$$y = \left(\frac{k+m}{1-km}\right)x,$$

care reprezintă o dreaptă trecând prin origină.

A mai rezolvat problema d-l S. E. FANCIOTTI.

V. GH.

PROBLEMA 6251. *Dintr'un punct* A *se lasă să cadă liber o greutate de 20 grame, care atinge solul după 2 secunde. Dacă la jumătatea distanței dintre punctul* A *și sol se așează o placă orizontală de sticlă și lăsăm din nou greutatea să cadă liber din* A, *aceasta trece prin placa de sticlă și ajunge la sol în 2,5 secunde.*

Să se calculeze energia cinetică pierdută prin spargerea sticlei. Rezistența aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de d-l IOAN KINSKI (Politehnica Timișoara).

Notând cu h distanța dela punctul A la sol avem:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 2^2 = 19{,}62 \text{ m}.$$

Distanța dela A la placa de sticlă este:

$$\frac{h}{2} = 9{,}81 \text{ m},$$

iar timpul t_0 *necesar ca greutatea să ajungă din* A *la placa de sticlă* ne va fi dat de relația:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad \therefore \quad t_0 = \sqrt{2} = 1{,}414 \text{ secunde.}$$

Vitesa v_0 cu care greutatea *izbește sticla* este:

$$v_0 = g t_0 = 9{,}81 \times 1{,}414 = 13{,}87 \text{ m/sec.}$$

Să studiem acum mișcarea greutății *după ce a străbătut sticla.*

Spațiul parcurs este $\frac{h}{2} = 9{,}81$ m, iar timpul în care străbate acest spațiu este $t_1 = 2{,}5 - 1{,}414 = 1{,}086$ sec.

Notând cu v_1 vitesa greutății *după ce a trecut prin placa de sticlă* vom avea:

$$\frac{h}{2} = v_1 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \therefore \quad 9{,}81 = 1{,}086\, v_1 + \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times \overline{1{,}086}^2 .$$

Rezultă:

$$v_1 = 3{,}71 \text{ m/sec.}$$

Energia cinetică pierdută prin spargerea sticlei este:

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}020}{9{,}81} (\overline{13{,}87}^2 - \overline{3{,}71}^2) \cong 0{,}182 \text{ kgm} \cong 17.860.000 \text{ ergi.}$$

Observații. 1. Să notăm cu v_2 și v' respectiv vitesele cu care greutatea izbește solul în cazul când nu interpunem sau când interpunem placa de sticlă în drumul greutății.

Avem:

$$v_2 = gt = 9{,}81 \times 2 = 19{,}62 \text{ m/sec}$$

$$v' = v_1 + g t_1 = 3{,}71 + 9{,}81 \times 1{,}086 = 14{,}36 \text{ m/sec.}$$

2. La rezolvarea problemei, grosimea plăcii și durata de străpungere a plăcii s'au neglijat.

3. A rezolvat problema și d-l CEZAR I. BOERESCU.

AL. ST.

EXERCIŢII

13. *Să se arate că dacă* a, b, c, α, β, γ *sunt numere reale iar*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leqslant 1$$

atunci ecuaţia

$$(ab+bc+ca)\,x^2-2\,(a+b+c)\,x+2\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-1)=0$$

are rădăcinile reale.

M. ADAM.

R Realizantul ecuaţiei este

$$R=a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ca)\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Insă

$$(a^2+b^2+c^2)\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\,(ab+bc+ca)\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=$$
$$=(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2+(a\beta+b\gamma+c\alpha)^2+(a\gamma+b\alpha+c\beta)=S^2.$$

Deci conform condiţiei din enunţ

$$R=S^2+(a^2+b^2+c^2)\,(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)>0.$$

Acest exerciţiu extinde problema 4398 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLV, pag. 543 unde

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

14. *Să se desvolte în serie*

$$y=chx$$

după puterile lui e^x+1.

E. WEGENER.

R. Se ştie că

$$chx=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}.$$

Punând

$$e^x+1=z\quad\therefore\quad e^x=z-1$$

găsim

$$chx=\frac{(z-1)^2+1}{2(z-1)}=\frac{1}{2}\left[z-1+\frac{1}{z-1}\right].$$

Dar

$$\frac{1}{z-1}=-[1+z+z^2+\ldots+z^n].$$

Deci

$$chx=-\frac{1}{2}[2+(e^x+1)^2+(e^x+1)^3\ldots].$$

PROBLEME PROPUSE

6310. Să se demonstreze că ecuaţiunea

$$x = p\,\varphi(x)$$

în care $\varphi(x)$ este indicatorul lui x, nu este posibilă decât pentru două valori ale lui p.

Să se găsească aceste valori şi să se caute soluţiile corespunzătoare ale lui x.

G-L GH. BUICLIU.

6311. Izogonalele, faţă de o aceeaşi dreaptă Δ, duse prin perechile de vârfuri adiacente ale unui patrulater faţă de unghiurile respective ale patrulaterului, se întretaie în 4 puncte care sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil, care rămâne asemenea cu el însuşi când Δ variază în plan.

Să se găsească locul centrului cercului circumscris acestui patrulater, precum şi direcţiile Δ pentru care raza acestui care are valorile extreme.

LT. MIRCEA D. POPA.

6312. Fie P centrul de greutate al perimetrului triunghiului ABC, r raza cercului înscris triunghiului, iar α, β, γ mijloacele laturilor BC, CA, AB.

Să se demonstreze că:

$$\overline{\alpha P}\sin\frac{A}{2}+\overline{\beta P}\sin\frac{\beta}{2}+\overline{\gamma P}\sin\frac{C}{2}=\frac{3r}{2}.$$

I. A. BARBU.

6313. Se ştie că prin ridicarea simbolică la patrat a unei matrice de n linii şi m coloane ($m > n$), se obţine un determinant care se poate pune sub forma unei sume de C_m^n patrate (CAUCHY-BINET).

Să se arate că în cazul când $n = 2k$ şi $m = 4k$, determinantul obţinut se poate pune şi sub forma unei sume de C_{4n-1}^{2n-1} patrate.

MIRCEA ADAM.

6314. Dându-se identitățile

$$\cos(a+b+c)+\cos(b+c-a)+\cos(c+a-b)+\cos(a+b-c)$$
$$=4\cos a\cos b\cos c-\sin(a+b+c)+\sin(b+c-a)$$
$$+\sin(c+a-b)+\sin(a+b-c)=4\sin a\sin b\sin c,$$

demonstrate la pag. 237 în *Trigonométrie* par AD. MINEUR, să se deducă identitățile:

$$\cos a\cos b\cos c+\cos\left(a+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(b+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(c+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+\cos\left(a+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(b+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(c+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\cos(a+b+c),$$

$$\sin a\sin b\sin c+\sin\left(a+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(b+\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(c+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$+\sin\left(a+\frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(b+\frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(c+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3}{4}\sin(a+b+c).$$

G-L GH. I. LITEANU.

6315. Se dă ecuația de gradul al treilea

$$x^3+px+q=0$$

ai cărei coeficienți sunt numere reale. Să se formeze și să se discute ecuația algebrică, ale cărei rădăcini sunt patratele rădăcinilor ecuației date.

TH. ANGHELUȚĂ.

6316. Cercurile concentrice C și C′ de raze R și R′ sunt tăiate de o secantă variabilă. Fie A, A′ și B, B′ punctele de intersecție ale secantei cu cercul C, respectiv C′. Se cere:

1°. Locul descris de punctul de intersecție al tangentelor în A și B respectiv în A′ și B′, când secanta se deplasează paralel cu ea însăși.

2°. Când secanta se rotește în jurul unui punct fix situat în interiorul cercului mic.

3°. Construcția curbelor obținute la punctele 1° și 2° pentru cazul particular $2R'=R\sqrt{2}$.

C. MIHU.

6317. Fie $u_1 = 1$; $u_2 = p$; u_3; ... u_n şirul de recurenţă de ordinul al 2-lea în care

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}.$$

Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{u_{\alpha_1+\beta_1}} & \frac{1}{u_{\alpha_1+\beta_2}} & \cdots & \frac{1}{u_{\alpha_1+\beta_n}} \\ \frac{1}{u_{\alpha_2+\beta_1}} & \frac{1}{u_{\alpha_2+\beta_2}} & \cdots & \frac{1}{u_{\alpha_2+\beta_n}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{u_{\alpha_n+\beta_1}} & \frac{1}{u_{\alpha_n+\beta_2}} & \cdots & \frac{1}{u_{\alpha_n+\beta_n}} \end{vmatrix}.$$

IOAN B. FLORESCU.

6318. Tangenta într'un punct mobil M, al unui cerc (O), taie o tangentă fixă în punctul N. Fie P punctul de pe tangenta în M aşa încât raportul $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}$ are o valoare constantă k.

Locul geometric al punctului P este o cubică (Γ_k).

Să se studieze forma cubicei (Γ_k) şi să se determine locul geometric al punctelor cubicei în care normalele sunt tangente la cercul (O), precum şi locul geometric al punctelor de inflexiune ale cubicei, când k variază.

ANDREI DOBRESCU.

6319. O autocisternă străbate un drum rectilin şi orizontal cu o mişcare uniform accelerată, *viteza sa iniţială* fiind v_0, iar *acceleraţia* w. Dintr'un punct al platformei acestei autocisterne, la intervale de timp T, cad dela înălţimea h a platformei, picături de lichid, căderea primei picături *coincizând* cu plecarea autocisternei. Să se determine *distanţele dintre urmele lăsate pe drum* de picăturele de lichid.

Rezistenţa aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Athanasiu C. Luciliu (6287, 96); *Berdan C.* (1831, 3863, 6294); *Boldescu P.* (A); *Columbeanu D. P.* (6059, 228, 96); *Constantinescu Paul* (6294, 96); *Corduneann C.* (4199, 6282, 94, 96, P); *Doneaud E. A.* (6284, 88); *Enescu G.* (6039, 173, 222, 62); *Fanciotti E. S.* (6043, 83, 176, 206, 22, 33, 38); *Firescu Gr. Şt.* (6148); *Georgescu Răducanu* (P); *Haret Sp. R.* (6264); *Ionescu Bujor Claudiu* (6282); *Mănceseu N. I.* (6222, 62, 64, 71, 85); *Marinescu E. E.* (E, P); *Mihalache G. C.* (5520); *Moraite G. Al.* (5852); *Novac I. I.* (6036, 92, 105, 11, 285, E, P); *Pantazopol C. Stelian* (E); *Petcu A. Valeriu-Pandele* (6166, 73, 222, 62); *Pizanca N. I.* (5593, E); *Popa D. M.* (1753, 2217, 4360, 717, 821, 5138, 39, 42, 69, 73, 395, 97, 426, 32, 49, 62, 560, 74, 608, 09, 21, 36, 63, 757, 846, 64, 901, 92, 6045, 61, 71, 182, 285, N, P); *Popescu I. Barbu* (4898, 6153, 87); *Puşcaşu M. Silviu* (6109, 222, 33); *Seni Dorin* (6166, 206, 22, 33, 67); *Soare V. M.* (5646, 49, 674, P); *Stanciu I. Valeriu* (E, P); *Teodorescu P. P.* (4337, 5612, 6296, E, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cincisute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 30.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 3.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X, XII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII şi IX sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 10.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 28.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 8.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 13.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 33.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . . Lei 21.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 9.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 11.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 13.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu ; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 10.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 15.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 13.000

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul achitat până la 1 Martie 1947 este de 36.000 lei. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Martie 1947.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 15.000 lei pentru abonamentele plătite până la 1 Martie 1947. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Martie 1947.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa :

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 39.949.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1947

ROMÂNIA Cisnădie Lic. Gh. Lazăr Sibiu

SUMARUL

1. Proprietăţi ale triunghiului . . . . . *Inginer N. Blaha.*
2. Asupra unei clase de ecuaţii diferenţiale de ordin superior . . . . . *D-tru Ion Mangeron.*
3. Concursul „Gazetei Matematice" din 1947.
4. Note matematice: 11—13.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Probleme rezolvate: 4319, 5267, 6157, 6187, 6206.
9. Exerciţii: 15.
10. Probleme propuse: 6320—6329.

LICEUL „GHEORGHE LAZĂR" SIBIIU BIBLIOTECA PROFESORILOR

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 17 Februarie, ora 17: Prima Adunare Generală.

Luni 24 Februarie, ora 17: Continuarea primei Adunări Generale şi adunarea materiei pentru Nr. 7.

Luni 10 Martie, ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 7 şi numirea Comisiei pentru Concursul *Gazetei Matematice* din anul 1947.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 1.000

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 9.000

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 10.000

PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI

Imi propun a da unele proprietăți noui la figura care privește obiectul problemei 5202, rezolvată la pag. 200, Vol. L al G. M.

1°. *Fie* AA', BB', CC' *trei ceviene într'un triunghiu dat* ABC. *Din* A', C' *se duc respectiv paralelele la* BA, BC, *care taie pe* CC', AA' *în* A_2, C_1.

Dreapta $A_2\,C_1$ *este paralelă cu* AC.

Demonstrația acestei proprietăți este următoarea:

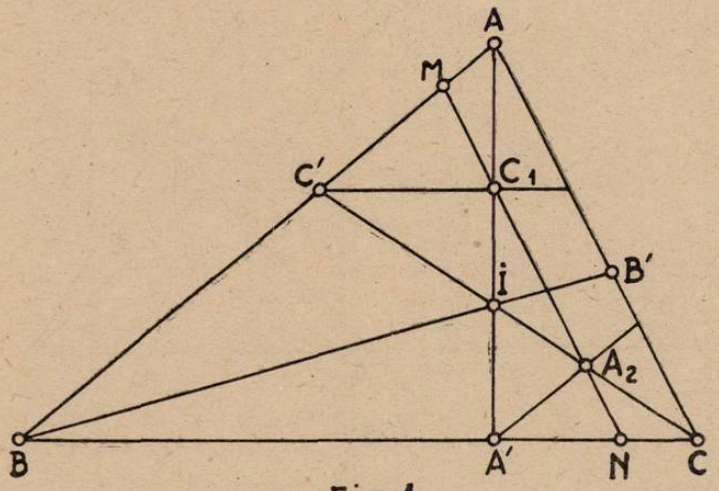


Fig. 1

Dreapta $C_1\,A_2$ taie pe AB în M, iar pe BC în N.

Din considerarea triunghiului BMN, tăiat de transversalele CC', AA', avem:

$$a)\ \frac{CN}{CB}\cdot\frac{C'B}{C'M}\cdot\frac{A_2M}{A_2N}=1\ ;\quad b)\ \frac{AM}{AB}\cdot\frac{A'B}{A'N}\cdot\frac{C_1N}{C_1M}=1.$$

Din triunghiurile asemenea (A' A_2 N, BMN) (C' C_1 M, BMN), avem:

$$\frac{A_2M}{A_2N}=\frac{A'B}{A'N}\ ,\quad \frac{C_1N}{C_1M}=\frac{C'B}{C'M}\ ,$$ care cu *a)* și *b)* dau $$\frac{CN}{CB}=\frac{AM}{AB}\ ,$$

adică MN sau $A_2\,C_1$ este paralelă cu AC.

Această problemă mai poate fi enunțată și ast-fel:

Fie ABC un triunghiu, iar Δ o dreaptă paralelă cu AB, care taie laturile AC, BC în B', A'. Dacă C' este un punct pe AB, dreapta CC' taie pe Δ în N. Ducem NM paralelă cu BC, M fiind intersecția lui NM cu ceviana BB'. De asemeni ducem C'M' paralelă cu AC, M' fiind intersecția cu BB'.

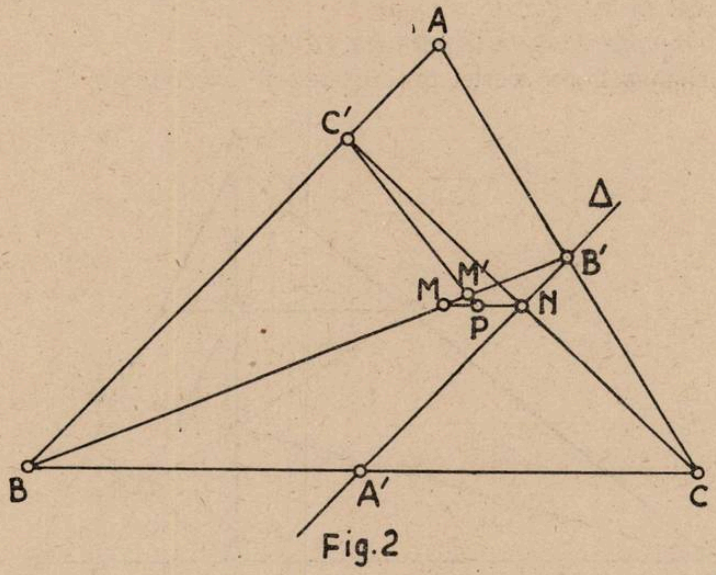


Fig.2

Punctele M, M' se confundă pe BB'. In adevăr avem:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{NB'}{NA'}, \quad \frac{NB'}{NA'} = \frac{MB'}{MB}, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{M'B'}{M'B},$$

$$\therefore \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{NB'}{NA'} = \frac{MB'}{MB} = \frac{M'B'}{M'B},$$

iar din ultimele două rapoarte rezultă că M și M' se confundă pe BB'.

Pentru demonstrarea proprietăților ce voiesc a le expune mai departe și cari fac obiectul studiului nostru, mă voiu folosi și de următoarea proprietate cunoscută:

2°. *Dându-se două cercuri secante de centre* O *și* O', *care se taie în* A *și* B, *ducem secanta* CAD, *ast-fel ca punctul* C *să fie pe cercul* O, *iar* D *pe cercul* O'. *Prin* C *și* D *se duc două paralele, care taie cercul* O *în* C', *iar cercul* O' *în* D'.

Dreapta C'D' *va trece prin* B.

Această proprietate se demonstrează uşor. Avem:

$$\sphericalangle C'CA + \sphericalangle D'DA = 180^0$$

$$\sphericalangle ABC' = 180^0 - \sphericalangle C'CA,$$

$$\sphericalangle D'BA = 180^0 - \sphericalangle D'BA.$$

Adunând membru cu membru ultimele două egalităţi, avem:

$$\sphericalangle ABC' + \sphericalangle D'BA = 180^0,$$

adică punctele C", B, D' sunt colineare.

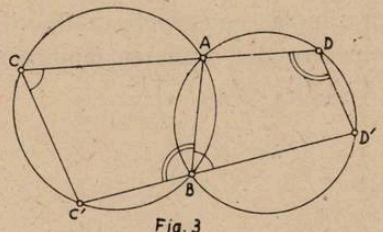


Fig. 3

Având în vedere cele expuse până acuma, voiu păşi la demonstrarea următoarei proprietăţi importante:

3⁰. *Se dă un triunghiu* ABC *tăiat de o transversală în punctele* A', B', C'.

Fie m_a, m_b, m_c; *mijloacele segmentelor* B'C', A'C', B'A' apoi A_1 *simetricul lui* A *faţă de* m_a, B_1 *simetricul lui* B *faţă de* m_b şi C_1 *simetricul lui* C *faţă de* m_c.

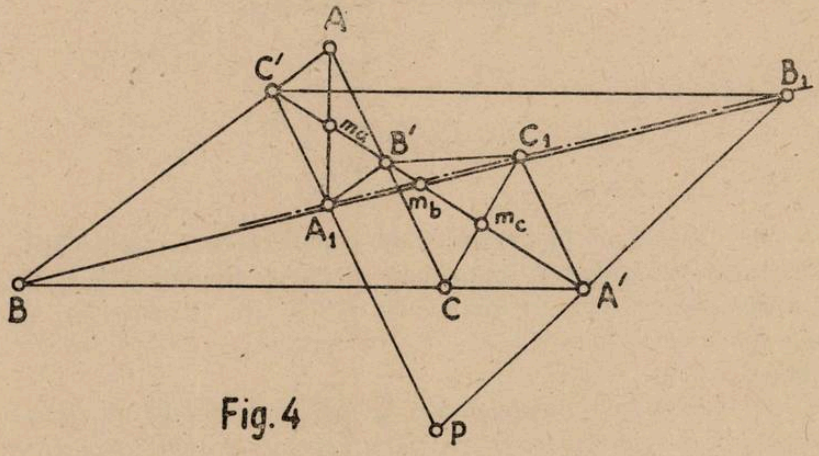


Fig. 4

Punctele A_1, B_1, C_1 *sunt colineare.*

Ducem $C'B_1$ paralelă la BC şi $A'B_1$ paralelă la AB. Punctul B_1 este simetricul lui B faţă de m_b mijlocul lui A'C', figura $BC'B_1A'$ fiind un paralelogram. La fel se obţin şi punctele A_1, C_1.

Fie P intersecția dreptelor $C'A_1$, B_1A'.

Considerând triunghiul $C'BP$, cevienele $C'A'$, B_1A_1 și paralelele A_1B', $A'C_1$ la laturile PB_1, PC' ale triunghiului $PC'B_1$, după proprietatea 1° punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare[1] pe dreapta Δ_1.

In mod analog considerând fie-care triunghiu format de laturile triunghiului dat ABC și secanta A', B', C', cea de a patra dreaptă fiind considerată la rândul ei ca o secantă, obținem alte trei drepte analoage Δ_2, Δ_3, Δ_4, (fig. 5).

4°. *Dreptele* Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *sunt paralele între ele.*

Această proprietate rezultă din simpla construcție a figurii, formând paralelogramele respective pentru determinarea familiilor pe puncte: (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3), (A_4, B_4, C_4).

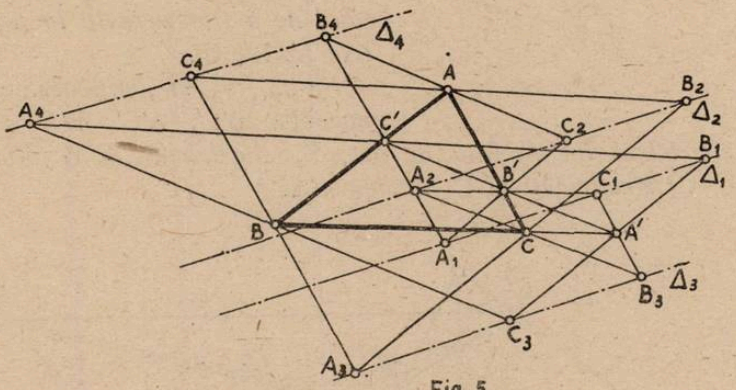


Fig. 5

Se observă pe figura construită complect, că triunghiul ABC este triunghiul median al triunghiului $C_4B_2A_3$; triunghiul $A_4B_1C_3$ este triunghiul median al triunghiului BC'A' etc. Punctele B_2, C_2 sunt simetrice cu punctele C_4, B_4 în raport cu A, deci Δ_4 este paralelă cu Δ_2. s. a. m. d.

3°. *Simetricele dreptelor* Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *în raport cu transversalele corespunzătoare triunghiului considerat sunt concurente în același punct* M, *punctul lui* MIQUEL, *al celor patru drepte date.*

---

1) Acesta este primul punct al problemei 5292 rezolvată la pag. 200, Vol. 4, G. M.

Pentru a demonstra aceasta, vom da mai întâi soluţia următoarei proprietăţi:

Fie un triunghiu ABC şi o transversală A', B', C'.

Fie m_a, m_b, m_c mijloacele segmentelor B'C', C'A', B'A'.

Ducând dreptele D_a, D_b, D_c respectiv prin m_a, m_b, m_c, perpendiculare pe transversala A', B', C', luăm simetricele vârfurilor A, B, C cu acele drepte.

Fie a_1 simetricul lui A faţă de D_a; b_1 simetricul lui B faţă de D_b şi c_1 simetricul lui C faţă de D_c.

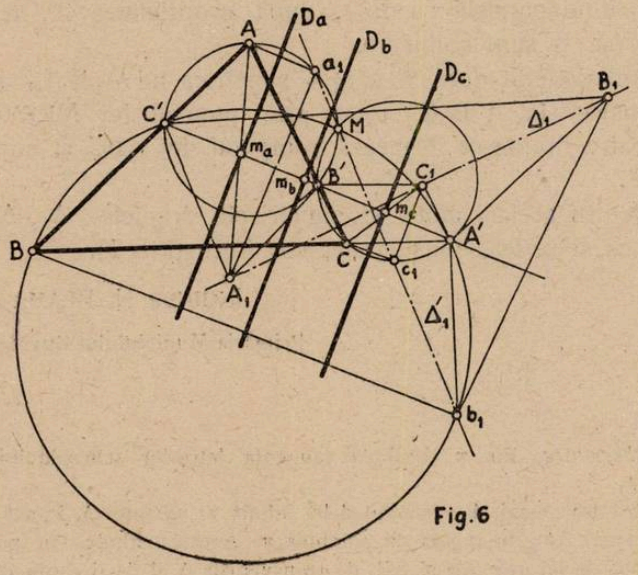


Fig. 6

Observăm că s'au format trapezele isoscele Aa_1 B' C', B' A' c_1 C', BC' A' b_1.

Fie A_1, B_1, C_1 simetricele vârfurilor A, B, C în raport respectiv cu m_a, m_b, m_c. Se deduce uşor că AA_1a_1 este un triunghiu dreptunghic şi că a_1 este simetricul lui A_1 în raport cu dreapta A' B' C'. Punctele B_1, C_1 sunt pentru acelaşi motiv, simetricele punctelor b_1, c_1 faţă de A' B' C'. Punctele A_1, B_1, C_1 fiind colineare şi simetricele lor a_1, b_1, c_1 vor fi colineare.

Să demonstrăm acum că dreapta $a_1 b_1 c_1$ trece ca şi similarele ei prin acelaşi punct M.

Cercurile circumscrise triunghiurilor C'AB', BC'A', B'CA', după o proprietate cunoscută, trec prin acelaşi punct M. (Punctul lui MIQUEL).

Patrulaterul C'Aa_1B' fiind un trapez isoscel, a_1 se găseşte pe cercul circumscris triunghiului C'AB'; deasemenea b_1 se află pe cercul BC'A', iar c_1 pe cercul B'CA'.

Dacă voi demonstra că punctele a_1 Mc_1 b_1 sunt colineare, proprietatea propusă va fi dovedită.

In adevăr considerând cercurile C'AB, BC'A' şi secanta AC'B, iar Aa_1 fiind paralelă cu Bb_1, după proprietatea 2°, rezultă că a_1, M, b_1, c_1 sunt colineare.

Am dovedit deci că $a_1 b_1 c_1$ simetrica lui $A_1 B_1 C_1$ în raport cu transversala A'B'C' trece prin punctul lui MIQUEL M, al celor patru drepte ce formează triunghiul dat ABC şi transversala A'B'C'.

Pentru acelaşi motiv şi simetricele dreptelor Δ_2, Δ_3, Δ_4 în raport cu secantele considerate, vor trece prin M.

INGINER N. BLAHA

Primăria Municipiului Bucureşti.

Observare. Fie π parabola tangentă laturilor triunghiului ABC şi dreptei Δ.

Fie, deasemeni, Δ_∞ punctul dela infinit al secantei Δ. Punctul A_1 este polul dreptei $A\Delta_\infty$ în raport cu parabola π. Aceasta fiindcă în patrulaterul determinat de laturile AB şi AC, de transversala Δ şi de dreapta dela infinit a planului, $A\Delta_\infty$ este una din diagonale iar A_1 este punctul comun celorlalte două diagonale. Rezultă că punctele A_1, B_1 şi C_1 se găsesc pe polara punctului Δ_∞. Dreapta Δ_1 este prin urmare paralelă cu axa parabolei π. Analog şi dreptele Δ_2, Δ_3, Δ_4, ceeace demonstrează propoziţiunea 1°.

Cea de a doua propoziţiune rezultă din aceea că, într'o parabolă, tangenta este o bisectoare a unghiului format de raza focală şi de diametrul punctului de contact. Astfel, dreapta simetrică a diametrului Δ, în raport cu tangenta Δ trece prin focarul parabolei π.

Ş. G.

ASUPRA UNEI CLASE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

Résumé. L'auteur, dans le cadre des recherches sur l'application de la théorie des invariants différentiels et de celle des groupes de transformations infinitésimales à l'intégration des équations différentielles linéaires, recherches, reprises tout récemment, entre autres, par Mr. A. CHIELLINI, énonce quelques résultats préliminaires concernant l'établissement des conditions pour qu'une équation differentielle linéaire homogène, d'ordre quelconque, (α), puisse-être transformée, par un choix convenable d'une transformation de la variable indépendante, (β), dans une équation différentielle à coefficients constants choisis à volonté.

D-l GASTON JULIA în vol. III de *Exerciții de Analiză*, așa de favorabil primit de cultivatorii științelor matematice, propune spre rezolvare următoarea problemă [1].

„*Fiind dată o ecuație diferențială liniară*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0, \tag{1}$$

se ia o nouă variabilă independentă t *legată de* x *prin relația* $t = \varphi(x)$ *și ecuația* (1) *este înlocuită printr'o nouă ecuație liniară*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + q_1(t)\,q = 0. \tag{2}$$

Se cere să se găsească condiția la care trebuie să satisfacă coeficienții p *și* q *ai ecuației* (1) *pentru a fi posibilă alegerea funcției* $\varphi(x)$ *în așa fel ca ecuația* (2) *să aibă coeficienții săi constanți*".

Se găsește că trebuie și este suficient ca funcțiunile $p(x)$ și $q(x)$ să satisfacă următoarea relație:

$$p\sqrt{\frac{1}{|q|}} - \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1}{|q|}} = a, \tag{2_1}$$

a fiind o constantă.

Ne propunem aici să enunțăm condițiile care generalizează rezultatul (2_1).

---

1) V. G. JULIA, *Exercices d'Analyse*, v. III, Gauthier-Villars, Paris, 1939, pag. 115. A se vedea deasemenea E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, AVG, Leipzig, 1943, pag. 420 (2.75 & 2.79)

Considerăm ecuaţia liniară şi omogenă de ordinul n

$$\sum_{i=n}^{0} f_{n-i}(x)\frac{d^i y}{dx^i} = 0\,, \quad f_0 = 1. \tag{α}$$

Ne propunem s'o transformăm, sub rezerva anumitor condiţii ce urmează să le îndeplinească funcţiile f_{n-i}, cu ajutorul unei alegeri convenabile a transformării

$$t = \varphi(x), \tag{β}$$

în ecuaţia

$$\sum_{i=n}^{0} a_{n-i}\frac{d^i y}{dt^i} = 0\,, \quad a_0 = 1, \tag{γ}$$

a_{n-i} fiind numere constante alese după voie.

Ţinând socoteală de o formulă datorită matematicienilor SCHLÖMILCH şi MEYER [1], care dă — cel puţin din punct de vedere formal — expresia derivatei de ordinul i a funcţiei $y(x)$ atunci când se execută o schimbare de variabilă independentă exprimată prin relaţia (β), formulă, care se scrie în cazul nostru sub formă

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{v=1}^{i} \frac{A_{iv}}{v!}\frac{d^v y}{dt^v}, \ (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{δ}$$

unde A_{iv} sunt funcţii întregi de derivate ale funcţiei $\varphi(x)$ date prin

$$A_{iv} = \lim_{\rho \to 0} \frac{d^i}{d\rho^i}(\varphi(x+\rho) - \varphi(x))^v, \tag{α'}$$

şi soluţia problemei ce ne-am propus va fi dată prin rezolvarea următorului sistem de ecuaţii

$$\frac{A_{nn}}{n!} = \frac{A_{nn-1} + f_1 A_{n-1\,n-1}}{(n-1)!\,a_1} = \ldots = \frac{\sum_{v=n}^{n-i} f_{n-v} A_{v\,n-i}}{(n-i)!\,a_i} = \ldots = \frac{f_n}{a_n} \tag{ι}$$

Fără a intra în detalii care ne-ar cere scrierea explicită a expresiunilor coeficienţilor A_{iv}, având în vedere numeroase aplicaţii posibile rezultatelor ce s'ar fi putut deduce din discuţia completă a sistemului de ecuaţii (ι), mai ales pentru formularea unei mulţimi de scheme matematice a diferitelor fenomene fizice sau mecanice,

---

1) O. SCHLÖMILCH, Zur Theorie der höheren Differentialquotienten, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 3, (1858), Leipzig, B. G. Teubner, pag. 66—67.

aşa de importante pentru tineretul nostru studios căruia i se adresează aceste rânduri, ne vom mărgini aici să transcriem soluţiile sistemului (ι) pentru valorile lui $n = 3, 4, 5$ şi 6.

Pentru $n = 3$, condiţiile căutate sunt următoarele:

$$f_1 = a_1 \sqrt[3]{\frac{f_3}{a_3}} - \frac{f_3'}{f_3}, \tag{3_1}$$

$$f_2 = a_2 \sqrt[3]{\frac{f_3^2}{a_3^2}} - \frac{1}{3} a_1 \sqrt[3]{\frac{f_3}{a_3}\frac{f_3'}{f_3}} - \frac{1}{3}\frac{f_3''}{f_3} + \frac{5}{9}\frac{f_3'^2}{f_3^2}. \tag{3_2}$$

Pentru $n = 4$. aceste condiţii pot fi scrise în chipul următor:

$$f_1 = a_1 \sqrt[4]{\frac{f_4}{a_4}} - \frac{3}{2}\frac{f_4'}{f_4}, \tag{3_1}$$

$$f_2 = a_2 \sqrt[4]{\frac{f_4^2}{a_4^2}} - \frac{3}{4} a_1 \sqrt[4]{\frac{f_4}{a_4}\frac{f_4'}{f_4}} - \frac{f_4''}{f_4} + \frac{27 f_4'^2}{16 f_4^2}, \tag{4_2}$$

$$f_3 = a_3 \sqrt[4]{\frac{f_4^3}{a_4^3}} - \frac{1}{4} a_2 \sqrt[4]{\frac{f_4^2}{a_4^2}\frac{f_4'}{f_4}} - \frac{1}{4} a_1 \sqrt[4]{\frac{f_4}{a_4}\frac{f_4''}{f_4}} + \frac{3}{8} a_1 \sqrt[4]{\frac{f_4}{a_4}\frac{f_4'^2}{f_4^2}} - \frac{1}{4}\frac{f_4'''}{f_4} + \frac{19}{16}\frac{f_4'' f_4'}{f_4^2} - \frac{33}{32}\frac{f_4'^3}{f_4^3}. \tag{4_3}$$

$n = 5$. găsim relaţiunile:

$$f_1 = a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}} - 2\frac{f_5'}{f_5}, \tag{5_1}$$

$$f_2 = a_2 \sqrt[5]{\frac{f_5^2}{a_5^2}} - \frac{6}{5} a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}\frac{f_5'}{f_5}} - 2\frac{f_5''}{f_5} + \frac{17}{5}\frac{f_5'^2}{f_5^2}, \tag{5_2}$$

$$f_3 = a_3 \sqrt[5]{\frac{f_5^3}{a_5^3}} - \frac{3}{5} a_2 \sqrt[5]{\frac{f_5^2}{a_5^2}\frac{f_5'}{f_5}} - \frac{4}{5} a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}\frac{f_5''}{f_5}} + \frac{31}{25} a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}\frac{f_5'^2}{f_5^2}} - \frac{f_5'''}{f_5} + \frac{85}{24}\frac{f_5'' f_5'}{f_5^2} - \frac{21}{5}\frac{f_5'^3}{f_5^3}, \tag{5_3}$$

$$f_4 = a_4 \sqrt[5]{\frac{f_5^4}{a_5^4}} - \frac{1}{5} a_3 \sqrt[5]{\frac{f_5^3}{a_5^3}\frac{f_5'}{f_5}} - \frac{1}{5} a_2 \sqrt[5]{\frac{f_5^2}{a_5^2}\frac{f_5''}{f_5}} + \frac{7}{25} a_2 \sqrt[5]{\frac{f_5^2}{a_5^2}\frac{f_5'^2}{f_5^2}} - \frac{1}{5} a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}\frac{f_5'''}{f_5}} + \frac{74}{175} a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}\frac{f_2'' f_5'}{f_5^2}} - \frac{91}{125} a_1 \sqrt[5]{\frac{f_5}{a_5}\frac{f_5'^3}{f_5^3}} - \frac{1}{5}\frac{f_5'}{f_5} + \frac{119}{125}\frac{f_5'' f_5'}{f_5^2} + \frac{74}{125}\frac{f_5''^2}{f_5^2} - \frac{2041}{625}\frac{f_5'' f_5'^2}{f_5^3} + \frac{1729}{625}\frac{f_5'''}{f_5^4}. \tag{5_4}$$

In fine, pentru $n=6$, condițiile căutate sunt următoarele:

$$f_1 = a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}} - \frac{5}{2}\frac{f_6'}{f_6}, \tag{6_1}$$

$$f_2 = a_2 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}} - \frac{5}{3} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'}{f_6} - \frac{10}{3}\frac{f_6''}{f_6} + \frac{205}{36}\frac{f_6'^2}{f_6^2}, \tag{6_2}$$

$$f_3 = a_3 \sqrt[6]{\frac{f_6^3}{a_6^3}} - a_2 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}}\frac{f_6'}{f_6} - \frac{5}{3} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6''}{f_6} + \frac{95}{36} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'^2}{f_6^2}$$
$$- \frac{5}{2}\frac{f_6'''}{f_6} + \frac{145}{12}\frac{f_6'' f_6'}{f_6^2} - \frac{85}{8}\frac{f_6'^3}{f_6^3}, \tag{6_3}$$

$$f_4 = a_4 \sqrt[6]{\frac{f_6^4}{a_6^4}} - \frac{1}{2} a_3 \sqrt[6]{\frac{f_6^3}{a_6^3}}\frac{f_6'}{f_6} - \frac{2}{3} a_2 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}}\frac{f_6''}{f_6} + \frac{35}{36} a_2 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}}\frac{f_6'^2}{f_6^2}$$
$$- \frac{5}{6} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'''}{f_6} + 15 a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'' f_6'}{f_6^2} - \frac{85}{27} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'^3}{f_6^3} - \frac{f_6'^4}{f_6}$$
$$+ \frac{35}{4}\frac{f_6''' f_6'}{f_6^2} + \frac{40}{9}\frac{f_6''^2}{f_6^2} - \frac{5095}{216}\frac{f_6'' f_6'^2}{f_6^3} + \frac{2285}{162}\frac{f_6'^4}{f_6^4}, \tag{6_4}$$

$$f_5 = a_5 \sqrt[6]{\frac{f_6^5}{a_6^5}} - \frac{1}{6} a_4 \sqrt[6]{\frac{f_6^4}{a_6^4}}\frac{f_6'}{f_6} - \frac{1}{6} a_3 \sqrt[6]{\frac{f_6^3}{a_6^3}}\frac{f_6''}{f_6} + \frac{5}{36} a_3 \sqrt[6]{\frac{f_6^3}{a_6^3}}\frac{f_6'^2}{f_6^2}$$
$$- \frac{1}{2} a_2 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}}\frac{f_6'''}{f_6} + \frac{25}{36} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}}\frac{f_6'' f_6'}{f_6^2} - \frac{5}{9} a_2 \sqrt[6]{\frac{f_6^2}{a_6^2}}\frac{f_6'^3}{f_6^3}$$
$$- \frac{1}{6} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6^{IV}}{f_6} + \frac{35}{36} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6''' f_6'}{f_6^2} + \frac{25}{36} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6''^2}{f_6^2}$$
$$- \frac{175}{54} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'' f_6'^2}{f_3^6} + \frac{55}{27} a_1 \sqrt[6]{\frac{f_6}{a_6}}\frac{f_6'^4}{f_6^4} - \frac{1}{6}\frac{f_6^4}{f_6} + \frac{23}{18}\frac{f_6'^4 f_6'}{f_6^2} +$$
$$\frac{85}{36}\frac{f_6''' f_6''}{f_6^2} - \frac{685}{72}\frac{f_6''' f_6'^2}{f_6^3} - \frac{1945}{216}\frac{f_6''^2 f_6'}{f_6^3} + \frac{3505}{162}\frac{f_6'' f_6'^3}{f_6^4} - \frac{1595}{162}\frac{f_6'^5}{f_6^5}. \tag{6_5}$$

Pentru a se exemplifica, alegând $f_n(x) = x$ şi $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$, se găsesc următoarele ecuaţii:

$$9x^2y''' - 9xy'' + 5y' + 9x^3y = 0, \qquad (a)$$

$$32x^3y^{IV} - 48x^2y''' + 54xy'' - 33y + 32x^4y = 0, \qquad (b)$$

$$625x^4y^V - 1250x^3y^{IV} + 2125x^2y''' - 2625xy'' + 1729y' + 625x^5y = 0, \qquad (c)$$

$$648x^5y^{VI} - 1620x^4y^V + 3690x^3y^{IV} - 6885x^2y''' + 9140xy'' - 6380y' + 648x^6y = 0, \qquad (d)$$

care se transformă, printr'o schimbare a variabilei independente, dată de relaţia

$$t = \frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}} + C, \qquad C = \text{Const.}$$

în ecuaţia

$$\frac{d^ny}{dt^n} + y = 0\ , \ (n = 3, 4, 5, 6). \qquad (e)$$

Deoarece soluţia generală a ecuaţiei (e) este

$$y = \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' C_\nu\, e^{\left(\cos\frac{\pi+2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2\nu\pi}{n}\right)t}, \qquad (f)$$

C_ν fiind numere constante arbitrare, soluţia generală a ecuaţiei (a), după cum este uşor de verificat şi pe cale directă, este

$$y = \left\{C_0\cos\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 x^{\frac{4}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}C\right] + C_2\sin\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 x^{\frac{4}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right\} l^{\frac{3}{8}} x^{\frac{4}{3}+\frac{C}{3}} + C_1 l^{-\frac{3}{4}} x^{\frac{4}{3}-C}, \qquad (a'$$

şi soluţiile corespunzătoare ecuaţiilor (b), (c) şi (d), pe care renunţăm să le mai transcriem aici, rămân deasemenea uşor de stabilit.

Ne propunem să revenim asupra acestui subiect, considerând fie cazuri mai generale de schimbare de variabile, atât pentru ecuaţii diferenţiale de ordin oarecare cât şi pentru sisteme de ecuaţii, fie plecând din alte puncte de vedere, cum ar fi, de exemplu, acel al grupurilor de transformări infinitezimale, fie, însfârşit, stabilind, graţie admirabilei Biblioteci a Seminarului Matematic al

Universității din Iași, legăturile posibile ale acestei lucrări cu rezultate stabilite eventual în acest domeniu și în domeniile înrudite de alți cercetători [1].

In orice caz, am reușit, prin soluționarea acestei probleme, să încadrăm sub un punct de vedere unitar un număr de probleme particulare tratate de diferiți autori [2].

DUMITRU ION MANGERON

Laboratorul de Mecanică și Seminarul Matematic al Politehnicii „Gh. Asachi".

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1947

Pentru concursul *Gazetei Matematice* din 1947 s'au primit cereri dela 97 de candidați, din care au fost admiși a lua parte la concurs următorii candidați:

Clasa a IV-a. *Andrei Al, Ștefan, Dabija Florin-Ermil, Florescu V. Eugen, Gheorghiu V. Vasile și Mărtoiu C. Constantin.*

Clasa a V-a. *Băghină V. Vasile, Călășiță I. Mioara, Diaconescu A. Ion, Dragomir I. Dan Vladimir, Făcăoanu Gh. Ioan, Neacșu Gr. Ioan, Petre I. Gheorghe, Ristea Gh. Gheorghe și Șerbu C. Constantin.*

Clasa a VI-a. *Buzuloiu C. Virgil, Cernescu A. Petre, Constantinescu Gh. Virgiliu, Georgian N. Nicolae, Grigoriu I. Doru, Hurezeanu M. Romulus, Marcu D. Vasile, Mihălcioiu S. Mihai, Nedelcu F. Mariana, Ștefănescu I. Sofronie, Tudor C. Emil și Vasiliu M. Florin-Minea.*

---

1) A se vedea, de exemplu, frumoasele rezultate — fruct al unei munci perseverente — ale d-lui ARMANDO CHIELLINI (Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee, di ordine qualunque. *Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari*, 9, (1939), pag. 10 și urm.) privitoare la aplicația teoriei invarianților diferențiali liniari la integrarea ecuațiilor diferențiale liniare și omogene de ordin oarecare și având la baza lor lucrările cristalizate într'o operă astăzi clasică a matematicianului SCHLESINGER *(Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, 2 vol., Leipzig, B. G. Teubner, 1897).

2) E. KAMPE, loc. cit., a se vedea anumite paragrafe din capitolele: *Lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung*, pag. 508; *Lineare Differentialgleichungen vierter* &, respectiv, *fünfter u. höherer Ordnung*, pag. 524, [illegible]38

Clasa a VII-a. *Cernescu A. Nicolae, Constantinescu G. Virgil, Constantinescu Paul. Corduneanu C. Constantin, Crăcea I. Dumitru, Diaconu Gh. Vasile, Iosifescu G. Mircea, Măncescu N. Ion, Munteanu T. Ion, Popescu L. Ilie, Roşu V. Constantin, Stănescu N. Virgiltu, Stoian I. Dumitru şi Teodor P. Petre.*

Clasa a VIII-a. *Doneaud E. André, Eftode M. Adrian-Mihai, Hangan M. Sanda, Haret Sp. Radu, Nanul Ştefan, Pisanca N. Ionel. Seni Dinu, Udrea C. Ioan şi Vasiliu E. Dan.*

In total 50 de candidaţi dintre care 5 pentru clasa a IV-a, 9 pentru clasa a V-a, 12 pentru a VI-a, 14 pentru clasa a VII-a şi 10 pentru clasa a VIII-a. Regretăm că greutăţile de azi şi timpul scurt disponibil pentru concurs ne-a obligat să limităm numărul cantidaţilor admişi la concurs.

Fiecare candidat va da câte o probă scrisă şi o probă orală la materiile publicate la pag. 77 din acest volum.

Lucrările scrise *nu sunt eliminatorii* anul acesta.

Prima lucrare scrisă se va da Joi 17 Aprilie, dela ora 8^{30} la ora 11^{30}, iar a doua lucrare scrisă se va da în aceeaşi zi dela ora 15 la ora 18.

Oralul începe Vineri 18 Aprilie oră 8^{30}.

Atât lucrările scrise cât şi oralul se dau în localul *Politehnicei*, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Candidaţilor, care în cererea de înscriere au arătat că nu dispun de mijloace pentru venirea şi cazarea în Bucureşti, li se vor pune la dispoziţie aceste mijloace de către *Gazeta Matematică*.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

11. *Nota asupra patratului.* D-ra MARIA NEUMANN (Timişoara), pornind dela o problemă cunoscută relativ la patrat ne trimite un articol pe care din lipsă de spaţiu nu-l putem publica. Problema studiată de d-ra NUMANN fiind însă interesantă, îmi propun a reveni — pe scurt — aci, asupra acestei chestiuni.

Se consideră un patrat ABCD. Prin vârful A se duce o secantă arbitrară ce întâlneşte latura BC în M, iar pe CD în G.

Fie H mijlocul cegmentului GD, iar P punctul comun dreptelor BG şi MH. *Dreapta* MH *este tangentă cercului înscris şi punctul* P *se găseşte pe cercul circumscris patratului.*

Fie N punctul comun laturei AD şi dreptei MH, iar M_1 proiecţia lui M pe AD. Punctele N şi M_1 sunt evident conjugate armonic în raport cu A şi D. A' şi B' fiind mijloacele laturilor AD şi BC, iar R raza cercului înscris patratului rezultă că avem:

$$A'N \cdot A'M_1 = A'N \cdot B'M = R^2$$

ceea ce arată că dreapta MN este tangentă cercului înscris.

Fie acum P* un punct pe cercul circumscris patratului. Notăm cu G* punctul comun lui BP* şi CD, iar cu H* mijlocul segmentului G*D. *Dreapta* P*H* *este tangentă cercului înscris.* O fiind centrul patratului avem evident:

$$\sphericalangle OP^*D = \sphericalangle ODP^* \quad \text{şi} \quad \sphericalangle ODC = 45^0.$$

Iar, din triunghiul dreptunghic G*P*D rezultă

$$\sphericalangle H^*P^*D = \sphericalangle P^*DH^* \quad \therefore \quad \sphericalangle OP^*H^* = 45^0.$$

Dreapta P*H* fiind tangentă cercului înscris, rezultă imediat că pentru $G \equiv G^*$ avem şi $H \equiv H^*$ deci şi $P \equiv P^*$, ceea ce demonstrează propoziţiunea enunţată.

Iată acum o generalizare.

Se consideră un patrulater ABCD şi conica (Γ) tangentă laturilor BC şi AD. Prin vârful A se duce o secantă arbitrară ce întâlneşte pe CD în G şi pe BC în M. Se cere locul punctului P comun dreptei BG cu cea de a doua tangentă dusă din M conicei (Γ).

Fie $E \equiv (BC, AD)$, $F \equiv (AB, CD)$, iar N punctul unde a doua tangentă a conicei (Γ) dusă din M taie latura ADE. Luăm triunghiul ABE ca triunghiu de referinţă şi notăm coordonatele diferitelor puncte considerate după cum urmează: A (1, 0, 0), (B (0, 1, 0), E (0, 0, 1), C (0, 1, c), D (1, 0, d), M (0, 1, λ), N (1, 0, μ).

Ecuaţiile secantei AM, a dreptei BG şi a tangentei MN sunt: (AM) $\lambda y - z = 0$, (BG) $d\lambda x + (c - \lambda) z = 0$, (MN) $\mu x + \lambda y - z = 0$.

De aci, se obţin coordonatele punctului P (x, y, z) sau

$$\frac{x}{\lambda(\lambda - c)} = \frac{y}{\mu(c - \lambda) + d\lambda} = \frac{z}{d\lambda^2}.$$

Dreapta MN fiind tangentă conicei (Γ) între parametrii λ şi μ există o corespondenţă omografică

$$\mu = \frac{u'\lambda + v'}{u\lambda + v}$$

u, v, u', v' fiind constante astfel ca

$$uv' - uv' \neq 0.$$

Rezultă că *în general, locul punctului* P *este o cubică* (Ω).

Această cubică degenerează şi se reduce la o conică şi o dreaptă în trei cazuri şi anume:

1. Dacă pentru $\lambda = 0$ avem şi $\mu = 0$ deci $v' = 0$. In acest caz conica (Γ) este tangentă şi laturei AB, iar coordonatele punctului P devin:

$$\frac{x}{(u\lambda + v)(\lambda - c)} = \frac{y}{(du - u')\lambda + dv + u'c} = \frac{z}{d\lambda(u\lambda + v)}$$

astfel că λ variind, punctul P descrie o conică. Această conică şi dreapta AB formează acum cubica (Ω).

Problema relativă la patrat, revine la cazul când dreptele FA, FD, FM şi FN formează un fascicol armonic. Coordonatele punctului F fiind F$(c, -d, 0)$ ecuaţiile dreptelor FM şi FN sunt:

$$\text{(FM)} \qquad dx + cy - z + \left(1 - \frac{c}{\lambda}\right) z = 0,$$

$$\text{(FN)} \qquad dx + cy - z + \left(1 - \frac{d}{\mu}\right) z = 0,$$

iar condiţiunea ca fascicolul F(ADMN) să fie armonic este:

$$1 - \frac{c}{\lambda} + 1 - \frac{d}{\mu} = 0 \quad \therefore \quad 2\lambda\mu - d\lambda - c\mu = 0.$$

In acest caz latura CD este deasemeni tangentă conicei (Γ) fiindcă pentru $\lambda = c$ avem $\mu = d$. Constantele u, v, u', v', sunt acum

$$u = 2 \quad , \quad v = -c \quad , \quad u' = d \quad , \quad v' = 0,$$

iar coordonatele punctului P(x, y, z).

$$\frac{x}{(2\lambda - c)(\lambda - c)} = \frac{y}{d\lambda} = \frac{z}{d\lambda(2\lambda - c)},$$

Sau eliminând pe λ, obţinem:

$$cdxy + (dx + zy - z)\, z = 0.$$

Se obţine astfel că locul geometric al punctului P este în adevăr o conică ce trece prin vârfurile A, B, C, D ale patrulaterului considerat.

2. Dacă pentru $\lambda = c$ avem $u\lambda + v = 0$ sau $\mu = \infty$, cubica (Ω) se reduce deasemeni la o conică şi o dreaptă. Conica (Γ) este în acest caz tangentă lui BC în punctul C, iar coordonatele punctului P sunt:

$$\frac{x}{\lambda(\lambda - c)} = \frac{y}{u_1\lambda + v_1} = \frac{z}{d\lambda^2}$$

u_1 şi v_1 fiind constante convenabil alese.

Locul geometric al punctului P este conica

$$dc^2zy - (z - dx)\,[u_1cz + v_1(z - dx)] = 0.$$

Această conică trece prin vârfurile B şi D. Aceestă conică şi dreapta BC formează, în acest caz, cubica (Ω).

3. In sfâşit cubica (Ω) degenerează şi când conica (Γ) se reduce la un punct, adică pentru $u = v = 0$. Coordonatele punctului P (x, y, z) sunt de forma:

$$\frac{x}{\lambda(\lambda - c)} = \frac{y}{p_2(\lambda)} = \frac{z}{d\lambda^2}$$

$p_2(\lambda)$ fiind un polinom de gradul al 2-lea.

ŞERBAN GHEORGHIU.

12. *O formă remarcabilă a ecuaţiei care are ca rădăcini puterile rădăcinilor unei ecuaţii.* Pentru simplificarea scrisului luăm cazul particular, când ni se dă ecuaţia:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

care are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots x_n$ şi ni se cere ecuaţia care are rădăcinile $x_1^3, x_3^3, \ldots x_n^3$.

Fie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$.

Ecuaţia căutată va fi:

$$f(y) = f(x^3) = a_0^3 (x^3 - x_1^3)(x^3 - x_2^3) \ldots (x^3 - x_n^3)$$

$$= a_0^3 \prod_{i=0}^{2} (x - x_1 \varepsilon_i)(x - x_2 \varepsilon_i), \ldots (x - x_n \varepsilon_i)$$

$$= \prod_{i=0}^{2} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \varepsilon_i + a_2 x^{n-2} \varepsilon_i^2 + \ldots + a_n \varepsilon_i^n)$$

dacă la fiecare paranteză dăm factor pe x^n şi ţinem seama că $\varepsilon_i^3 = 1$ şi $x^3 = y$, avem:

$$f(y) = y^n \prod_{i=0}^{2} \left[A_0 + A_1 \frac{\varepsilon_i}{x} + A_2 \left(\frac{\varepsilon_i}{x} \right)^2 \right] \qquad (1)$$

unde

$$A_0 = a_0 + \frac{a_3}{y} + \frac{a_6}{y^2} + \ldots$$

$$A_1 = a_1 + \frac{a_4}{y} + \frac{a_7}{y^2} + \ldots$$

$$A_2 = a_2 + \frac{a_5}{y} + \frac{a_8}{y^2} + \ldots$$

cari pot fi cuprinse în formula:

$$A_k = a_k + a_{k+3} z + a_{k+6} z^2 + \ldots$$

unde

$$z = \frac{1}{y} = \frac{1}{x^3}.$$

Ori se ştie [1] că:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} P(\varepsilon_0) P(\varepsilon_1) \ldots P(\varepsilon_{n-1})$$

în care $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1}$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^n - 1 = 0$ şi [1]

$$P(x) = a_1 + a_2 x + \ldots a_n x_{n-1}.$$

1) TH. ANGHELUŢĂ. *Curs de algebră superioară*, 1943, pag. 91.

Rezultă că relația (1) poate fi scrisă:

$$f(y) = -y^n \begin{vmatrix} A_0 & \frac{A_1}{x} & \frac{A_2}{x^2} \\ \frac{A_1}{x} & \frac{A_2}{x^2} & A_0 \\ \frac{A_2}{x^2} & A_0 & \frac{A_1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{z^n} \begin{vmatrix} A_0 & zA_2 & zA_1 \\ A_1 & A_0 & zA_2 \\ A_2 & A_1 & A_0 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

sau

$$z^n f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & A_0 & zA_2 & zA_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & A_1 & A_0 & zA_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & A_2 & A & A_0 \end{vmatrix}$$

scăzând coloanele 1, 2, 3 respectiv din 4, 5, 6:

$$z^n f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & zA_3 & zA_2 & zA_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & zA_4 & zA_3 & zA_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & zA_5 & zA_4 & zA_3 \end{vmatrix}$$

Introducând în același mod acestui determinant trei coloane și procedând la fel obținem:

$$z^n f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & z^2A_6 & z^2A_5 & z^2A_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & z^2A_7 & z^2A_6 & z^2A_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_2 & a_0 & z^2A_8 & z^2A_7 & z^2A_6 \end{vmatrix}$$

înmulțind liniile 4, 5, 6 cu z și scăzându-le respectiv din liniile 1, 2, 3 găsim:

$$z^n f(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & z^2A_6 & z^2A_5 & z^2A_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & z^2A_7 & z^2A_6 & z^2A_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & z^2A_8 & z^2A_7 & z^2A_6 \end{vmatrix}$$

Procedând la fel, până dispar complect termenii cari cuprind pe A_k, eliminând liniile și coloanele inutile, aranjând liniile și coloanele convenabil, găsim:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & y & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & y \end{vmatrix} = 0$$

care este ecuația căutată.

In cazul general ecuația ale cărei rădăcini sunt $x_1^m, x_2^m, \dots x_n^m$ se poate reprezenta printr'un determinant de ordinul (mm), de aceeași formă cu cel de mai sus, în care diagonala principală va fi formată din m ori a_0 și n ori y, iar diagonala ocupată de a_n va fi aceeași cu cea ocupată de elementele -1.

Cazul particular $m = 1$ este cunoscut [1].

MIRCEA ADAM.

13. *Asupra expresiunilor* $\sin(a \pm b)$ *și* $\cos(a \pm b)$. Iată un mod de a afla valoarea lui $\sin(a - b)$; valorile celorlalte expresiuni deducându-se prin procedeul obișnuit, indicat și în nota din *Gazeta Matematică*, Vol. LI, Nr. 1, pag. 175.

1) TH. ANGHELUȚĂ. *Algebră superioară* 1943, pag. 89.

Fie AM = b şi AN = a, două arce pe cercul trigonometric, B şi C intersecţiile lui OM şi ON cu tangenta în A.

Teorema sinusurilor aplicată triunghiului OBC dă

$$\frac{BC}{\sin(a-b)} = \frac{OB}{\sin \sphericalangle OCA}; \qquad (1)$$

însă, cum

$$BC = \operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b\ ,\ OB = \sec b = \frac{1}{\cos b} \text{ şi } \sin \sphericalangle OCA = \cos a$$

relaţia (1) devine

$$\sin(a-b) = \cos a \cos b\,(\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU.

N.R. Fără a întrebuinţa formula sinusurilor, ci numai geometric a se vedea demonstrarea dată la Prob. 4. Cap. XVIII, din *Culeg. de Prob. Trig.* Partea II-a.

Menţionăm, deasemenea, în legătură cu stabilirea relaţia $\cos(a-b)$ dată în *Gazeta Matematică*, Vol. LI, pag. 174, a se vedea şi Problema 5 dela Capitolul şi Culegerea citată mai sus.

G-L G. I. LITEANU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI

Examenul de admitere Octombrie-Noembrie 1946

Algebra. Să se discute variaţia funcţiuni

$$y = 9\,\frac{x^2 - 10x}{x^3 - 9x}$$

şi să se reprezinte grafic această variaţie.

Să se discute apoi ecuaţia

$$f(x) = x^3 - \lambda x^2 - 9x + 10\lambda = 0$$

stabilind natura rădăcinelor ei după valorile lui λ.

Trigonometria. 1°. Să se demonstreze identitatea

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2\,\frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}.$$

2°. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\sin x + \sin y = m \sin\alpha\ ;\ \cos x + \cos y = m \cos\alpha$$

m şi a fiind constante.

3°. Să se arate că

$$\operatorname{tg} 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2.$$

BIBLIOGRAFIE

Intermédiaire des Recherches Mathématiques. Tome 2. Fascicule 8. N-os 0600 à 0692. Octobre 1946.

Mùzeum Füzetek. Este un volum de comunicări de matematici, fizică şi ştiinţe naturale ale Muzeului Ardelean. Volumul pe care l-am primit este scris în limba ungară cu excepţia a două comunicări, una în limba franceză şi alta în limba engleză. Volumul poartă Nr. III, este tipărit la Cluj în 1945 şi cuprinde caietele 1—4. In acest volum sunt următoarele articole de Matematici sau Fizică Matematică: BARBÉLY SAMU: *Despre cele două operaţii de bază ale analizei grafice.* MOLNÁR JÓZSEF: *O serie liniară particulară a mulţimilor convexe.* FILA JENÖ. *Despre o teoremă elementară cu privire la poligoane.* T. VESCAN: *Complectări ale noţiunilor fundamentale ale ştiinţelor moderne.* MOLNÁR JÓZSEF: *Teoreme asupra şirurilor liniare particulare ale mulţimilor convexe.*

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVI. Nr. 10. Ianuarie 1947. V. ALACI: † ION IONESCU. A. GLODEN: Nouvelles définitions sur les multigrades. Notă matematică. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXXII. Nr. 4. Iaşi. Octombrie-Decembrie 1946. ING. C. N. AVRAM. Grinzi continui cu moment de inerţie variabil. Teorie şi Tabele de Calcul. Tipografia geniului 1946.

A. GLODEN. Table des solutions de la congruence

$$x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

pour $450.000 < p < 500.000$.

D. I. MANGÉRON. Notes de mécanique rationnelle. Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et son battant. (Extras din *Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi"*, Vol. I. Fasc. 2).

D. I. MANGÉRON. Opera ştiinţifică a lui GUSTAV MAGNUS MITTAG-LEFFLER. (Extras din *Revista Matematică din Timişoara*. An. XXVI).

D. I. MANGÉRON. Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. (Extras *Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi"*, Vol. I. Fasc. 2).

PROF. T. VESCAN. Considérations sur la dissymétrie structurale par rapport au principe de la moindre action de la théorie d'EINSTEIN (Extras din „Muzeumi Füzetek", 1945. III.

PROF. T. VESCAN. Problema locului teoriei clasice a relativităţii generalizate în dezvoltarea teoriilor fizice.

CERERI

Răspuns la cererea 85 (*Gazeta Matematică*, XXVII, 197). Se întreabă care este cea mai recomandabilă carte care să conţină un studiu amănunţit asupra coordonatelor baricentrice.

Ar fi riscat să dea cine-va titlul *celei mai recomandabile cărţi*, înainte de a le fi citit pe *toate* câte au apărut în toate limbile pământului. De aceia cred că satisfac curiozitatea propunătorului cererei recomandându-i, fără nicio rezervă, lucrarea *Coordonées barycentriques* de compatriotul nostru d-l C. COŞNIŢĂ.

G-L GH. B.

DIVERSE

a) Jubileul ştiinţific al d-lui Paul Montel

Un comitet de organizare, compus din prieteni, colegi, elevi şi savanţi şi-au propus să celebreze în 1947 jubileul ştiinţific al d-lui Profesor PAUL MONTEL, care a înbogăţit matematicele moderne. Acest comitet doreşte să editeze un volum de circa 350 pagini, care să conţină: lista lucrărilor d-lui P. MONTEL şi o alegere a celor mai bune memorii ale sale, însoţită de notiţe asupra cercetărilor pe care acele memorii le-au suscitat.

Dată exactă a ţinerei jubileului va fi comunicat ulterior.

Doritorii de a se înscrie la sărbătorirea acestui mare savant şi mare prieten al Românilor se pot înscrie la d-l GEORGES BOULIGAND trimiţând prin mandat sau prin viriment poştal (C. C. *postaux*, Paris, No. 5502-05) suma de 400 franci, în schimbul căreia vor primi un volum *Selecta* precum şi o broşură cu darea de seamă a serbărei jubileului.

Din comitetul de organizare fac parte şi compatrioţii noştri d-nii: Prof. TH. ANGHELUŢĂ, MIRON NICULESCU, D. POMPEIU, P. SERGESCU şi S. STOILOV.

Dată fiind personalitatea şi opera ştiinţifică a d-lui P. MONTEL şi date fiind sentimentele şi legăturile sale cu România [1] dorim să se înscrie la această sărbătorire ştiinţifică cât mai mulţi din compatrioţii noştri.

b) † Carol Tomek

In ziua de 1 Ianuanie 1947 a încetat din viaţă CAROL TOMEK, şeful biroului de studii dela Imprimeria Naţională, unde se tipăreşte *Gazeta Matematică* încontinuu dela 15 Septembrie 1929 încoace. CAROL TOMEK a fost şeful atelierului de culegere şi s'a ocupat cu o deosebită grijă de tipărirea *Gazetei Matematice*, de scoaterea ei la timp şi în special de clişee. Devotamentul pe care-l pune personalul imprimeriei pentru imprimarea *Gazetei Matematice*, ne cere să-l considerăm printre colaboratorii noştri şi de aceia trimitem un gând pios memoriei lui CAROL TOMEK.

1) A se vedea nota cu care începe articolul *Matematicieni Români şi Franţa*, publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. L, pag. 626.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4319. *Să se arate că rădăcinele ecuației*

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 = 0,$$

exceptând rădăcina pozitivă, au modulul cuprins între $1/3$ *și* 1.

Să se arate că această ecuație are cel mult două rădăcini reale.

TH. ANGHELUȚĂ.

Soluția acestei probleme este cuprinsă în articolul d-lui N. GAIU dela pag. 25 din acest volum.

PROBLEMA 5267. *Punctul* M *descrie o dreaptă fixă* Δ. *Fie* MB *tangenta dusă din* M *la un cerc fix* O *iar* C *proecția lui* B *pe* Δ. *Se cere locul geometric al proecției lui* C *pe* OM,

G-L GH. BUICLIU.

Soluție, dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (când era elev la liceul Militar Iași).

Iau ca axe diametrul perpendicular și diametral paralel cu Δ.

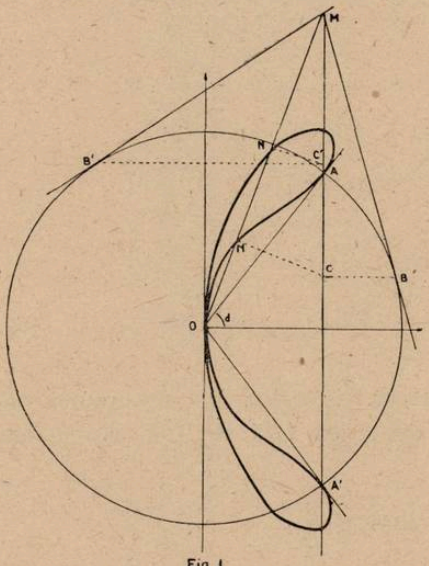


Fig. 1.

Fie B (α, β). Dacă R este raza cercului O, tangenta BM și Δ vor avea ecuațiile

$$\alpha x + \beta y - R^2 = 0 \text{ și } x - a = 0 \quad (1)$$

unde a este distanța dela O la Δ.

Din (1) se scoate $M\left(a, \dfrac{R^2 - a\alpha}{\beta}\right)$

și cum C (a, β) deduc

$$(OM)\ y = \frac{R^2 - a\alpha}{a\beta} x,$$

$$(CN)\ y - \beta = -\frac{a\beta}{R^2 - a\alpha}(x - a). \quad (2)$$

Sistemul (2) dă

$$\alpha = \frac{a^2 x + R^2 x - a x^2 - a y^2}{a x}, \quad \beta = \frac{x^2 + y^2 - a x}{y}$$

care introduse în

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

dau ecuaţia locului sub forma

$$a^2 (x^2 + y^2 - ax)^2 (y^2 + x^2) - 2aR^2 xy^2 (x^2 + y^2 - ax) + \\ + R^4 x^2 y^2 - a^2 R^2 x^2 y^2 = 0. \qquad (3)$$

Trecând la coordonate polare şi luând pe O şi OD ca pol şi axă polară, ecuaţia (3) devine

$$a^2 \rho^2 - 2a (a^2 + R^2 \sin^2 \theta) \rho \cos\theta + [a^4 + R^2 (a^2 + R^2) \sin^2 \theta] \cos^2 \theta = 0$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{a^2 + R^2 \sin^2 \theta \pm R \sin \theta \sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 \theta}}{a} \cos \theta$$

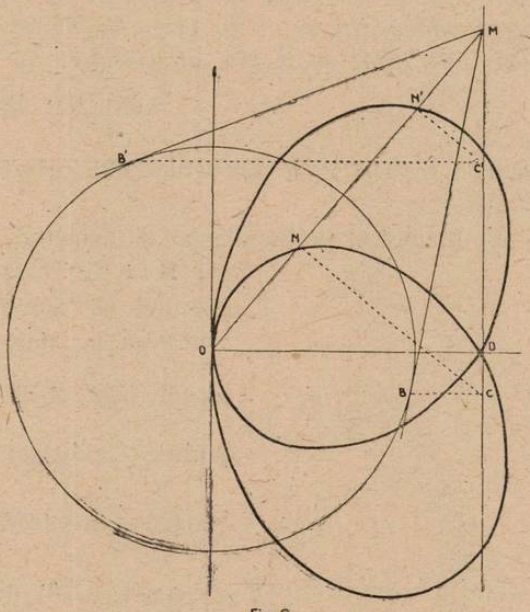


Fig. 2

Sub această formă se observă că curba nu are puncte la infinit ρ fiind finit şi că este simetrică faţă de Ox. Curba are puncte reale numai pentru

$$-\frac{a}{R} \leqslant \cos\theta \leqslant \frac{a}{R}.$$

Construcţia curbei se face cu uşurinţă, mai ales pentru valori numerice de ale lui a şi R. Sunt de examinat trei cazuri.

1. $R > a$. Dreapta Δ taie cercul O în punctele A şi A'. Fie $\alpha = \sphericalangle xOA$. Curba are puncte reale numai dacă

$$\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha.$$

Făcând să varieze θ se construeşte curba din fig. 1 care este tangentă în O la Oy şi tangentă în A, A' la OA şi OA'. Curba are forma unor desagi.

2. $R < a$; Δ este exterioară cercului. Curba are forma din figura 2, având puncte duble în O şi D.

3. $R = a$; Δ este tangentă la O în A. Locul se reduce la cercul

$$\rho = a \cos\theta$$ şi la curba $$\rho = a\ (2 + \sin^2\theta) \cos\theta$$

având forma din fig. 3.

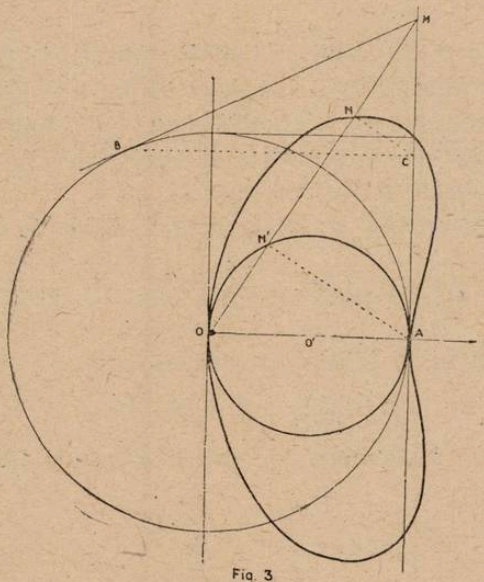


Fig. 3

Notă. D-nii: E. N. WEGENER (Bucureşti) şi R. G. METEA au găsit ecuaţia exactă în coordonate carteziene, dar nu au construit curba.

D-l MIREL D. STOENESCU (Şc. Ofiţeri de Aviaţie) a rezolvat bine problema în coordonate polare dar a făcut greşeli la construcţia curbei şi nu a examinat de cât cazul $R < a$.

PROBLEMA 6157. *Dacă* C *este o constantă. înfășurătoarea curbelor*

$$\frac{x^p}{a^p}+\frac{y^p}{b^p}=1 \quad , \quad \text{unde } a^n+b^n=c^n$$

este identică cu înfășurătoarea curbelor

$$\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}=1 \quad , \quad \text{unde } a^p+b^p=c^p .$$

Infășurătoarea comună este

$$x^{\frac{np}{n+p}}+y^{\frac{np}{n+p}}=c^{\frac{np}{n+p}}.$$

Să se examineze cazul particular $n=p=1$.

† GEORGE ȚIȚEICA.

Soluție dată de D-nii: CEZAR BOERESCU, PETRE D. COLUMBEANU, ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, GH. A. GRIGORE, ION KINȘKY, MIRCEA D. PETCULESCU, E. N. WEGENER (studenți ingineri), MIHAI R. CONSTANTINESCU (Liceul Sf. Petru și Pavel Ploești), I. E. HARGHEL (bacalaureat Feteşti) și M. D. POPA.

1°. Avem de aflat înfășurătoarea familiei de curbe

$$f\ (x, y, a, b) \equiv \frac{x^p}{a^p}+\frac{y^p}{b^p}-1=0. \tag{1}$$

cu doui parametri a, b între care există relația

$$\varphi\ (a, b) \equiv a^n+b^n-c^n=0. \tag{2}$$

Va trebui să eliminăm parametrii a, b între (1), (2) și

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial a}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial b}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial b}} \tag{3}$$

Această ultimă relație dă

$$\frac{\dfrac{x^p}{a^{p+1}}}{\dfrac{}{a^{n-1}}}=\frac{\dfrac{y^p}{b^{p+1}}}{\dfrac{}{b^{n-1}}}=\frac{\dfrac{x^p}{a^p}}{\dfrac{}{a^n}}=\frac{\dfrac{y^p}{b^p}}{\dfrac{}{b^n}}=\frac{1}{c^n}.$$

De unde,

$$\frac{x^p}{a^{n+p}} = \frac{1}{c^n} \quad , \quad a^{n+p} = x^p c^n \quad , \quad a = x^{\frac{p}{n+p}} c^{\frac{n}{n+p}}$$

$$\frac{y^p}{b^{n+p}} = \frac{1}{c^n} \quad , \quad b^{n+p} = y^p c^n \quad , \quad b = y^{\frac{p}{n+p}} c^{\frac{n}{n+p}}$$

şi înlocuind în (2)

$$x^{\frac{np}{n+p}} c^{\frac{n^2}{n+p}} + y^{\frac{np}{n+p}} c^{\frac{n^2}{n+p}} - c^n = 0 \quad \text{sau} \quad x^{\frac{np}{n+p}} + y^{\frac{np}{n+p}} = c^{\frac{np}{n+p}},$$

ecuaţia înfăşurătoarei.

2°. Pentru familia de curbe

$$f_1(x, y, a, b) \equiv \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{a^n} - 1 = 0$$

şi relaţia

$$\varphi_1(a, b) \equiv a^p + b^p - c^p = 0 \qquad (4$$

se elimină parametrii a, b din aceste relaţii şi

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial a}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial b}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial b}} = \frac{\dfrac{x^n}{a^n}}{\dfrac{a^p}{b^p}} = \frac{\dfrac{y^n}{b^n}}{\dfrac{b^p}{c^p}} = \frac{1}{c^p}.$$

Deci

$$\frac{x^n}{a^{n+p}} = \frac{1}{c^p} \quad , \quad a^{n+p} = x^n c^p \quad , \quad a = x^{\frac{n}{n+p}} c^{\frac{p}{n+p}}$$

$$\frac{y^n}{b^{n+p}} = \frac{1}{c^p} \quad , \quad b^{n+p} = y^n c^p \quad , \quad b = y^{\frac{n}{n+p}} c^{\frac{p}{n+p}}.$$

Inlocuind aceste valori în (4), se găseşte

$$x^{\frac{np}{n+p}} c^{\frac{p^2}{n+p}} + y^{\frac{np}{n+p}} c^{\frac{p^2}{n+p}} = c^p$$

Inlăşurătoarea este

$$x^{\frac{np}{n+p}} + y^{\frac{np}{n+p}} = c^{\frac{np}{n+p}}.$$

Deci cele două familii de curbe ale problemei admit aceiaşi înfăşurătoare.

3°. Dacă $n = p = 1$, se găseşte înfăşurătoarea dreptelor care determină pe axele de coordonate segmente (cu origina) a căror sumă este constantă.

Locul este curba

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}.$$

C. I. B.

PROBLEMA 6187. *Să se demonstreze că în orice triunghiu sferic avem relatia:*

$$\sin p = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 r_a + \operatorname{tg}^2 r_b + \operatorname{tg}^2 r_c}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} C}}$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

† TUDOR STOICESCU.

Valorile cunoscute ale lui $\operatorname{tg} r_a$ şi $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ ne dau

$$\operatorname{tg} r_a = \sin p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \quad , \quad \operatorname{tg} r_b = \ldots, \text{ etc.}$$

De unde se obţine uşor relaţia din enunţ.

MARCEL C. V. POPA (Liceul Mihai Viteazul, Bucureşti); P. P. TEODORESCU (Liceul Matei Basarab, Bucureşti); EUGEN N. WEGENER (Student-Inginer, Bucureşti).

Sau în general

$$\sin p = \sqrt[m]{\frac{\Sigma \operatorname{tg}^m r_a}{\Sigma \operatorname{tg}^m \frac{1}{2} A}}.$$

M. R. CONSTANTINESCU
Lic. „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Notă. S'au primit soluţii bune dela d-nii: GH. BRAŞOVEANU, PAUL CONSTANTINESCU, C. CORDUNEANU, CĂLIN I. C. DUMITRIU, M. G. IOSIFESCU, I. KINSKY, I. T. MUNTEANU, LT. M. D. POPA, I. L. POPESCU, C. ROŞU, V. GH. DIACONU, D. I. STOIAN, ILIE N. CONSTANTINESCU, GEORGE M. NICOLAE, ŞT. GR. FIRESCU, DORIN FURTUNESCU, BARBU I. POPESCU, VIRGIL G. CONSTANTINESCU şi D. I. CRĂCEA.

---

1) *Culeg. de Prob. Trig. Sferică* V. CRISTESCU — GH. LITEANU, Formular pag. 3.

PROBLEMA 6206. *Să se găsească limita expresiunilor*

$$\frac{x^2 \pm x\sqrt{x(5x-4)}}{1-x} - (1 \pm \sqrt{5})\,x$$

când x tinde către infinit. G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-l DAN E. VASILIU (cl. VII Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti).

Expresiunile date se pot scrie

$$E_{1,2} = \frac{x^2 \pm x^2\sqrt{5-\frac{4}{x}}}{1-x} - \frac{(1 \pm \sqrt{5})\,x^2}{x}$$

$$E_{1,2} = x\left[\frac{1 \pm \sqrt{5-\frac{4}{x}}}{\frac{1}{x}-1} - (1 \pm \sqrt{5})\right]$$

De unde se deduce imediat că atunci când x tinde la infinit

$$\lim E_{1,2} = \pm\infty.$$

Au dat soluţii bune, însă pe căi mai lungi: VALERIU DUMITRESCU (student, inginer Bucureşti); P. P. TEODORESCU (Lic. „Matei Basarab" Bucureşti; G. D. STĂNILĂ (Lic. „B. P. Haşdeu", Buzău); A. E. DONEAUD (Lic. „Titu Maiorescu", Bucureşti); AL. C. BÂRZESCU (Lic. „Diaconovici Loga", Timişoara); G. V. MANOLESCU (Lic. „Bălcescu", Brăila); SANDA M. HANGAN (Lic. „I. H. Rădulescu" Bucureşti); M. MIHĂLCIOIU (Lic. militar Craiova); FRANCESCA D. RALET (Şcoala Centrală Bucureşti); M. G. IOSIFESCU (Lic. „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti); ŞT. A. NANUL; SILVIO E. FANCIOTTI, VIRGIL G CONSTANTINESCU, D. I. CRĂCEA, A. I. VARGĂ şi DINU SENI.

EXERCIŢII

15. *Suprafaţa unui triunghiu este medie proporţională între suprafaţa triunghiului ortic şi a triunghiului său tangenţial.*

LOCOT. M. D. POPA.

R. Avem

S_1 = Supr. tr. ortic = $2S\cos A\cos B\cos C$

S_2 = Supr. tr. tangenţial = $R^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

De unde prin înmulţire

$$S_1 S_2 = 2SR^2 \sin A \sin B \sin C = S^2.$$

PROBLEME PROPUSE

6320. Să se demonstreze că dacă $\frac{A}{C}$ şi $\frac{B}{C}$ sunt fracţii periodice ale căror perioade au $C-1$ cifre, există totdeauna un număr $p < C$, pentru care valoarea expresiei

$$\frac{10^p A - B}{C}$$

este un număr întreg.

VICTOR ŞERBĂNESCU.

6321. Fie p, q şi s trei numere întregi şi pozitive şi fie

$$z = \frac{s - pd}{p + q} \quad , \quad t = \frac{s + qd}{p + q} .$$

Să se determine numărul valorilor distincte ale lui d pentru care numerele z şi t sunt întregi negative.

I. B. FLORESCU.

6322. Fie I şi I_a centrele cercurilor înscris şi exînscris triunghiului ABC cu mijloacele laturilor în A', B', C'. A patra tangentă comună cercurilor I şi I_a întâlneşte pe A'B' şi A'C' respectiv în L şi M. Să se demonstreze că patrulaterul B'C'ML este inscriptibil.

G-L GH. BUICLIU.

6323. Pe o dreaptă fixă se dau două puncte fixe A, B şi se consideră perechi de puncte M, N conjugate armonic faţă cu A, B.

Să se demonstreze relaţia:

$$\vec{AM} \times \vec{AN} + \vec{BM} \times \vec{BN} = \text{constant.}$$

Se cere şi o soluţie vectorială.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6324. Dându-se latura BC a unui triunghiu, să se afle locul vârfului A, încât înălţimea AD, bisectoarea BE şi mediana CF să fie concurente. Să se indice construcţia grafică a unui astfel de triunghiu, când se dau BC şi AB în mărime.

CEZAR I. BOERESCU.

6325. Fie punctele coplanare A, B, C, D, M, iar E şi F proiecţiile ortogonale ale lui M pe AB şi CD. Să se arate că dreapta cea mai scurtă trecând prin M şi rezimată pe AC şi CD, este bisectoarea exterioară a unghiului EMF.

C. BERDAN.

6326. Să se verifice identitatea

$$\frac{1}{2n-2}+\frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}+\ldots+\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{C_n^n}{2^n}+\ldots+\frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-3}},$$

unde C_n^m înseamnă numărul combinărilor a n obiecte de câte m.

TH. ANGHELUŢĂ.

6327. Se consideră ecuaţia

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2 şi x_3 şi se cere:

1°. Să se rezolve această ecuaţie ştiind că $\operatorname{arctg}x_1$, $\operatorname{arctg}x_2$, $\operatorname{arctg}x_3$ formează o progresie aritmetică.

2°. Să se studieze cazul particular $b=-3$ şi să se găsească raţia progresiunei.

EMIL MORŢUN.

6328. Se consideră două parabole (P) şi (Q) având acelaşi focar şi axele perpendiculare. Fie Δ tangenta lor comună, reală şi situată la distanţa finită. Să se arate că:

1°. Tangentele duse dintr'un punct al directoarei uneia, la parabola respectivă, sunt bisectoarele unghiului format de tangentele duse din acelaşi punct la cealaltă parabolă.

2°. Tangentele M_p şi M_q diferite de Δ, duse dintr'un punct M de pe dreapta Δ la parabolele (P) şi (Q) sunt perpendiculare.

3°. Normalele în punctele de contact p şi q sunt concurente într'un punct N al perpendicularei în M pe Δ.

4°. M variind pe Δ, locul lui N este o parabolă (R).

5°. Normala în N la (R) trece prin mijlocul segmentului determinat de centrele de curbură în p şi q ale parabolelor (P) şi (Q).

ŞERBAN GHEORGHIU.

6329. Se consideră o dreaptă (Δ) şi punctele fixe A şi B pe ea. Fie O_1 şi O_2 cercurile tangente în A şi B dreptei (Δ) şi tangente între ele în T.

Se ia cercul ω_1 tangent cercurilor O_1 şi O_2 în α şi β şi tangent dreptei (Δ).

Se înseamnă cu CD a doua tangentă comună exterioară cercurilor O_1 şi O_2, iar prin ω_2 cercul tangent în γ, δ cercurilor O_1, O_2 şi tangent dreptei CD.

1. Locurile punctelor T, α, β.
2. Locul punctului ω_1.
3. Locurile punctelor C şi D.
4. Locul punctului ω_2.
5. Punctele α, β, γ, δ sunt conciclice; locul centrului cercului circumscris.

VIRGIL CLAUDIAN.

ERATĂ. 1°. In enunţul problemei 6290, propusă la pag. 134 din acest volum, se înlocueşte 5N prin 6N.

2°. In soluţia problemei 1650 din acest volum se fac următoarele rectificări:

Pag. 150 rândul 18 se citeşte $x^{n'} - 1 = 0$ în loc de $x^{n'} - 1 = v$.
„ „ „ 22 „ „ n' în loc de $n!$
„ „ „ 2 jos se citeşte *Leçons* în loc de *Le cours.*
„ 151 „ 22 se citeşte $\omega^{g^a} \cdot \omega'^{g'^{a'}}$ în loc de $\omega^{g^a}, \omega'^{g'^{a'}}$.
„ 152 „ 2 şi 6 se citeşte $\alpha^{s'^{p-1}}$ şi $\alpha_r^{s^{p-1}}$ în loc de $\alpha^{s^{4-1}}$ şi $\alpha_r^{s^{4-1}}$.
„ „ „ 9 se citeşte β în loc de μ.
„ „ „ 9 jos se citeşte β în loc de μ, iar ultimul γ se înlocueşte prin δ.
„ „ „ 7 jos se citeşte β în loc de μ.

3°. Autorul problemei 2423, rezolvată la pag. 177 din acest volum este ŞT. CORBEANU.

4°. Prima jumătate a enunţului problemei 6314, propusă în numărul trecut se înlocueşte prin

Demonstrându-se identităţile

$$\cos(a+b+c) + \cos(b+c-a) + \cos(c+a-b) + \cos(a+b-c) = 4\cos a \cos b \cos c$$

$$-\sin(a+b+c) + \sin(b+c-a) + \sin(c+a-b)\sin(a+b-c) = 4\sin a \sin b \sin c$$

enunţate la pag. 237 în Trigonometrie par AD. MINEUR, *să se deducă identităţile:*

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Athanasiu C. Luciliu (6286, 315); *Barbu A. I.* (6176, 222, 38, 44, 47, 59, 62, 67, 82, 86, 88, 96, E, P); *Boerescu I. N. Cezar* (6044, 48, 72, 165, 293, 98, E, P); *Bucur Al. N.* (6286); *Bujor M. N.* (6285); *Boldescu P.* (N); *Cernescu A. N.* (6259, 62, 82, 93); *Cernescu A. P.* (4104, 435, 78, 525, 765, 5986, 6039, 271, 72, 82, 94); *Constantinescu O. Corneliu* (6292); *Constantinescu I. Emil* (6279, 89, 309, 19, N); *Constantinescu N. Ilie* (E, R); *Constantinescu Paul* (6281, 82); *Constantinescu G. Virgil* (6139, 45, 53, 66, 84, 87, 200, 06, 54, 60, 70, 82, 85, 86, 90, 93, 96); *Corduneanu C.* (6259, 303, P); *Crăcea I. D.* (6139, 53, 55, 60, 63, 66, 73, 74, 84, 87, 99, 200, 06, 22, 26, 33, 38, 42, 54, 60, 62, 70, 71, 85, 86, 93, 96); *Diaconu G. V.* (6281, 82, 94, 96, 303); *Dodu A. E.* (6270, 71, 93, 301); *Enescu G.* (6294, 96); *Fânaru M.* (A); *Georgescu Răducanu* (P); *Hanganu M. Sanda* (6262, 64, 90); *Hanganu M. T.* (6162, 73); *Haret Sp. R.* (6265); *Lungu A. I.* (6166); *Marinescu E. E.* (P); *Moraite G. Al.* (5928, 6025, 106, 74, 82, 254); *Munteanu T. I.* (6262, 81, 82, 85, 94, 96, 97, 303); *Nedelcu Fl.* (P); *Pantazopol C. Stelian* (6267, P); *Popa D. M.* (4356, 468, 576, 607, 734, 5635, 757, 868, 914, 51, 6094, 123, 43, 44, 57, 67, 86, 255, 72, 86, 94, 95, C, P); *Popescu L. Ilie* (6262, 85, 96); *Seni Dinu* (6206); *Stanciu I. Virgil* (6228); *Teodorescu P. P.* (5890, 93, 6057, 296, 97, E, N, P); *Vargă I. A.* (4658, 70, 6200, 05, 06, 09, 13, 62, 64, 65, 85, 87, 88, 93, 96, 98, 305, P); *Vasiliu E. Dan* (6141, 66, 242, 96); *Voinea D. M.* (6315).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cincisute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 30.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 3.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X, XII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII şi IX sunt epuizate.

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 10.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 28.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 8.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 13.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 33.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 21.000

XXIII. Gazeta Matematică 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (283 pag.) . . . . . Lei 9.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 11.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 13.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 10.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 15.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 13.000

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul achitat până la 1 Martie 1947 este de 36.000 lei. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Martie 1947.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 15.000 lei pentru abonamentele plătite până la 1 Martie 1947. Costul abonamentului după această dată se va anunţa în numărul dela 15 Martie 1947.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 40.072.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1947

BIBLIOTECA PROFESORILOR LICEUL „GHEORGHE LAZĂR"
SIBIU

SUMARUL

1. † Niculae Abramescu . . . . . *Petre Sergescu.*
2. Două conice ataşate unui patrulater. . *N. N. Mihăileanu.*
3. Raport pentru premiul de Aritmetică „I. Ionescu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 14—16.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 341.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 3699, 4185, 4695, 4968, 5527, 5699, 6216, 6267.
10. Exerciţii: 16.
11. Probleme propuse: 5129, 6298, 6330—6339.

ROMÂNIA

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 24 Martie ora 17: Adunarea materiei pentru Nr. 8.

Luni 7 Aprilie ora 17: Facerea copertei pentru Nr. 8 şi fixarea problemelor probelor scrise la Concursul *Gazetei Matematice.*

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 1.000

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . „ 20.000

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 10.000

† NICULAE ABRAMESCU

O veste foarte tristă ne îndurerează sufletele până în adâncime: Profesorul N. ABRAMESCU dela Universitatea din Cluj, a murit pe neaşteptate, în urma unei pneumonii, la 11 Februarie 1947.

Cu el dispare unul din ctitorii secţiunii de matematici a Universităţii din Cluj şi încă unul din stâlpii de nădejde ai *Gazetei Matematice*. Golul pe care-l lasă, nu va mai putea fi umplut în inimile

noastre. Simțim cu întristare că devenim, cu încetul, tot mai singuri și că ființele care ne-au încălzit în anii cei mai frumoși, de muncă și de entuziasm, ai vieții noastre, ne părăsesc, lăsându-ne doar mângâerea amintirilor unui trecut frumos, plin de speranțe și de căldură sufletească. Fiecare din noi trebue judecat nu numai după ceeace a creat, ci după realizările făcute în împrejurările atât de grele în care s'a desfășurat începutul muncei științifice la noi. Calitățile spirituale, devotamentul și jertfele pentru un ideal științific trebuesc luate în considerare cu același coeficient cu care cernem lucrările de pură specialitate. Animatorii au o înrâurire esențială în începuturile unei școale și rolul lor trebue însemnat cu pietate în cronica scurtei noastre vieți de strădanii întru crearea școalei matematice românești. Un astfel de animator neprețuit a fost N. ABRAMESCU. De un entuziasm pentru știință, care nu s'a desmințit până în ziua morții sale, el și-a făcut din matematică și din cariera profesorală adevărați idoli, pe care i-a slujit în fiecare clipă cu modestie, cu abnegație și cu dăruire de sine.

Născut la Târgoviște în 1884, N. ABRAMESCU a fost atras încă din timpul studiilor secundare de curentul creat la *Gazeta Matematică* de neuitații I. IONESCU, G. ȚIȚEICA, A. G. IOACHIMESCU și V. CRISTESCU. A fost un corespondent strălucit, iar prima lui manifestare după ce a devenit profesor secundar, a fost să reclame onoarea de a munci alături de ceilalți redactori ai *Gazetei*, astfel că acum era unul din decanii societății noastre.

Coleg ca student la Universitatea din București cu TR. LALESCU, N. ABRAMESCU nu a avut fericirea de a-și putea continua studiile de specializare în străinătate. La 20 de ani era numit profesor suplinitor de matematici la liceul din Ploești, unde a inspirat, în scurt timp, multe vocații matematice, între care pe a viitorului profesor A. ANGELESCU. Numit profesor titular la liceul din Galați, membru al *Gazetei Matematice*, el a creat din Galați un centru înfloritor de studii matematice, printre elevii lui. Colecția *Gazetei* stă mărturie a vredniciei tânărului profesor. In afară de orele de curs, el organiza ședințe de probleme și cercetări cu elevii mai buni, îi îndruma în primii pași. Prin căldura cu care expunea frumusețile și adevărurile matematicii, a captat mulți elevi pentru cercetările desinteresate. Cursul său tipărit de *Algebră de clasa VIII-a* (teoria ecuațiilor), e o imagină a învățământului pe

care l-a difuzat în Galaţi. Cursul a rămas mulţi ani de zile un adevărat model de claritate, eleganţă şi precizie. In acelaş timp, pasionat de geometria triunghiului, N. ABRAMESCU a publicat o broşură, prima la noi în ţară, conţinând *Formulele fundamentale din geometria triunghiului.*

Câmpul său de activitate urma să se lărgească foarte mult în urma războiului nostru de întregire şi a creării, în 1920, a Universităţii din Cluj. Profesorul G. ŢIŢEICA, chemat să recomande corpul profesoral, a ştiut să aprecieze valoarea educativă neobişnuită şi elanul profesorului de matematici din Galaţi. Şi atunci, el a recomandat ca profesori de matematici pe mult regretaţii noştri A. ANGELESCU şi G. BRATU, iar ca conferenţiar pe N. ABRAMESCU. Incepea epoca eroică de consolidare a învăţământului românesc în capitala Ardealului. Strânşi uniţi în jurul directorului seminarului de matematici, veneratul nostru magistru D. POMPEIU, cei trei tineri profesori şi-au pus la dispoziţie toate puterile pentru organizarea secţiunii de matematici.

N. ABRAMESCU a luat asupră-şi multe sarcini obscure, obositoare şi care cereau mult spirit de sacrificiu. Ani de zile în şir, în fiecare zi câte-va ore, el redacta şi scria cu cerneală litografică tot felul de cursuri de matematici pentru studenţi. Imprejurările dinainte de 1914, când studenţii puteau folosi uşor literatura franceză, nu mai erau valabile acum; trebuia începută o literatură de manuale universitare româneşti. Şi astfel, N. ABRAMESCU a scris şi litografiat cursuri de Matematici Generale, Algebră, Mecanică, Geometrie Analitică. In acelaş timp s'a ocupat de biblioteca seminarului de matematici, înzestrând-o cu peste o mie de cărţi străine şi aducând la curent colecţii complete a periodicelor mai însemnate de specialitate. Această grijă, necunoscută înafara seminarului, l-a urmărit toată vieaţa. Cu patru zile înaintea morţei sale îmi dedea o comandă de revistele franceze care ne lipseau dela Cluj din timpul groaznicului război prin care am trecut în 1939—1945...

N. ABRAMESCU preţuia mai presus de orice demnitatea de a fi un profesor corect, bun îndrumător şi entuziast atrăgător de tineret pentru studiile sale preferate. De aceea cursurile sale erau făcute cu o îngrijire deosebită, presărate cu multe glume, care fixau atenţia auditorilor. Studenţii le-au urmărit totdeauna cu mare plăcere, socotindu-le printre cursurile lor favorite.

Intre timp, N. ABRAMESCU a început o serie de lucrări originale, care i-au adus doctoratul în matematici din Bucureşti cu o teză de sistematizare a Teoriei polinoamelor ortogonale. Numit profesor de Geometrie Analltică, în 1923, la Universitatea din Cluj, N. ABRAMESCU continua să lucreze alături de curs, procurându-şi şi recopiind cursurile de matematici din Paris, pe care nu i-a fost dat să le asculte personal niciodată. O serie de lucrări ale lui din acest timp, răspândite în diferite reviste ca: *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Nouvelles Annales de Mathématiques, Anuali di matematica, Mathematica, Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine*, etc. sunt o dovadă a preocupărilor sale neîncetate de a adânci diferite probleme matematice. S'a ocupat de desvoltările în serie, de cinematica mediilor deformabile, de diferite probleme de geometrie diferenţială ca normala şi desfăşurata afină, forma curbelor şi suprafeţelor în jurul unui punct şi cubica lui DARBOUX-SEGRE...

Activitatea didactică l-a condus să scrie o serie completă de cursuri de matematici pentru învăţământul secundar. Iar lucrarea în care a închis cea mai multă muncă şi entuziasm a fost *Cursul de Geometrie Analitică*, 640 de pag. editat de Universitatea din Cluj. Notă fiecare problemă sau amănunt nou cu mare scrupulozitate, ca să le insereze în ediţiile următoare. Şi în timpul nenorocit al exilului nostru din Cluj, N. ABRAMESCU lucra la Timişoara la refacerea ediţiei a treia a cursului său, care conţine şi noţiuni de geometrie neeuclidiană şi de geometrie vectorială. Un alt curs tipărit e acela de *Geometrie Infinitezimală*.

Această înşirare rece de fapte nu poate da o idee adevărată de caracteristica preţioasă a omului şi profesorului. Un fapt între o mie de altele poate arăta până unde mergea spiritul lui de sacrificiu pentru Universitatea lui scumpă. In 1928, după trei ani ca conferenţiar la Cluj, voiam să mă prezint la un concurs pentru o catedră. Dar nu era vacantă decât Geometria Descriptivă pentru care nu aveam nici-o aptitudine. Văzând greutăţile ce aveam, N. ABRAMESCU s'a oferit să se transfere el de la catedra de Analitică, pe care o iubea şi pentru care tipărise cursul, la cea de Descriptivă, eşa ca eu să pot candida mai uşor la Geometria Analitică. Acest spirit de ajutare între colegi, această adevărată frăţie, au făcut cu putinţă crearea unei familii spirituale strâns unite în jurul

seminarului de matematici din Cluj, de unde au putut porni, din elanul comun cimentat cu iubire reciprocă, realizări ca Congresele Române de Matematici, sau *Mathematica*.

Acum vechea familie dela Cluj se restrânge şi mai mult. Nu vom mai vedea surâsul scumpului N. ABRAMESCU, optimismul lui biruitor şi în cele mai tragice timpuri, nu vom mai asculta poveştile lui, nu vom mai fi martori la planurile lui de îmbogăţire a bibliotecii. Ne doare inima. Cu plecarea lui N. ABRAMESCU s'a rupt o coardă a sufletelor noastre, ale Clujenilor din timpurile de consolidare a învăţământului românesc pe meleagurile Ardealului. Cel puţin, D-zeu a îngăduit ca ABRAMESCU să poată prezida la reinstalarea bibliotecii după anii trişti ai exilului nostru din Cluj din 1940—45.

Acelaş gol sufletesc îl provoacă dispariţia lui N. ABRAMESCU şi în familia *Gazetei Matematice*. Până la sfârşit, ABRAMESCU a fost un credincios susţinător al ei. In fiecare an, el trimitea articole, note, probleme şi rapoarte la *Gazetă*. Iar în zilele de aniversări, el venea — în ciuda greutăţilor tot mai mari — să aducă la sediul *Gazetei* cuvântul cald al Clujului matematic. Ne răsună încă în inimi cuvintele sale dela jubileele de 40 şi de 50 de ani ale *Gazetei Matematice*.

Iar acum, o carte s'a închis. Fie ca exemplul vieţii cinstite şi sărace, de devotament şi de dragoste pentru Ştiinţă şi pentru Ţară, al lui N. ABRAMESCU să lumineze calea multor generaţii de începători întru ale ştiinţei.

PETRE SERGESCU.

DOUĂ CONICE ATAŞATE UNUI PATRULATER

Punctul de plecare al acestui studiu îl formează următoarele două frumoase teoreme [1]:

Prin vârful D *al unui patrat* ABCD *ducem o secantă arbitrară care taie laturile* BC *în* E *şi* AB *în* F; *fie şi* G *mijlocul segmentului* EC *şi* I *intersecţia* AE, FG.

1) De exemplu: *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică* de I. DUMITRIU pag. 50, problema 64.

1°. FG *este tangentă cercului înscris patratului.*

2°. I *este situat pe cercul circumscris patratului.*

Este evident că proprietăţile rămân valabile pentru un dreptunghiu, printr'o transformare afină, dacă înlocuim în enunţ, cercurile prin elipse înscrise şi circumscrise. Dar prin proiecţie cilindrică sau conică pe alt plan, ne încredinţăm că enunţul păstrează esenţialul şi pentru un paralelogram sau patrulater. Ne propunem să cercetăm generalitatea valabilităţii propoziţiilor 1°, 2°.

Aspectul iniţial al primei teoreme este următorul:

3°. *Fie* δ *o dreapta dată în planul patrulaterului* ABCD *şi* U *un punct dat pe* CD; *o dreaptă* Δ *variabilă, dusă prin* D *taie pe* δ *în* H *şi pe* AB *în* F; HU *taie pe* BC *în* G. FG *înfăşoară o conică tangentă laturilor* AB, BC, CD. *Punctul* M *de contact cu* BC *este pe dreapta ce uneşte pe* U *cu intersecţia* (BD, δ); *punctul* N *de contact cu* AB *este pe dreapta ce uneşte pe* D *cu intersecţia* (BU, δ). *Fie încă intersecţiile* J = (BC, δ), K = (AB, δ), L = (AB, DJ). *Dreptele* DJ, UK *sunt deasemenea tangente conicei; ultima are contactul în* U.

In adevăr, F şi G descriu diviziuni omografice pe laturile AB, BC căci la un F dat pe AB corespunde succesiv şi unic H = (DF, δ), G = (HU, BC) şi invers. Deci FG înfăşoară o conică tangentă laturilor AB, BC; punctul de contact cu AB este omologul lui G ≡ B, adică N; iar contactul cu BC este omologul lui F ≡ B, adică M. Restul afirmaţiilor din enunţ se verifică lesne în poziţii particulare ale secantei.

Când U variază pe DC, conicele formează un fascicol tangenţial, fiind înscrise în patrulaterul LBCD.

Să particularizăm pe δ luând-o dreapta dela infinit a planului:

4°. *Fie* U *un punct dat pe latura* DC *a patrulaterului* ABCD; *o dreaptă* Δ *variabilă, dusă prin* D *taie pe* AB *în* F; *paralela din* U *la* Δ *taie pe* BC *în* G. FG *înfăşoară o conică tangentă laturii* DC; *laturii* BC *în* M, *pe paralela* MU *la* BD; *laturii* AB *în* N *pe paralela* DN *la* BU; *paralelei din* U *la* AB; *paralelei din* D *la* BC.

Când U variază pe DC, conicele formează un fascicol tangenţial deci *centrele lor sunt situate* pe dreapta ce uneşte mijloacele diagonalelor, adică *pe paralela din* P, *mijlocul diagonalei* BD, *la* BC. *Conice cu centrul în* P *obţinem dacă* DC || AB fiindcă LBCD devine un paralelogram.

In cazul unui trapez (AD || BC sau A ≡ L), conica dela 4° este tangentă tuturor laturilor.

Proprietatea mai generală urmărită, poate fi socotită cu aceasta, stabilizată. De aici până la 1°, particularizările intermediare nu aduc nimic deosebit.

* * *

Pentru proprietatea 2° putem pleca dela enunțul:

5°. *Fie* δ *o dreaptă dată în planul patrulaterului* ABCD *și* U *un punct dat pe* CD; *o dreaptă* Δ *variabilă, dusă prin* D *taie pe* BC *în* E, *pe* AB *în* F' *și pe* δ *în* H; HU *taie pe* BC *în* G *și* FG *taie pe* AE *în* I. I *descrie o cubică cu un punct dublu în* A, *trecând prin* B, C *și intersecția* J = (BC, δ). *Dacă notăm cu* R *intersecția cu* BC *a dreptei duse prin* D *și prin intersecția* (BU, δ), *tangentele în* A *sunt* AD *și* AR. *Fie încă* Q = (AB, DJ); *tangenta în* B *trece prin conjugatul armonic al lui* D *față de* QJ [1].

In adevăr, observăm că A este punct dublu al curbei loc geometric; odată pentru Δ = DA și a doua oară pentru Δ = DR. Dacă ducem acum o dreaptă arbitrară prin A, fie E intersecția ei cu BC; DE taie pe AB în F, pe δ în H, HU taie pe BC în G și FG pe AE în I; deci pe orice dreaptă a curbei avem încă un punct în afară de cele două din A. Locul este deci o cubică.

Când Δ = DJ, un punct al locului este J deci *când* δ *este dreapta dela infinit, cubica are ca direcție asimptotică pe* BC; tangenta în B trece prin simetricul lui D față de intersecția cu AB a paralelei din D la BC.

Dacă laturile AD, BC se întâlnesc în J pe δ, dreapta AD are patru puncte comune cu cubica (3 confundate în A, AD fiind tangenta în punctul dublu); deci ea se descompune în dreapta AD și o conică; deci

6°. *Fie* U *un punct dat pe latura* DC *a patrulaterului* ABCD *și* δ *o dreaptă dusă prin intersecția* J *a laturilor* AD, BC. O *dreaptă* Δ *variabilă dusă prin* D *determină intersecțiile* E *cu* BC, F *cu* AB, H *cu* δ; HU *taie pe* BC *în* G, FG *taie pe* AE *în* I. I *descrie o conică circumscrisă triunghiului* ABC; R *fiind inter-*

1) Fie I' = (QE, JF); în patratul JEFQ, I'BD este triunghiul diagonal deci fascicolul B (JI' QD) este armonic; urmărim proprietatea la limită când F tinde către B.

secția cu BC *a dreptei ce unește pe* D *cu intersecția* (BU, δ), *tangenta în* A *este* AR; *tangenta în* B *trece prin conjugatul* T *al lui* D *față de* AJ.

Tangenta în B nu depinde de poziția lui U pe DC deci când U variază, conicele formează un fascicol punctual, fiind circumscrise triunghiului ABC și tangente în B la BT. In fascicol intră și conicele degenerate (AB, BC) și (BT, AC). Centrele acestor conice sunt situate pe conica celor nouă puncte care se reduce aici la conica ce trece prin B, prin mijloacele X, Y, Z ale laturilor triunghiului ABC și prin intersecția (AC, BT); aceste ultime conice sunt concentrice în centrul paralelogramului BXYZ.

Să căutăm *condiția ca și în al patrulea vârf al patrulaterului* ABCD *să fie situat pe conica dela* 6⁰. Vom arăta mai întâi că *dacă* S *este a doua intersecție a laturii* AD *cu conica iar* V *intersecția* (DC, δ) *rapoartele anarmonice* (SATJ) *și* (VDUC) *sunt egale.* In adevăr, dacă proiectăm din H într'o poziție arbitrară: (VDUC) = (JEGC); în patrulater (JRBC) = (VDUC); raportul anarmonic a patru puncte pe o conică fiind constant, putem continua A (JRBC) = A (SABC) = B (SABC) = (SATJ).

Am văzut că (JTAD) = — 1 deci condiția D ≡ S este echivalentă cu *condiția ca raportul* (VDUC) *să fie armonic.*

Dacă mai particular, luăm dreapta δ la infinit obținem

7⁰. *In planul unui trapez* ABCD, *o dreaptă* Δ *variabilă dusă prin* D *taie pe* BC *în* E, *pe* AB *în* F; *fie* G *mijlocul lui* EC. *Intersecția* AE, FG *descrie o conică circumscrisă trapezului; tangenta în* A *trece prin simetricul lui* C *față de* B; *tangenta în* B *trece prin simetricul lui* D *față de* A; *tangenta în* C *trece prin simetricul lui* A *față de* D; *tangenta în* D *trece prin simetricul lui* D *față de* C.

Conica se va reduce la un cerc, când trapezul va fi isoscel și $\overline{TA}.\overline{TD} = \overline{TD}^2$; fie O proiecția lui B pe AD; condiția se mai poate scrie

$$2\overline{AD}^2 = \overline{TO}^2 + \overline{OB}^2 \quad \therefore \quad \overline{OD}^2 = 2\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

Patratul corespunde pentru $\overline{OA} = 0$.

N. N. MIHĂILEANU.

RAPORT PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ „I. IONESCU"

Aducem la cunoştinţa Adunării Generale că din volumul LI al *Gazetei Matematice*, nu putem desprinde numele nici unui rezolvitor, care să fie luat în considerare pentru premiul de aritmetică. In acel volum s'au rezolvat dealtfel, puţine probleme de aritmetică, iar celălalt material de aritmetică publicat, articole, note, exerciţii şi probleme propuse nu sunt semnate de elevi de liceu, cum prevede regulamentul premiului.

De aceea, propunem să nu se acorde anul acesta premiul de aritmetică, rămânând ca valoarea lui să se adauge la premiul pentru anul viitor.

Regretăm că realitatea ne impune să facem această propunere negativă tocmai în primul an când premiul de aritmetică poartă numele mult regretatului profesor inginer ION IONESCU, dar sperăm şi dorim ca în anii care vor urma să se poată acorda neapărat premiul, aşa cum dorea purtătorul numelui lui.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „ION IONESCU"

Ing. I. S. ANTONIU, G-l GH. BUICLIU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 17 Februarie 1947 a *Gazetei Matematice*.

NOTE MATEMATICE

14. *Asupra problemei 5275*[1]. La finele soluţiei date acestei probleme la pag. 174, Vol. XLVII se cere şi o soluţie geometrică, având la bază faptul că punctele a, b, c, a', b', c' sunt pe o conică. Iată o ast-fel de soluţie, diferită puţin de cea dată la pag. 115, Vol. XLVIII.

Enunţul problemei este: *Fie* A', B', C' *simetricele ortocentrului unui triunghiu* ABC faţă de laturi. Se notează.

$b \equiv (A'B', CA)$; $a' \equiv (A'B', CB)$; $c \equiv (B'C', AB)$;
$b' \equiv (B'C', AC)$; $a \equiv (A'C', BC)$; $c' \equiv (A'C', BA)$.

1) A se vedea, asupra aceleiaşi probleme, soluţiile date de D-l D. STOICA în nota dela pag. 554, Vol. XLVII, D-l G. D. SIMIONESCU în nota dela pag. 557, Vol. XLVII, D-l P. P. DRĂGHICESCU în nota dela pag. 115, Vol. XLVIII.

Dacă a, b, c sunt picioarele a trei ceviene, atunci şi *a', b', c' sunt picioarele a trei ceviene.*

Notez cu L, M, N intersecţiile (BC, B'C'), (AC, A'C') şi (AB, A'B'). Din triunghiul ABC tăiat de transversalele C'B', C'A' şi A'B' deduc

$$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{cA}{cB}=1\ ;\quad \frac{MC}{MA}\cdot\frac{c'A}{c'B}\cdot\frac{aB}{aC}=1\ ;\quad \frac{NA}{NB}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{bC}{bA}=1.$$

Inmulţind aceste relaţii şi ţinând seamă că L, M, N sunt colineare, obţin relaţia

$$\frac{b'C}{b'A}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B}\cdot\frac{cA}{cB}\cdot\frac{a'B}{a'C}\cdot\frac{aB}{aC}=1$$

care arată că punctele *a, b, c, a', b', c'* sunt pe o conică. De aici rezultă că dacă *a, b, c* sunt picioarele a trei ceviene, *a', b', c'* sunt de asemeni picioarele a trei ceviene.

MIRCEA D. POPA.

15. *O construcţie prin puncte a parabolei.* Problema de Geometrie Analitică pe care am propus-o în toamna lui 1946 la concursul de admitere în Politehnica din Bucureşti, comporta la ultimul punct găsirea unui loc geometric, care este o construcţie prin puncte a parabolei $y^2 = 2px$.

Cum nu am găsit-o menţionată în cărţile de geometrie analitică, şi fiindcă ar merita să figureze, deoarece dă o reprezentare parametrică a parabolei sub forma redusă dau aici această construcţie:

Se duce bisectoarea întâia a axelor, şi pe ea se consideră punctul A $(2p, 2p)$, care este şi un punct al parabolei $y^2 = 2px$ ce vrem să construim. Se duc paralele la bisectoarea întâia, fie ele:

$$x - y + \lambda + 0 \quad \text{şi} \quad M(-\lambda, 0)\ ,\quad N(0, \lambda)$$

punctele de intersecţie cu axa Ox şi Oy. Se uneşte M cu A, iar prin N se duce paralela la axa Ox.

Aceste două drepte se taie în punctul P, care este un punct al parabolei, căci coordonatele lui sunt, cum se vede uşor:

$$P\left(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\right).$$

Această construcție este, un caz particular al construcției unei conice căreia i se cunosc punctele: O (0,0), A (a, b), B (α, β) precum și tangenta în O (axa Oy).

Această construcție se poate face în modul următor: Se duc paralele la OA, care taie perpendiculara în O pe tangentă (axa Ox) în M și tangenta în O în N. Punctul P de intersecție al dreptelor AM și CN este un punct al conicei căutate.

S'ar părea că această conică perfect determinată satisface numai la patru condiții. De fapt, rezultă din construcția de mai sus că ea trece cu necesitate prin punctul C (α, β) care se află la intersecția paralelei dusă din B la tangenta în O, cu paralela dusă din A la normala în O.

Când punctul B este aruncat la infinit în direcția normalei în O la conică, punctul C este și el aruncat în aceeași direcție, avem cazul precedent, al construcției unei parabole căreia i se cunoaște vârful O și tangenta la vârf, precum și un alt punct A al ei, adică al parabolei: $y^2 - \frac{b^2}{a} x = 0$ dacă A (a, b).

Din cauza configurației speciale pe care trebue să o aibă cele patru puncte OABC și cu tangenta în O, construcția de mai sus a conicei, nu este aplicabilă în cazul general.

N. CIORĂNESCU.

16. *Asupra notei precedente.* Consider o conică (E). Fie O, A și B trei puncte fixe depe această conică, iar P un punct mobil pe aceeași conică. Fie deasemeni, Ox și Oy două drepte fixe, arbitrare trecând prin O. Punem M$\equiv$(AP, Ox) și N$\equiv$(BP, Oy).

P *variind pe conica* (E) *dreapta* MN *trece printr'un punct fix* γ fiindcă punctele M și N variind respectiv pe Ox și Oy se corespund în omografie; iar punctul O este propriul său analog.

In particular, dacă punctul C, de intersecție al paralelei duse din A la Ox cu paralela dusă din B lui Oy, aparține conicei (E) dreapta M rămâne paralelă cu ea însăși. In acest caz dreapta MN corespunzătoarea lui P$\equiv$C este chiar dreapta dela infinit a planului.

Când conica (E) variază dar trece în afară de punctele O, A și B printr'un al patrulea punct fix D, locul geometric al punctelor γ este evident dreapta $M_d N_d$ unde $M_d \equiv$(A , Ox) și $N_d \equiv$(BD, Oy).

Dacă punctul D variază pe o dreaptă Ot, ce trece prin O, $M_d N_d$ *trece deasemeni printr'un punct fix* α. Explicaţia este aceeaşi ca mai sus. Punctele M_d şi N_d se corespund pe Ox şi Oy, în omografie, iar O este propriul său analog.

Pentru a determina efectiv, punctul α considerăm două poziţiuni particulare ale dreptei $M_d N_d$. Astfel, când D coincide cu intersecţia dreptelor AB şi Ot, $M_d N_d$ coincide cu AB. Când D este la infinit pe Ot, M_d devine At intersecţia paralelei dusă din A la Ot cu Ox, iar N_d devine Bt intersecţia cu Oy a paralelei duse prin B lui Ot. Deci $\alpha \equiv (AB, A_t B_t)$.

Rezultă deasemeni, *că dreapta* $O\alpha$ *este locul geometric al punctelor* γ *corespunzătoare conicelor* (E) *ce trec prin* O, A *şi* B *şi sunt tangente în* O *dreptei* Ot.

Când tangenta Ot coincide cu Oy punctul α coincide cu A. Prin urmare în acest caz locul punctului γ este dreapta OA. Iar dacă se consideră dintre conicele tangente lui Oy în O şi trecând prin A şi B pe acea ce trece prin C punctul γ devine punctul dela infinit al dreptei OA.

Acesta este cazul considerat în nota ce precede.

Ş. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI

Construcţie şi Electromecanică

Examenul de admitere Octombrie-Noembrie 1946

Geometria plană. Se dă un paralelogram ABCD şi se consideră cercul circumscris triunghiului ABD care mai întâlneşte pe BC în E şi pe CD în F. Dreapta BF întâlneşte pe AD în G şi DE pe AB în H. Dreptele BF şi DE se întâlnesc în I, iar paralela prin G la AB întâlneşte paralela prin H la AD în J. Să se arate: 1. Că triunghiurile BJE şi DIE sunt asemenea. 2. Că triunghiurile BIH şi DIG sunt asemenea. 3. Să se deducă că $EF \parallel GH$. 4. Că punctele I, C, J sunt colineare. 5. Că punctele B, D, G, H sunt pe un cerc. 6. Că avem $AE = AF$.

Geometria analitică. Intr'un sistem de axe dreptunghiulare se consideră punctele mobile $M(2\lambda, 0)$; $N(0, \lambda)$, $P(0, 2\lambda)$ şi se cere:

1°. Să se scrie ecuaţia cercului ce trece prin punctele M şi N.

2°. Acest cerc taie dreapta MP intr'un punct Q al cărui loc geometric se cere.

3°. Să se afle apoi locul geometric al intersecției tangentei în Q la cerc cu dreapta MN.

4°. Se unește punctul M cu un punct fix A de pe bisectoarea a 2-a a axelor. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei AM cu paralela dusă din P la axa Oy și să se construiască acest loc.

BIBLIOGRAFIE

Analele Româno-Sovietice. 1. Octombrie 1946. Revistă lunară, editată de Institutul de cultură Româno-Sovietic. Cuprinde articole, dări de seamă și recenzii din toate ramurile științelor. Acest periodic face legătura pe teren practic între savanții români și sovietici, căutând să procure doritorilor din țara noastră informațiunile de ordin științific și publicațiile de știință pe care le vor cere.

Mathematica. Vol. XXII. 1946. Timișoara „Tipografia Românească". Acest volum este omagiul matematicienilor români către d-l P. MONTEL cu ocazia aniversării a 70 de ani, și cuprinde: Redacția: A Monsieur PAUL MONTEL. ST. PETRESCU: Sur la réduction à une forme canonique d'une forme bilinéaire symetrique gauche, par des transformations orthogonales. P. SZYMANSKI: Essai sur la théorie mathématique des sensations de couleur. TH. ANGHELUȚĂ: Sur la détermination de l'indice d'une fonction rationnelle. T. MIHĂILESCU: Sur les congruences de RIBAUCOUR-DARBOUX. V. VÂLCOVICI: Sur une interprétation cinématique du tourbillon et sur la rotation des directions principales de la déformation. N. GHIRCOIAȘIU: Une équation fonctionnelle caractérisant les coniques. N. ABRAMESCU: Sur la développée affine d'une courbe plane. C. DRÂMBĂ: Les chocs triples immaginaires dans le problème général des trois corps. J. CUREA: Procédé d'approximation linéaire pour déterminer l'oscillation du sol. M. HAIMOVICI: Sur les systèmes homographiques de courbes dans l'espace à *n* dimensions. N. CIORĂNESCU: Quelques formules d'équivalence ou de moyenne. D. V. IONESCU: Relation entre polynomes définis par certaines relations de récurence. AL. GHIKA: Sur l'espace fonctionnel de CAUCHY et l'approximation des fonctions analytiques uniformes. D. POMPEIU: Sur une proposition analogue au théorème des accroisements finis. CONST. POPOVICI: Problèmes proposés concernant certaines analogies. M. GHERMĂNESCU: Sur les générations de la formule de BINET. D. BARBILIAN: Modernisierung des Beiwises des DIRICHLET-JACOBISCHEN Satzes. C. IACOB: Sur l'emploi de la méthodes hodographique en mécanique des fluides compressibles. M. NICULESCU: Sur la seconde formule de la moyenne. F. MARCUS: Sur quelques congruences. M. DRĂGANU: Sur la résolution de l'équation différentielle des mouvements vibratoires d'une membrane rectangulaire par la méthode de la transformation multiple de LAPLACE. O. ONICESCU: Sur le théorème fondamental de l'algèbre.

ING. AL. GHEORGHIU. Folosirea deplasărilor clasice în calculul cadrelor (Extras din „*Buletinul Soc. Politehnice*" 1946).

ING. AL. GHEORGHIU. Planşeu cu grinzi încrucişate la construcţia palatului regal (Extras din „*Buletinul Soc. Politehnice*" 1941).

F. MARCUS. Sur les cycles de LAPLACE de période quatre (Extras din *Mathematica*, Vol. XX, 1944).

F. MARCUS. Sur les réseaux avec les invariants absolus constants. (Extras din *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des sciences*, Tome 46—1944).

I. I. STAMATE. Reprezentări grafice. Litografia Schildkrant. Cluj.

PROF. T. VESCAN. Az atom energia. Cluj 1947.

CERERI

341. Notând într'un poliedru convex cu V numărul vârfurilor, cu L numărul laturilor şi cu F numărul feţelor, avem relaţia cunoscută a lui EULER-DESCARTES

$$V + F = L + 2.$$

Există o relaţie asemănătoare şi pentru corpurile convexe din spaţiile cu mai mult de trei dimensiuni?

ING. T. DĂNILĂ.

DIVERSE

a) Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"

Adunarea generală în şedinţa din 17 Februarie 1947 a ales ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* pe: ING. IOAN AGÂRBICEANU, PROF. MATEI AUGUST, ING. CONST. N. AVRAM, ING. DUMITRU BĂIATU, ING. MIHAIL BĂRBULESCU, PROF. C. BORŞ, ING. AUREL V. CAMBUREANU, ING. GH. CÂLNICEANU, ING. VALENTIN CĂLINESCU, ING. IOAN CANTUNIAR, ING. IOAN CIULONESCU, ING. N. N. CONSTANTINESCU, PROF. PAULINA CONSTANTINESCU, ING. NICOLAE COSTACHE, ING. NICOLAE DUMITRESCU, ING. ALEXANDRU GHENEA, ING. VASILE GHIOCEL, ING. GHEORGHE Z. IOAN, ING. GHEORGHE IONESCU, ING. TEODOR IONESCU, ING. GHEORGHE MANEA, ING. EMILIAN MANIŢIU, ING. CORNELIU MANCIU, G-L ING. VASILE MARCU, ING. ION MICLESCU, ING. ION MINOIU. ING. EMIL G. MODÂLCĂ, ING. DAN NĂCESCU, ING. CONSTANTIN POPOVICI, ING. ALEXANDRU POPP, ING. VLAD RĂDULESCU, ING. VINTILĂ ROBAN, ING. CONST. SAPATINO, ING. GRIGORE SCHILERU şi ING. D-TRU TUTUNARU.

Adunarea generală în şedinţa din 24 Februarie 1947 a ales ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* pe: ING. CAMIL APĂTEANU şi ING. IOAN E. BELEŞ.

b) **Concursul „Gazetei Matematice" din 1947**

La pag. 213 din numărul precedent în ultimul rând la clasa a VII-a se înlocuește STĂNESCU N. VIRGILIU și TEODOR P. PETRE respectiv prin STĂNCESCU N. VIRGILIU și TEODORESCU P. PETRE.

La aceiași pagină la clasa VIII-a se adaugă ENESCU G. IONEL, care a fost omis din o greșeală de culegere.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3699. *Trei mobile* A, B, C *pornesc din același punct și în același timp, parcurgând un cerc în același sens, respectiv cu vitezele* 2 R, 3 R, 6 R; R *fiind raza cercului.*

Să se studieze variația suprafeței triunghiului ABC.

ING. OCTAVIAN ORĂNESCU.

Pentru a simplifica problema vom presupune punctul A fix pe cercul cu centrul în O, iar punctele B și C mobile cu vitezele respective $3R - 2R = R$ și $6R - 2R = 4R$; rezultatele vor fi aceleași.

Luăm cu variabilă unghiul $AOB = \alpha$. Dacă t este timpul în secunde avem:

$$\text{arc } AB = Rt = R\alpha \quad \therefore \quad \alpha = t \quad \therefore \quad \sphericalangle AOC = 4t \ , \quad \sphericalangle BOC = \beta = 3t.$$

Insă $$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} - S_{AOC}$$

sau $$S_{ABC} = S = \frac{R^2}{2}(\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 4\alpha).$$

Dar avem:

$$E = \sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 4\alpha = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{3\alpha}{2} \sin 2\alpha.$$

$$S = 2R^2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{3\alpha}{2} \sin 2\alpha.$$

care se anulează pentru:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \ ; \quad \sin\frac{3\alpha}{2} = 0 \ ; \quad \sin 2\alpha = 0.$$

Se observă că pentru $\alpha = 2k\pi$, mobilele B și C se întâlnesc în A și deci se repetă situația inițială; rezultă că este suficient a studia problema numai pentru $\alpha \leqslant 2\pi$.

In această limită S se anulează pentru următoarele valori ale lui α:

$$\alpha = 0 \; ; \; \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{2\pi}{3} \; ; \; \pi \; ; \; \frac{4\pi}{3} \; ; \; \frac{3\pi}{2} \; ; \; 2\pi.$$

Când $\alpha = 0$ și $\alpha = 2\pi$ punctele A, B, C coincid și triunghiul se reduce la un punct.

Când $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$ și $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ punctul C se află în A și triunghiul se reduce la dreapta AB.

In fine dacă $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ și $\alpha = \frac{4\pi}{2}$ punctele B și C coincid și triunghiul se reduce iarăși la o dreaptă.

Avem apoi:

$$\frac{dE}{d\alpha} = \cos\alpha + 3\cos 3\alpha - 4\cos 4\alpha =$$
$$- 4\,(8\cos^4\alpha - 3\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1).$$

Pentru a găsi maximele lui S vom anula această derivată

$$8\cos^4\alpha - 3\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0.$$

O rădăcină evidentă este: $\cos\alpha = 1$.

Celelalte rădăcini sunt date de ecuația:

$$8\cos^3\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - 1 = 0.$$

Ecuația redusă este:

$$y^3 - \frac{291}{24^2}\,y - \frac{398}{24^3} = 0 \quad \text{unde} \quad \cos\alpha = y - \frac{5}{24}.$$

Rădăcinile sunt:

$$y_1 = 0{,}73772 \; ; \; y_2 = -0{,}68036 \; ; \; y_3 = -0{,}05736$$

și deci

$$\cos\alpha_1 = 0{,}52939 \; ; \; \cos\alpha_2 = -0{,}88869 \; ; \; \cos\alpha_3 = -0{,}26569.$$

In limita superioară de 360^0 corespund unghiurile:

$$\alpha = 58^0\,2'\,9'' \; ; \; 105^0\,24'\,27'' \; ; \; 152^0\,42'\,33'' \; ; \; 207^0\,17'27'';$$
$$254^0\,35'\,33'' \; ; \; 301^0\,57'\,51''.$$

Se formează următorul tablou pentru variaţia suprafeţei S:

α	0	$58^0\,2'\,9''$	90^0	$105^0\,24'\,27''$	120^0	$152^0\,42'\,33''$
$\pm S$	0	$0{,}870 . R^2$	0	$0{,}304 . R^2$	0	$1{,}195 . R^2$
t	0	1,01	1,57	1,84	2,09	2,66

α	180^0	$207^0\,17'\,27''$	240^0	$254^0\,35'\,33''$	270^0
$\pm S$	0	$1{,}195 . R^2$	0	$0{,}304 . R^2$	0
t	3,14	3,62	4,18	4,44	4,71

α	$301^0\,57'\,51''$	360^0	
$\pm S$	$0{,}870\,R$	0	
t	5,27	6,28	secunde.

Curba este simetrică faţă de axa $O\alpha$ şi de dreapta $\alpha = 180^0$.

De oarece $\alpha = t$, timpul t se calculează transformând unghiurile din grade în radiani.

Bineînţeles că problema se poate generaliza, considerând că mobilele pornesc din puncte diferite, la timpuri diferite şi cu viteze variind cu timpul, după legi diferite. Se mai pot considera, mobile în număr oarecare, în care caz, avem deaface cu suprafeţe poligonale.

Au rezolvat problema d-nii: C. BERDAN, A. I. VARGĂ, P. P. DRĂGHICESCU şi M. R. CONSTANTINESCU (studenţi Politehnica din Bucureşti).

O. OR.

PROBLEMA 4185. *Un triunghiu are baza fixă şi unghiul opus constant. Să se găsească locul geometric al ortopolurilor bisectoarelor acestui triunghiu faţă de el însuşi.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-l L-T MIRCEA D. POPA.

Fie ABC triunghiul dat înscris în cercul de centru O şi având baza BC fixă.

I. Incepem prin a căuta locurile ortopolurilor bisectoarelor unghiului A. Fie A' mijlocul lui BC şi A_1, A_2 intersecţiile cercului (O) cu diametrul OA' perpendicular pe BC. Dreptele AA_1, AA_2 sunt bisectoarele unghiului A. Fie M_1, M_2 ortopolurile acestor bisectoare. Se ştie că ortopolul unei drepte Δ faţă de un triunghiu este intersecţia dreptelor lui SIMSON a punctelor în care Δ întâlneşte cercul (O), în cazul când Δ întâlneşte acest cerc, cum este cazul dreptelor AA_1 şi AA_2, Dreapta lui SIMSON a punctului A este înălţimea din A, iar dreptele lui SIMSON ale punctelor A_1, A_2 sunt perpendicularele din A' pe AA_1 şi AA_2. Aceste perpendiculare întâlnesc înălţimea din A respectiv în M_1 şi M_2, ortopolii bisectoarelor AA_1 şi AA_2. Se formează prin aceste construcţii paralelogramele A_1AA_2A' şi A_2AA_1A' din care se deduce

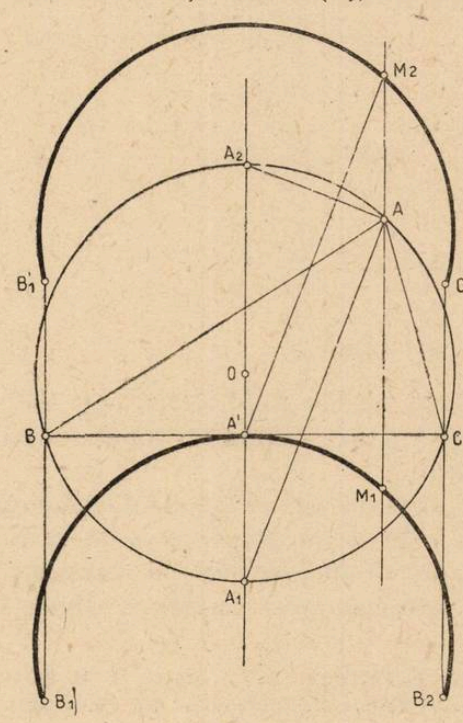


Fig. 1.

$$AM_2 = A_1A' = c^t$$

şi $$AM_1 = A'A_2 = c^t$$

ceia ce ne arată că punctele M_2 şi M_1 descriu cercul (O) *translatat* cu cantităţile A_1A', $A'A_2$ pe o direcţie perpendiculară pe BC. Senzurile translaţiei fiind respectiv A_1A' şi B_2A'.

In concluzie M_1, M_2 descriu două cercuri egale cu (O). Pe figură s'a desenat numai partea din loc corespunzătoare mişcărei lui A pe arcul BA_2C.

II. Căutăm locurilor ortopolurilor bisectoarelor unghiului B. Fie (fig. 2) M, M', ortopolurile bisectoarelor BB_2, BB_1 pentru care, conform celor dela cazul precedent avem

$$BM = B_1B' \quad \text{şi} \quad M'B = B'B_2,$$

Punctul B' descrie cercul de diametru OC şi cu centrul în C_1. Complectăm paralelogramele BOB'E, BOB'F şi BOC_1L observând că E este pe MM', L este fix pe A'F. Triunghiurile LBE, C_1OB' având

$$LB = C_1O \quad , \quad BE = OB' \quad \text{şi} \quad \sphericalangle LBE = \sphericalangle B_1OB'$$

sunt egale, deci $LE = C_1B' =$ jumătatea razei OC a cercului (O).

Punctul E *descrie deci cercul cu centrul în* L *şi raza* $LB = C_1O$.

Din paralelogramul $BB_2B'M'$ în care $BE = OB'$ rezultă

$$EM' = B_2O = \text{raza cercului } (O) = c^t \qquad (1)$$

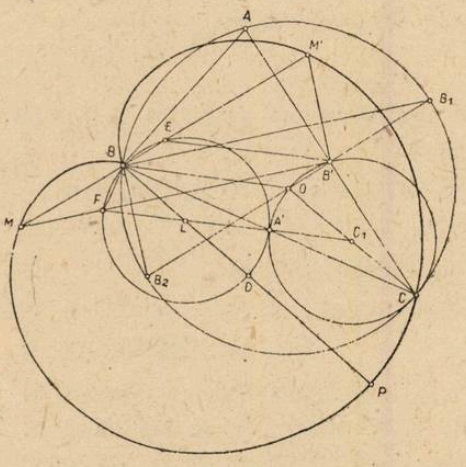


Fig. 2.

prin urmare M' *descrie concoida punctului* B *faţă de cercul* (L) *de centru* L *şi raza* LB. Această concoidă este în cazul de faţă o *cardioidă* cu punctul dublu în B şi axa pe BL.

La fel se arată că M descrie o *concoidă* şi cum

$$MM' = B_2B_1 = 2OC = 2BD \qquad (2)$$

rezultă, după o proprietate cunoscută a concoidei că M descrie aceiaşi concoidă ca şi M'. De altfel din relaţiile (1) şi (2) se deduce că E este mijlocul lui MM' şi deci

$$EM = EM' = OB_2.$$

Intreaga cardioidă face parte din loc.

Ortopolurile bisectoarelor unghiului C descriu o cardioidă analoagă cu precedenta, având punctul dublu în C, axa CD şi trecând prin B şi simetricul lui C faţă de D.

Notă 1°. D-l N. N. MIHĂILEANU, pe când era student, a trimis cu data de 23 Oct. 1932 o generalizare şi două soluţii, una prin relaţii de unghiuri şi alta bazată pe proprietăţile dreptelor antiparalele. Atât generalizarea cât şi soluţia se ocupă numai de ortopolurile bisectoarelor unghiului A, ceiace nu era o restricţie a enunţului. In generalizarea sa, D-l N. N. MIHĂILEANU consideră în cercul O coarda fixă BC, diametrul A_1A_2 perpendicular pe ea şi punctul A mobil pe O şi caută locul izopolurilor dreptelor AA_1, AA_2 găsind cercul O translatat paralele cu A_1A_2.

2°. Prin problema de față am vroit să pun în evidență o proprietate caracteristică a bisectoarelor și anume: *Ortopolurile* M_1, M_2 *ale bisectoarelor unghiului* A *a triunghiului* ABC *sunt pe înălțimea* AH *iar distanța* M_1M_2 *este egală cu diametrul cercului* ABC, proprietate care se demonstrează ușor după cum s'a văzut din soluția d-lui L-T M. D. POPA.

Proprietatea dela 2° se extinde în felul următor.

In cercul de centru O *se dau corzile perpendiculare* BC, A_1A_2 *și punctul* A, *mobil pe cerc. Dacă* M_1, M_2 *sunt ortopolii dreptelor* AA_1, AA_2 *atunci distanța* M_1M_2 *este constantă și egală cu* A_1A_2.

Figura, care rezultă din construcția ortopolurilor bisectoarelor are numeroase proprietăți interesante dintre care unele cunoscute, iar altele le vom publica sub formă de articole, note sau probleme propuse.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4695. *Se consideră un punct* M *în interiorul unui triunghiu* ABC. *Se notează*

$$(AB, AM) = \varphi_1 \ ; \ (BC, BM) = \varphi_2 \ ; \ (CA, CM) = \varphi_3 .$$

Să se demonstreze relația

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{cotg}\varphi_3 - \Sigma \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{cotg}\varphi_3 + \Sigma \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}\varphi_3 = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluție dată de d-nii: A. I. CORNĂȚEANU, V. ECKSTEIN, V. FLORESCU, IOAN A. ILIE, A. T. NADOLU, M. A. NEGREA, M. D. PETCULESCU, M. D. POPA, M. D. STOENESCU, N. D. ȘTEFĂNESCU, I. STREDER și E. N. WEGENER.

Cu notațiile din enunț teorema lui CEVA referitoare la dreptele concurente AM, BM, CM se scrie

$$\frac{\sin(A-\varphi_1)}{\sin\varphi_1} \cdot \frac{\sin(B-\varphi_2)}{\sin\varphi_2} \cdot \frac{\sin(C-\varphi_3)}{\sin\varphi_3} = 1.$$

sau, desvoltând numărătorii și împărțind cu numitorii,

$$(\sin A \operatorname{cotg}\varphi_1 - \cos A)(\sin B \operatorname{cotg}\varphi_2 - \cos B)(\sin C \operatorname{cotg}\varphi_3 - \cos C) = 1 ;$$

$$(\operatorname{cotg}\varphi_1 - \operatorname{cotg}A)(\operatorname{cotg}\varphi_2 - \operatorname{cotg}B)(\operatorname{cotg}\varphi_3 - \operatorname{cotg}C) = \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Făcând desvoltările în prima parte și notând cu E prima parte a identității ce urmărim să demonstrăm, avem

$$E - \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C = \operatorname{cosec}A \operatorname{cosec}B \operatorname{cosec}C$$

adică totul se reduce la identitatea cunoscută

$$\operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C + \operatorname{cosec}A \operatorname{cosec}B \operatorname{cosec}C = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$$

şi care se găseşte în *Culegere de Probleme de Trigonometrie*, Vol. I, Goniometrie, Cap. X, pr. 12.

D-nii V. ECKSTEIN şi E. N. WEGENER fac observaţia următoare: Dacă $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \omega$, relaţia din enunţ se reduce la

$$\operatorname{cotg}^3\omega - \operatorname{cotg}^2\omega \sum \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}\omega \sum \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B - \sum \operatorname{cot}A = 0$$

care în baza relaţiei cunoscute: $\sum \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B = 1$, se reduce la

$$(1 + \operatorname{cot}^2\omega)(\operatorname{cotg}\omega - \sum \operatorname{cotg}A) = 0$$

unde eliminând soluţiile imaginare, avem

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cot}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C,$$

relaţia cunoscută şi care dă unghiul lui BROCARD dintr'un triunghiu oarecare.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4968. *Să se arate că între înălţimile h_a, h_b, h_c ale unui triunghiu oarecare, raza r a cercului înscris şi razele r_a, r_b, r_c ale cercurilor exînscrise, există relaţia:*

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{r_a} & \frac{2}{h_a} & \frac{2}{h_a} \\ \frac{2}{h_b} & -\frac{1}{r_b} & \frac{2}{h_b} \\ \frac{2}{h_c} & \frac{2}{h_c} & -\frac{1}{r_c} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^3}$$

GENERAL GR. ZAPAN.

I. *Soluţie* dată de d-nii: MIRCEA C. BEDREAG, IOAN N. GLIGOR, MAIOR EUGEN ST. IACOB şi AL. I. ROHR.

Dacă ţinem seamă de relaţiile cunoscute:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S \; ; \; r_a = \frac{S}{p-b} \; , \; r_b = \frac{S}{p-b} \; , \; r_c = \frac{S}{p-c}$$

determinantul dat devine:

$$\Delta = \frac{1}{S^3} \begin{vmatrix} a-p & a & a \\ b & b-p & b \\ c & c & c-p \end{vmatrix}$$

Adunând la linia I elementele celorlalte linii şi scoţând factorul comun p obţinem:

$$\Delta = \frac{p}{S^3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b-p & b \\ c & c & c-p \end{vmatrix}$$

Scăzând coloana I din celelalte obţinem:

$$\Delta = \frac{p}{S^3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -p & 0 \\ c & 0 & -p \end{vmatrix} = \frac{p^3}{S^3} = \frac{1}{r^3}.$$

II. *Soluţie* dată de d-l ŞTEFAN G. TILICĂ:

Dacă în identitatea:

$$\begin{vmatrix} -\alpha & \beta+\gamma & \beta+\gamma \\ \gamma+\alpha & -\beta & \gamma+\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & -\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3$$

punem: $\alpha = \frac{1}{r_a}$, $\beta = \frac{1}{r_b}$, $\gamma = \frac{1}{r_c}$ obţinem relaţia propusă

deoarece: $\beta+\gamma = \frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a}$; etc., iar $\alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{r}$.

Notă. 1°. D-nii: CĂLIN ION C. DIMITRIU şi DORIN N. TEODORESCU au rezolvat problema folosindu-se de relaţiile: $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}$; etc.

2°. D-l MINEA V. ALDEA a rezolvat problema folosindu-se de relaţiile:

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{h_b}+\frac{2}{h_c}-\frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_c}+\frac{2}{h_a}-\frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_a}+\frac{2}{h_b}-\frac{1}{r_c}.$$

3°. Au mai rezolvat problema d-nii: STELIAN CETĂŢEANU, C. D. EFTIMIE, SUBLOCOT. GR. MARTEŞ, MIRCEA A. NEGREA, AL. N. POPESCU-ZORICA, RADU ŞTEFĂNESCU, EUGEN N. WEGENER.

PROBLEMA 5527. *Câte fracţii subunitare ireductibile se pot forma cu termenii de două cifre?* I. IONESCU.

Fie $a\,b$ o fracţie subunitară ireductibilă, în care a şi b sunt numere de 2 cifre. Cea mai mică valoare a unei astfel de fracţii este 10/11 deci $11 \leqslant b < 100$.

Pentru a găsi numărul de fracţii din condiţiile enunţului, vom calcula pentru fiecare valoare a lui b:

1. Numărul numerelor prime cu b, cuprinse între 10 şi b. Fie $I_{10 \to b}(b)$ acel număr.

2. Numărul numerelor prime cu b şi mai mici decât 10. Fie $I_{10}(b)$ acel număr.

Diferenţa între numerele dela 1) şi cele dela 2), şi adică

$$I_{10 \to b}(b) = \varphi(b) - I_{10}(b)$$

ne dă numărul fracţiilor subunitare ireductibile cu termeni cuprinşi între 10 şi b.

Aplicând formulele care dau pe $I_{10 \to b}(b)$, $\varphi(b)$ şi $I_{10}(b)$ se întocmeşte cu uşurinţă următorul tabel, care dă numărul cerut în enunţ.

$b=a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots$	$\varphi(b)$	$I_{10}(b)$	$I_{10 \to b}(b)$	$b=a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots$	$\varphi(b)$	$I_{10}(b)$	$I_{10 \to b}(b)$
$11=11$	10	9	1	$56=2^3.3$	24	4	20
$12=2^2.3$	4	3	1	$57=3.19$	36	6	30
$13=13$	12	9	3	$58=2.29$	28	5	23
$14=2.7$	6	4	2	$59=59$	58	9	49
$15=3.5$	8	5	3	$60=2^2.3.5$	16	2	14
$16=2^4$	8	5	3	$61=61$	60	9	51
$17=17$	16	9	7	$62=2.31$	30	5	25
$18=2.3^2$	6	3	3	$63=3^2.7$	36	5	31
$19=19$	18	9	9	$64=2^6$	32	5	27
$20=2^2.5$	8	4	4	$65=5.13$	48	8	40
$21=3.7$	12	5	7	$66=2.3.11$	20	3	17
$22=2.11$	10	5	5	$67=67$	66	9	57
$23=23$	22	9	13	$68=2^2.17$	32	5	27
$24=2^3.3$	8	3	5	$69=3.23$	44	6	38
$25=5^2$	20	8	12	$70=2.5.7$	24	3	21
$26=2.13$	12	5	7	$71=71$	70	9	61
$27=3^3$	18	6	12	$72=2^3.3^2$	24	3	21
$28=2^2.7$	12	4	8	$73=73$	72	9	63
$29=29$	28	9	19	$74=2.37$	36	5	31
$30=2.3.5$	8	2	6	$75=3.5^2$	40	3	37
$31=31$	30	9	21	$76=2^2.19$	36	5	31
$32=2^5$	16	5	11	$77=7.11$	60	8	52
$33=3.11$	20	6	14	$78=2.3.13$	24	3	21
$34=2.17$	16	5	11	$79=79$	78	9	69
$35=5.7$	24	7	17	$80=2^4.5$	32	4	28
$36=2^2.3^2$	12	3	9	$81=3^4$	54	6	48
$37=37$	36	9	27	$82=2.41$	40	5	35
$38=2.19$	18	5	13	$83=83$	82	9	73
$39=3.13$	24	6	18	$84=2^2.3.7$	24	2	23
$40=2^3.5$	16	4	12	$85=5.17$	64	8	56
$41=41$	40	9	31	$86=2.43$	42	5	37
$42=2.37$	12	2	10	$87=3.29$	56	6	50
$43=43$	42	9	33	$88=2^3.11$	40	5	35
$44=2^2.11$	20	5	15	$89=89$	88	9	79
$45=3^2.5$	24	5	19	$90=2.3^2.5$	24	2	22
$46=2.23$	22	5	17	$91=7.13$	72	8	64
$47=47$	46	9	37	$92=2^2.23$	44	5	39
$48=2^4.3$	16	3	13	$93=3.31$	60	6	54
$49=7^2$	42	8	34	$94=2.47$	46	5	41
$50=2.5^2$	20	4	16	$95=5.19$	72	8	64
$51=3.17$	32	6	26	$96=2^5.3$	32	3	29
$52=2^2.13$	24	5	20	$97=97$	96	9	87
$53=53$	52	9	43	$98=2.7^2$	42	4	38
$54=2.3^3$	18	3	15	$99=3^2.11$	60	6	54
$55=5.11$	40	7	33				
Total . . .			645	Total . .			1842

Deci, se pot scrie 2.457 fracţii subunitare ireductibile cu termenii de două cifre.

PETRE P. TEODORESCU
Clasa a VI-a liceul Matei Basarab, Bucureşti.

PROBLEMA 5699. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{1+x+x^2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{1+x+x^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1+x+x^2}\right)$$

C. MIHU.

Pornind dela relaţiile cunoscute:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a-b) \qquad (1)$$

$$\sin(a+c) \cdot \sin(b+c) = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b+2c) \qquad (2)$$

şi punând:

$$a = b = \frac{\pi x}{1+x+x^2}; \; a+c = \frac{\pi x^2}{1+x+x^2}; \; b+c = \frac{\pi}{1+x+x^2} \qquad (3)$$

egalarea membrilor întâi din relaţiile (1) şi (2) ne conduc la ecuaţia din enunţ; egalând şi membrii doi obţinem:

$$\cos(a+b+2c) = \cos(a+b)$$

sau: $\qquad a+b+2c = 2k\pi \pm (a+b) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

şi ţinând seama de (3) deducem ecuaţiile distincte:

$$x^2(k-1) + x(k-1) + k = 0; \qquad (4)$$

$$x^2(k-1) + x(k+1) + k = 0; \qquad (5)$$

Ecuaţia (4) ne dă:

$$x = \frac{1-k \pm \sqrt{1+2k-3k^2}}{2(k-1)};$$

cum realizantul acestei ecuaţii este pozitiv pentru: $-\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant 1$,

iar k este întreg pozitiv sau negativ, rădăcinile reale ale ecuației (4) vor fi cele din tabloul următor:

k	0	1
x	$-1,0$	$-\infty, +\infty$

Ecuația (5) ne dă:

$$x = \frac{-(k+1) \pm \sqrt{1+6k-3k^2}}{2(k-1)}$$

cum rădăcinile ecuației: $3k^2 - 6k - 1 = 0$, sunt:

$$k_1 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 2,15\ldots \text{ și } k_2 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 0,15\ldots$$

realizantul acestei ecuații va fi pozitiv pentru: $-0,15 \leqslant k \leqslant 2,15\ldots$ iar rădăcinile reale vor fi:

k	0	1	2
x	0, 1	$-\infty, -\frac{1}{2}$	$-1; -2$

Rădăcinile cari verifică ecuația dată, sunt: $-\infty$; -1; 0; 1; $+\infty$; simetric așezate față de origine. Pentru k întreg dar situat în afara limitelor de mai sus, vom avea câte o dublă infinitate de rădăcini imaginare pentru fiecare din ecuațiile (4) și (5).

Notă. 1°. D-l Mihai R. Constantinescu sprijinit pe aceiași metodă dar greșind calculele nu găsește decât o singură rădăcină reală.

2°. D-nii Victor Gh. Pițigoi (colegiul Sf. Sava) și M, V. Soare nu au găsit decât soluția 1 însă printr'un raționament greșit.

3°. In general ecuațiile de forma:

$$\prod_{i}^{1-2} \sin \pi f_{i,k} = \prod_{k}^{1-2} \sin \pi f_{i,k}$$

unde $f_{i,k}$ sunt funcțiuni de x se pot rezolva prin aceiași metodă.

C. Mihu.

PROBLEMA 6216. *Să se arate că laturile unui triunghiu dreptunghic şi simetricele bisectoarelor unghiului drept în raport cu centrul cercului circumscris sunt cinci tangente ale unei aceleiaşi parabole.*

ŞERBAN GHEORGHIU.

Soluţie geometrică. Fie AOB un triunghiu dreptunghic în O. Fie de asemeni C mijlocul lui AB, O' simetricul lui O în raport cu C şi A' şi B' extremităţile diametrului perpendicular pe AB, al cercului circumscris (C).

Dreptele O'A' şi O'B' sunt evident simetricele bisectoarelor unghiului O în raport cu centrul C.

Invers laturile OA şi OB sunt simetricele bisectoarelor unghiului A'O'B', în raport cu C.

Paralela dusă din O la ipotenuza BC mai întâlneşte cercul (C) în punctul F. Tangenta în O la cercul (C) şi paralela OF fiind isogonale în raport cu laturile OA şi OB urmează că dreapta lui SIMSON, a punctului F în raport cu triunghiul OAB este paralelă cu diametrul OCO'. Rezultă că directoarea parabolei (π) înscrisă în triunghiul OAB şi având focarul în F coincide cu diametrul OCO'. Paralela (π) este deci tangentă şi diametrului A'C B' fiindcă tangentele la o parabolă duse dintr'un punct al directoarei, sunt perpendiculare.

Dreapta FO', fiind paralelă cu A'B' rezultă analog, că parabola (π') înscrisă în triunghiul O'A'B' şi având focarul în F este de asemeni tangentă diametrului AB. Dar parabolele (π) şi (π') coincid, fiindcă au acelaşi focar F şi două tangente comune — diametrii AB şi A' B'. — Aceasta demonstrează propoziţiunea enunţată.

Soluţie analitică. Fiind date şase drepte:

$$u_i x + v_i y + w_i t = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

condiţiunea necesară şi suficientă ca aceste drepte să fie tangente unei conice este ca să poată fi determinaţi coeficienţii A, A', A'', B, B', B'' — nu toţi nuli — astfel ca relaţiunea:

$$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0$$

să fie verificată, dacă înlocuim pa u, v, w respectiv prin u_i, v_i, w_i.

Cu alte cuvinte trebue să avem:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u_i^2 & v_i^2 & w_i^2 & v_i w_i & w_i u_i & u_i v_i \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

In cazul problemei noastre luăm ca axe laturile OA şi OB ale unghiului drept şi punem A $(a, 0)$, B $(0, b)$. Cele şease drepte tangente la aceeaşi conică sunt: axele $x = 0$, $y = 0$, dreapta dela infinit a planului $t = 0$, ipotenuza AB, sau:

$$(AB) \quad bx + ay - abt = 0$$

şi simetricele bisectoarelor, sau:

$$x + y - (a + b)\, t = 0 \quad , \quad x - y - (a - b)\, t = 0.$$

In asemenea condiţiuni relaţiunea (1) devine:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2 & a^2 b^2 & -a^2 b & -a b^2 & ab \\ 1 & 1 & (a+b)^2 & -(a+b) & -(a+b) & 1 \\ 1 & 1 & (a-b)^2 & (a-b) & -(a-b) & -1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta \equiv \begin{vmatrix} -a^2 b & -ab^2 & ab \\ -(a+b) & -(a+b) & 1 \\ a-b & -(a-b) & -1 \end{vmatrix} \quad \therefore \Delta = 0$$

ceeace demonstrează propoziţiunea enunţată.

Ecuaţiunea conicei, tangentă la cele şease drepte se obţine evident, înlocuind elementele uneia oricare din liniile determinantului Δ respectiv prin u^2, v^2, w^2, vw, wu, uv.

Făcând această operaţiune, în cazul problemei noastre, se obţine că parabola (π) are ecuaţiunea:

$$(\pi) \qquad (a^2 - b^2)\, uv - buw + avw = 0.$$

In particular, focarul parabolei (π) se găseşte determinând pe λ astfel ca isotropa:

$$x + iy + \lambda = 0$$

să fie tangentă lui (π), deci:

$$(a^2 - b^2)\, i - b\lambda + a\lambda i = 0.$$

Ecuațiunea isotropei tangente parabolei (π) devine:

$$\left[x-\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right]+i\left[y+\frac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right]=0.$$

Focarul parabolei (π) este prin urmare punctul F de coordonate

$$\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2} \quad \text{și} \quad -\frac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^3}$$

adică intersecția cercului:

$$x^2+y^2-ax-by=0$$

circumscris triunghiului AOB cu paralela

$$bx-ay=0$$

dusă prin O la ipotenuza AB.

Regăsim pe această cale, pentru parabola (π) același focar și deci și aceeași directoare ca în soluțiunea precedentă.

Generalizare. Problema aceasta poate fi generalizată în mai multe moduri.

Iată o generalizare ce mi-a fost indicată de d-l Ing. D. STOICA. Se consideră un triunghiu ABC și se notează cu H și A_1, B_1, C_1, respectiv ortocentrul și picioarele înălțimilor. Fie deasemeni A', B', C' mijloacele laturilor, iar D, E, F respectiv mijloacele segmentelor AH, BH, CH.

Laturile AB *și* AC, *înălțimile* AB_1 *și* CC_1 *și dreptele* B'E *și* C'F *sunt șease tangente ale unei aceeași parabole* (π).

Piciorul A_1 al înălțimei vârfului A este evident punctul lui MIQUEL al patrulaterului determinat de laturile AB, AC și de înălțimile BB_1 și CC_1 Triunghiurile $B'B_1E$ și $C'C_1F$ fiind înscrise în cercul lui EULER ce trece prin A_1 rezultă că proiecțiunile acestui din urmă punct pe laturile celor două triunghiuri sunt colineare. *Triunghiurile* $B'B_1E$ *și* $C'C_1F$ *sunt deci circumscrise la aceeași parabolă* (π) *având focarul în* A_1.

In particular, când $A = 45^0$ punctele B_1 și C_1 sunt diametral opuse pe cercul lui EULER, dreptele B'E și C'F sunt perpendiculare, iar laturile C_1C' și C_1F sunt simetricele bisectoarelor unghiului $B'B_1E$ în raport cu centrul cercului EULER. Problema noastră revine la acest caz.

Aceeași problemă poate fi generalizată și în modul următor.

Laturile unui triunghiu și simetricele bisectoarelor unui unghiu în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului, sunt cinci tangente ale unei aceleiași parabole.

Fie M și N extremitățile diametrului perpendicular pe latura BC, iar A'' punctul diametral opus vârfului A pe cercul circumscris.

Triunghiurile ABC *și* A'' MN *sunt circumscrise la aceeași parabolă* (π). Pentru aceasta este necesar și suficient ca dreptele lui SIMSON în raport cu cele două triunghiuri ale unui punct arbitrar de pe cercul circumscris, să fie

paralele. Această din urmă condiţiune este evident împlinită de punctul A, fiindcă dreapta lui SIMSON a vârfului A în raport cu triunghiul ABC este înălţimea AA_1 iar aceea în în raport cu triunghiul A″ MN coincide cu diametrul MN. Problema noastră corespunde cazului 1 când triunghiul ABC este dreptunghic în A.

S'au primit soluţii geometrice dela d-nii: I. A. BARBU, GHEORGHE A. GRIGORE (studenţi ingineri) şi MIRCEA D. POPA şi o soluţie analitică del d-l MIHAI R. CONSTANTINESCU (Ploeşti) şi M. V. SOARE.

S'au mai primit soluţii dela d-nii: E. E. MARINESCU (cu o generalizare), C. S. TĂNĂSESCU şi CEZAR N. I. BOERESCU.

(Ş. G.).

PROBLEMA 6267. *Să se arate că dacă* $f(x, y)$ *este un polinom omogen, atunci*

$$E = f'_x \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix} - f'_y \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f_{x^2} & f''_{xy} \end{vmatrix}$$

se divide prin $f(x, y)$. *Să se determine câtul.*

I. I. STAMATE.

Soluţie dată de d-nii: MIRCEA D. POPA (Student Politehnica Bucureşti); C. CORDEANU, PAUL CONSTANTINESCU, I. T. MUNTEANU, V. GH. DIACONU (Colegiul militar „N. Filipescu").

După formula lui EULER, avem:

$xf'_x+yf'_y=mf$; $xf''_{x^2}+yf''_{xy}=(m-1)f'_x$; $xf''_{xy}+yf''_{y^2}=(m-1)f'_y$ (1)

m fiind gradul polinomului. Acum observăm că expresia dată se mai poate scrie

$$E = \frac{f'_x}{xy} \begin{vmatrix} xf'_x & yf'_y \\ xf_{xy} & yf''_{y^2} \end{vmatrix} \frac{f'_y}{xy} \begin{vmatrix} xf'_x & yf'_y \\ xf''_{x^2} & yf''_{xy} \end{vmatrix}.$$

Ţinând seamă de relaţiile (1), şi adunând coloana a 2-a la 1-a, se obţine

$$E = \frac{f'_x}{x} \begin{vmatrix} mf & f'_y \\ (m-1)f'_y & f_{y^2} \end{vmatrix} \frac{f'_y}{x} \begin{vmatrix} mf & f'_y \\ (m-1)f'_x & f''_{xy} \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând şi reducând termenii asemeni găsim

$$E = \frac{m}{x} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f_{xy} & f'_{y^2} \end{vmatrix} f(xy)$$

formulă care arată că E se divide prin $f(xy)$ şi în care se vede şi expresia câtului.

Au mai trimis soluţii bune d-nii: I. A. BARBU, STELIAN C. PANTAZOPOL şi VASILE I. ŞANDRU (Studenţi-Ingineri, Bucureşti).

EXERCIŢII

16. *Să se găsească numărul de* n *cifre, divizibil prin 5; aşa în cât câtul împărţirei să fie format de ultimele* n — 1 *cifre ale numărului cerut.*

† T. STOICESCU.

R. Dacă x este un număr de o cifră şi y un număr de $n-1$ cifre, atunci conform enunţului

$$10^n x + y = 5y \quad \therefore \quad y = 5^2 \cdot 10^{n-2} x.$$

Deoarece $y < 10^n$ urmează că x nu poate avea de cât valorile 1, 2 sau 3. Rezultă că răspund enunţului numerele

$$N = 10^n x + 5^2 \cdot 10^{n-2} x = x \cdot 125 \cdot 10^{n-2} \quad \text{cu} \quad x = 1, 2 \text{ sau } 3.$$

PROBLEME PROPUSE

5129 [1]. Să se găsească valorile întregi pozitive ale lui x şi y pentru care numerele $11x+7y$ şi $8x+3y$ sunt simultan divizibile prin 23.

G-L GH. BUICLIU.

6298 [2]. Fie O centrul unui cerc dat şi A un punct fix în planul lui. Pe cercul O se consideră un punct C variabil. Cu centrul în C se construieşte un cerc cu raza constantă, şi fie M intersecţia lui AC cu polara lui A în raport cu cercul de centru C. Să se arate că locul lui M este podara unei conice (Γ) în raport cu un punct B din plan. Să se determine geometric conica (Γ) şi punctul B. Discuţie. Să se considere în special cazul când cercul dat se reduce la o dreaptă.

GH. TH. GHEORGHIU.

6330. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică de câte trei cifre fiecare, ştiind că toate cifrele cu care se scriu acele numere, sunt diferite între ele.

G-L GH. BUICLIU.

6331. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x+y+z+u=11 \ , \quad x+y+zu=10 \ ; \quad x+yzu=17 \ , \quad xyzu=30.$$

ANTON I. VARGĂ.

6332. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţie

$$e^{kx} = h\,(x-a)^m$$

a, h şi k fiind trei parametri reali, iar m un număr întreg şi pozitiv.

RADU BĂDESCU.

1) Problema 5129, propusă la pag. 503, Vol. XLIV, având enunţul greşit se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

2) Problema 6298 propusă la pag. 136 din acest volum fiind identică cu problema 5312, se înlocueşte cu prezenta.

6333. Pe diametrul AB al unui cerc cu centrul în O se ia un punct C şi punctul B_1 simetricul lui B faţă de C. Din punctul A ca centru se descrie cercul de rază AB_1. Cercurile O şi A se taie în D_1 D_2; bisectoarele unghiurilor D_1AB şi D_2AB taie cercul O în E_1 şi E_2. Perpendicularele în A pe bisectoarele AE_1 şi AE_2 taie cercul O în F_1 şi F_2. Să se arate că: 1°. Figura $E_1E_2F_1F_2$ este un dreptunghiu care trece prin punctul C. 2°. Avem egalităţile $\overline{BD_1} = \overline{F_1F_2}$ şi $\overline{AD_1} = \overline{E_1F_2}$. 3°. Punctele I, K, L, M fiind intersecţiile perechilor de drepte (AD_1, BE_1), (AD_2, BE_2) (AD_1, BF_1), (AD_2, BF_2), segmentele $\overline{IK}$ şi $\overline{LM}$ sunt egale şi tangente cercului A.

C. IONESCU-ŢIU.

6334. Se dă triunghiul ABC şi C_a, C_b, C_c trei cercuri ortogonale două câte două, având centrele respectiv în A, B, C. Fie A', A'' punctele comune cercurilor C_b, C_c — B', B'', C', C'' puncte analoage.

1°. Triunghiurile A' B' C', A'' B'' C'' sunt analoage, având ca axă de omologie axul radical al cercurilor lor circumscrise.

2°. Triunghiurile A' B' C', ABC sunt omologice, având un centru de ortologie centrul cercului A' B' C'.

Proprietate analoagă pentru triunghiurile A'' B'' C'', ABC.

CONST. IONESCU-BUJOR.

6335. Fie A', B', C' trei puncte pe muchiile SA, SB, SC ale unui tetraedru SABC. Notez intersecţiile:

$$P \equiv (BC', CB'), \quad Q \equiv (CA', AC'), \quad R \equiv (AB', BA'),$$

$$S_a \equiv (SP, BC), \quad S_b \equiv (SQ, CA), \quad S_c \equiv (SR, AB).$$

1°. Dreptele AS_a, BS_b, CS_c concură în M.

2°. Dreptele SM, AP, BQ, CR concură în N.

3°. $$\frac{\overline{NS}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

6336. In orice triunghiu avem:

$$\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} < \frac{1}{2}\left[\sin B \sin C \cos\frac{A}{2} + \sin A \sin B \cos\frac{C}{2} + \sin A \sin C \cos\frac{B}{2}\right] < 2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}.$$

STELIAN C. PANTAZOPOL.

6337. Fie $p\,(z)$ funcţia eliptică a lui WEIERSTRASS, de perioade (ω_1, ω_2). Notăm cu $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Să se demonstreze că expresiile

$$A_i = p\left(z+\frac{\omega_i}{2}\right)\left[p\,(z)-p\left(\frac{\omega_i}{2}\right)\right]-p\,(z)\,p\left(\frac{\omega_i}{2}\right)\ ;\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

sunt independente de z şi să se formeze, în raport cu invarianţii g_2 şi g_3, ecuaţia de gradul III care admite pe A_i ca rădăcini.

B. BARBĂLAT.

6338. Se consideră două cercuri tangente O_1 şi O_2. Dacă O este punctul de contact al lor, se înseamnă cu A şi B punctele diametral opuse lui O în cele două cercuri. Fie ω un cerc variabil însă tangent în O dreptei O_1O_2. Intersecţiile cercurilor O_1, O_2, ω sunt C şi D.

1°. Punctele A, B, C, D sunt aşezate pe un acelaşi cerc.

2°. Dreapta CD trece printr'un punct fix,

3°. Locul intersecţiei tangentelor în C şi D la cercurile fixe.

4°. Locul intersecţiei dreptelor AC, BD.

5°. Locul polului dreptei CD faţă de cercul ω.

6°. Locul mijlocului lui CD.

7°. Fie ω' cercul tangent cercurilor O_1, O_2, ω. Locul lui ω'.

VIRGIL CLAUDIAN.

6339. Se consideră o curbă strâmbă (C) a cărei rază de curbură este un polinom întreg cu rădăcini reale simple de arcul s. Pe binormala în punctul M al acestei curbe se ia un punct M_1 aşa încât $\overline{MM_1} = T$ (T raza de torsiune a curbei în M).

Să se găsească expresia razei de torsiune în funcţie de s când M_1 descrie o linie asimptotică a suprafeţei riglate strâmbe, generată de binormala curbei (C) şi să se arate că liniile asimptotice ale suprafeţei, diferite de generatoarele rectilinii, sunt date de o ecuaţie BERNOUILLI, a cărei integrală formală se cere.

EUG. CRĂCIUNESCU.

ERATĂ 1°. In ecuaţia a doua şi a treia din enunţul problemei 6304 dela pag. 167 din acest volum se înlocuesc $p_2 x$ şi $p_3 x$ respectiv prin $p_2 y$ şi $p_3 z$.

2°. Se rectifică paginaţia numărului precedent înlocuindu-se 18 prin 224, 19 prin 225, 22 prin 228, 23 prin 229 şi 26 prin 232.

3°. La pag. 225 punctul 3 la a doua ecuaţie în ρ se înlocueşte $2 + \sin^2\theta$ prin $1 + 2\sin^2\theta$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Ing. *Arvaniti Al.* (P); *Boldescu P.* (N); *Bucur Al. N.* (6282, 93); *Corduneanu C.* (E); *Dănescu Al.* (6287, 88, 312); *Dăscălescu I. Mihai-Vlad* (6293, 315); *Diaconu C. C.* (6254, 57, 62, 65); *Georgescu Răducanu* (P); *Gheorghiţă I. Şt.* (6286, 323); *Leon A. M.* (5839, 6021, 173, 201, 22, 65, 96); *Marinescu E. Em.* (6295, P); *Moraite G. Al.* (5957); *Popa D. Mircea* (1753, 5145, 92, 322, 43, 792, 6030, 33, 228, 314); *Şandru I. Vasile* (6223, 65, 67, 96); *Soare V. M.* (P); *Ştefănescu Sofronie* (5649, E); *Teodorescu P. P.* (4772, 5893, 912, 6057, 134, 60, 290, 94, 97, 310, 12, E, P); *Vasiliu E. Dan* (5649, 982, 6174, 315); *Vrânceanu Gh. Gh.* (6287).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cincisute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ"

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 84.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 7.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ"

Vol. I—X, XII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, şi IX sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 20.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 60.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 16.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 20.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 60.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.*. Lei 40.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 20.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 20.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 25.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI XIII de Geometrie în spaţiu ; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 20.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 20.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . Lei 25.000

Pentru volumele din Colecţia şi a Bibliotecilor din *Gazeta Matematică* trimise în provincie se va plăti contra ramburs şi taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul este de 84.000 lei.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII" al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 27.000 lei.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 40.560.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1947

SUMARUL

1. Două relaţii între distanţele mutuale ale unor puncte . . . . . *Andrei Dobrescu.*
2. Aplicaţii ale noţiunilor de geometria maselor, la demonstrarea câtorva teoreme. *D. V. Ionescu.*
3. Raportul comisiunii pentru premiul „Ing. Alexandru Roşu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 17—18.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 342.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2599, 5355, 5433, 5612, 6100.
10. Exerciţii: 17—21.
11. Probleme propuse: 6340—6349.

ROMANIA

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Concursul „Gazetei Matematice" începe Joi 17 Aprilie ora 8^{30} în localul Politehnicei, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Masa comună cu concurenţii are loc Sâmbătă 19 Aprilie ora 19^{30} la Şcoala Normală de Menaj „Gh. şi Maria Filipescu", Calea Victoriei 149.

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Luni 28 Aprilie ora 18: Rezultatul Concursului şi Adunarea materiei pentru Nr. 9.

Luni 5 Mai ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 9.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6270, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 3000, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *«Gazeta Matematică»* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 1.000

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . „ 20.000

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 10.000

DOUĂ RELAȚII INTRE DISTANȚELE MUTUALE ALE UNOR PUNCTE

Fie punctele A, B, C *și* M, N, P *în plan. Relația*

$$\begin{vmatrix} \overline{AM}^2 & \overline{BM}^2 & \overline{CM}^2 \\ \overline{AN}^2 & \overline{BN}^2 & \overline{CN}^2 \\ \overline{AP}^2 & \overline{BP}^2 & \overline{CP}^2 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă condițiunea necesară și suficientă ca cercurile ABC *și* MNP *să fie ortogonale, iar relația*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{AM}^2 & \overline{BM}^2 & \overline{CM}^2 \\ \overline{AN}^2 & \overline{BN}^2 & \overline{CN}^2 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă condițiunea necesară și suficientă ca dreapta MN *să treacă prin centrul cercului* ABC.

Aceste două relații sunt consecințe ale unor chestiuni în legătură cu coordonatele tripolare, pe care le reamintim.

Ecuația

$$\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 = k, \qquad (1)$$

unde p, q, r sunt coordonate tripolare (distanțele unui punct la vârfurile triunghiului fundamental ABC), iar α, β, γ, k sunt coeficienți, este ecuația tripolară a unui cerc sau a unei drepte, după cum $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ sau $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

In cazul când $k = 0$, cercul (1) este transformatul său însuși în inversiunea (O, R^2) — O fiind centrul, iar R raza cercului ABC — și deci ortogonal cu cercul ABC, deoarece două puncte inverse față de cercul ABC au coordonatele proporționale și deci, coordonatele unuia verificând ecuația (1), și coordonatele celuilalt o verifică.

De asemenea, dacă $\alpha + \beta + \gamma = k = 0$, dreapta (1) trece prin centrul cercului ABC, fiind transformata sa însăși în inversiunea (O, R^2).

Ecuația

$$\begin{vmatrix} p^2 & q^2 & r^2 & 1 \\ p_1^2 & q_1^2 & r_1^2 & 1 \\ p_2^2 & q_2^2 & r_2^2 & 1 \\ p_3^2 & q_3^2 & r_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

reprezintă cercul determinat de punctele $M_i(p_i, q_i, r_i)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Presupunând cercul $M_1 M_2 M_3$ ortogonal cu cercul ABC, însemnează că termenul liber al ecuației (2) — adusă la forma (1) — este nul, adică

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & q_1^2 & r_1^2 \\ p_2^2 & q_2^2 & r_2^2 \\ p_3^2 & q_3^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Insă aceasta nu este decât prima relație de demonstrat, cu alte notații.

In mod asemănător, ecuația

$$\begin{vmatrix} p^2 & q^2 & r^2 & 1 \\ p_1^2 & q_1^2 & r_1^2 & 1 \\ p_2^2 & q_2^2 & r_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

reprezintă dreapta determinată de punctele M_1 (p_1, q_1, r_1) și M_2 (p_2, q_2, r_2).

Presupunând că această dreaptă trece prin centrul cercului ABC, însemnează că avem:

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & q_1^2 & r_1^2 \\ p_2^2 & q_2^2 & r_2^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

care nu este altceva decât a doua relație de demonstrat.

Intocmai ca mai sus se poate dovedi proprietatea:

Fie punctele A, B, C, D și M, N, P, Q *în spațiu. Relația*

$$\begin{vmatrix} \overline{AM}^2 & \overline{BM}^2 & \overline{CM}^2 & \overline{DM} \\ \overline{AN}^2 & \overline{BN}^2 & \overline{CN}^2 & \overline{DN}^2 \\ \overline{AP}^2 & \overline{BP}^2 & \overline{CP}^2 & \overline{DP}^2 \\ \overline{AQ}^2 & \overline{BQ}^2 & \overline{CQ}^2 & \overline{DQ}^2 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă că sferele ABCD *și* MNPQ *sunt ortogonale, iar relația*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \overline{AM}^2 & \overline{BM}^2 & \overline{CM}^2 & \overline{DM}^2 \\ \overline{AN}^2 & \overline{BN}^2 & \overline{CN}^2 & \overline{DN}^2 \\ \overline{AP}^2 & \overline{BP}^2 & \overline{CP}^2 & \overline{DP}^2 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă că planul MNP *trece prin centrul sferei* ABCD.

ANDREI DOBRESCU.

APLICAȚII ALE NOȚIUNILOR DE GEOMETRIA MASELOR, LA DEMONSTRAREA CÂTORVA TEOREME

I

1. Se știe că dacă o transversală taie laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu în punctele A_1, B_1, C și se notează cu A_1', B_1', C_1' conjugatele armonice ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu BC, CA și AB, dreptele AA_1', BB_1', CC_1' sunt concurente într'un punct I, care poartă numele de *polul* transversalei față de triunghiu.

Deși teorema este foarte cunoscută, vom da o demonstrație simplă bazată pe noțiuni de geometria maselor și care va fi punctul de plecare al acestui articol.

Să notăm

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \beta, \qquad \frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}} = \gamma.$$

Cu ajutorul teoremei lui MENELAUS, deducem că

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

Pentru conjugatele armonice ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu BC, CA și AB vom avea relațiunile

$$\frac{\overline{C_1'A}}{\overline{C_1'B}} = -\frac{\beta}{1}, \quad \frac{\overline{B_1'A}}{\overline{B_1'C}} = -\frac{\gamma}{1}, \quad \frac{\overline{A_1'B}}{\overline{A_1'C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

care arată că C_1' este baricentrul maselor 1, β plasate în A și B; B_1' este baricentrul maselor 1, γ plasată în A și C iar A_1' este baricentrul maselor β, γ plasate în B și C.

Din această observare, rezultă că *dreptele* AA_1', BB_1', CC_1' *sunt concurente în baricentrul maselor* 1, β, γ *plasate în punctele* A, B, C.

2. Extensiunea la spațiu a acestei teoreme este următoarea;

Un plan taie muchiile SA, SB, SC, BC, CA, AB *ale unui tetraedru în punctele* A', B', C', A'', B'', C''. *Se notează cu* A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1'' *conjugatele armonice ale acestor puncte în raport cu muchiile respective și cu* (SA, A_1'') *planul determinat de muchea* SA *și punctul* A_1''.

Planele (SA, A_1''), (SB, B_1''), (SC, C_1''), (BC, A_1'), (CA, B_1') *şi* (AB, C_1') *au un punct comun*[1], *numit polul planului faţă de tetraedru.*

Iată o demonstraţie a acestei teoreme analoagă cu cea precedentă. Să notăm

$$\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} = \alpha, \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} = \beta, \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} = \gamma.$$

Teorema lui MENELAUS, aplicată la triunghiurile SBC, SCA, SAB tăiate de transversalele B' C' A'', C' A' B'', A' B' C'', ne dau

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} = \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} = \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pentru conjugatele armonice ale punctelor A', B', C', A'', B'', C'' în raport cu muchiile respective, vom avea

$$\frac{\overline{A_1'S}}{\overline{A'A}} = -\frac{\alpha}{1}, \frac{\overline{B_1'S}}{\overline{B_1'B}} = -\frac{\beta}{1}, \frac{\overline{C_1'S}}{\overline{C_1'C}} = -\frac{\gamma}{1}$$

şi

$$\frac{\overline{A_1''B}}{\overline{A_1''C}} = -\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\overline{B_1''C}}{\overline{B_1''A}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\overline{C_1''A}}{\overline{C_1''B}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Aceste relaţiuni arată că A_1' este baricentrul maselor 1, α plasate în S şi A; ...; A'' este baricentrul maselor β, γ plasate în B şi C; ...

Rezultă atunci imediat că planul (SA, A_1'') trece prin baricentrul maselor 1, α, β, γ plasate în punctele S, A, B, C şi prin urmare toate planele (SA, A_1''), (SB, B_1''), (SC, C_1''), (BC, A_1'), (CA, B_1'), (AB, C_1') au un punct comun care este baricentrul maselor 1, α, β, γ plasate în punctele S, A, B, C.

3. Demonstraţia precedentă mai arată că *dreptele* $A_1'A_1''$, $B_1'B''$, $C_1'C_1''$ *sunt concurente.*

Intr'adevăr dreapta $A_1'A_1''$ uneşte baricentrul maselor 1, α plasate în S şi A cu baricentrul maselor β, γ plasate în B şi C. Dreptele $A_1'A_1''$, $B_1'B_1''$, $C_1'C_1''$ trec deci prin baricentrul maselor 1, α, β, γ plasate în S, A, B şi C.

---

1) B. NIEWENGLOSWSKI, *Cours de géomètrie analytique*. Tome III, 1896, p. 82, ex. 31.

4. Să considerăm un plan P care taie muchiile SA, SB, SC, BC, CA, AB ale unui tetraedru în punctele A', B', C', A'', B'', C''. Să notăm cu I_a polul transversalei B' C' A'' față de triunghiul S B C; cu I_b polul transversalei C' A' B'' față de triunghiul SCA; cu I_c polul transversalei A' B' C'' față de triunghiul SAB și în fine cu I polul transversalei A'' B'' C'' față de triunghiul ABC.

Dreptele AI_a, BI_b, CI_c, SI *sunt concurente în polul planului* P *față de tetraedrul* SABC.

Într'adevăr I_a este baricentrul maselor 1, β, γ plasate în punctele S, B, C și deci AI_a trece prin baricentrul maselor 1, α, β, γ plasate în S, A, B și C.

Dreptele AI_a, BI_b, CI_c, SI sunt deci concurente în baricentrul maselor 1, α, β, γ plasate în S, A, B și C.

5. Când planul A' B' C' este la infinit, teoremele enunțate la 2, 3, 4, devin teoremele cunoscute:

Într'un tetraedru a) Planele care trec prin fiecare muchie și mijlocul muchiei opuse au un punct comun.

b) Dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse și acelea care unesc vârfurile cu punctele de întâlnire ale medianelor fețelor opuse sunt concurente.

6. Metoda precedentă se mai poate aplica și în alte probleme.

De exemplu, *să considerăm un tetraedru* SABC *și pe muchiile* SA, SB, SC *să luăm punctele arbitrare* A', B', C'. *Planele* A'BC, B'CA, C'AB *au un punct comun* Q, *iar planele* AB'C', BC'A', CA'B' *au un alt punct comun* Q'. *Să demonstrăm că punctele* S, Q, Q' *sunt colineare* [1] *și că dacă se notează cu* I *și* I' *intersecțiile dreptei* SQQ' *cu planele* ABC, A' B' C', *diviziunile* (I, Q', Q, S), (I', Q, Q', S) *sunt armonice.*

Într'adevăr să notăm ca mai sus

$$\frac{\overline{A'S}}{\overline{A'A}} = \alpha, \frac{\overline{B'S}}{\overline{B'B}} = \beta, \frac{\overline{C'S}}{\overline{C'C}} = \gamma.$$

Interpretând aceste formule ca mai sus, A' este baricentrul maselor — 1, β plasate în S și A; B' este baricentrul maselor — 1, β plasate în S și B; C' este baricentrul maselor — 1, γ plasate în S și C.

---

1) D. V. Ionescu, *Aplicațiuni ale calculului vectorial.* G. M., Vol. XLVI, p. 230.

Rezultă că punctul Q intersecția planelor A'BC, B'CA, C'AB este baricentrul maselor — 1, α, β, γ plasate în S, A, B, C.

Dacă se notează cu I baricentrul maselor α, β, γ plasate în A, B, C punctul Q se găsește pe dreapta SI și vom avea

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{QI}} = \alpha + \beta + \gamma,$$

de unde rezultă că

$$\vec{SQ} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma - 1} \vec{SI}. \qquad (1)$$

La fel se vede că planele AB'C', BC'A', CA'B' au în comun punctul Q', baricentrul maselor — 2, α, β, γ plasate în S, A, B și C. Deducem că punctul Q' se găsește pe SI și avem

$$\vec{SQ'} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma - 2} \vec{SI}. \qquad (2)$$

O primă concluzie este că punctele S, Q, Q' sunt colineare.

Pe de altă parte se observă că I' este baricentrul maselor — 3, α, β, γ plasate în S, A, B, C astfel că

$$\vec{SI'} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma - 3} \vec{SI}. \qquad (3)$$

Cu ajutorul formulelor (1), (2), (3) se stabilește ușor că

$$\frac{\overline{QI}}{\overline{QQ'}} = -\frac{\overline{SI}}{\overline{SQ'}} = -\frac{\alpha + \beta + \gamma - 2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

și că

$$\frac{\overline{Q'I'}}{\overline{QQ'}} = -\frac{\overline{SI'}}{\overline{SQ'}} = -\frac{\alpha + \beta + \gamma - 1}{\alpha + \beta + \gamma - 3}$$

ceace dovedește că diviziunile (I, Q', Q, S), (I', Q, Q', S) sunt armonice.

II

Toate teoremele precedente se pot extinde la spații lineare cu mai multe dimensiuni.

7. Să considerăm punctele $A_0, A_1, \ldots A_n$ care definesc un spațiu linear cu n dimensiuni. Un hiperplan P cu n dimensiuni taie muchiile $A_i A_j$ în punctele A_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$. Se notează

cu B'_{ij} conjugatul armonic al punctului A'_{ij} în raport cu muchea $A_i A_j$. *Să demonstrăm că toate hiperplanele* P_{ij} *cu* n *dimensiuni care trec prin punctul* B'_{ij} *şi toate punctele* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *cu excepţia punctelor* A_i *şi* A_j *au un punct comun* I, *pe care îl vom numi polul hiperplanului* P *în raport cu poliedrul* $A_0 A_1 \ldots A_n$.

Dacă notăm

$$\frac{\overline{A'_{0k} A_0}}{\overline{A'_{0k} A_k}} = \alpha_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

vom avea

$$\frac{\overline{B'_{0k} A_0}}{\overline{B'_{0k} A_k}} = -\frac{\alpha_k}{1},$$

de unde rezultă că punctul B'_{0k} este baricentrul maselor 1, α_k plasate în punctele A_0, A_k.

Deducem că hiperplanul P_{0k} trece prin baricentrul I al maselor 1, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ plasate în punctele $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Să observăm acum că intersecţia hiperplanului P cu planul $A_0 A_i A_j$ este o dreaptă, care taie laturile triunghiului $A_0 A_i A_j$ în punctele A'_{0i}, A'_{0j}, A'_{ij}. Aplicând teorema lui MENELAUS deducem că

$$\frac{\overline{A'_{ij} A_i}}{\overline{A'_{ij} A_j}} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$$

şi prin urmare

$$\frac{\overline{B'_{ij} A_i}}{\overline{B'_{ij} A_j}} = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$$

Punctul B'_{ij} este deci baricentrul maselor α_i, α_j plasate în A_i şi A_j şi planul P_{ij} va trece şi el prin baricentrul I al maselor 1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ plasate în punctele $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Teorema este astfel demonstrată.

8. Să considerăm intersecţia hiperplanului P cu spaţiul linear definit de punctele $A_0, A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_l}$ unde $k_1, k_2, \ldots k_l$ sunt numere oarecari, diferite între ele, alese din şirul 1, 2, ..., n. Această intersecţie va fi un hiperplan cu i dimensiuni care va avea un pol faţă de poliedrul $A_0 A_{k_1} \ldots, A_{k_l}$ pe care îl vom nota cu $I_{k_1 k_2 \ldots k_l}$.

Din cele ce s'a văzut mai sus, punctul $I_{k_1 k_2 \ldots k_l}$ este baricentrul maselor 1, $\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_l}$. plasate în punctele $A_0, A_{k_1}, \ldots A_{k_l}$.

Să considerăm acum şi intersecţia hiperplanului P cu spaţiul linear definit de punctele A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_l}, $A_{k_{l+1}}$. Aceasta va fi un hiperplan cu l dimensiuni al cărui pol faţă de poliedrul $A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_{l+1}}$, il vom nota cu $I_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$. Să dovedim că punctul $I_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$ este baricentrul maselor α_1, α_2, ..., α_{l+1} plasate în punctele A_k, A_{k_2}, ..., $A_{k_{l+1}}$.

S'a văzut la Nr. 7, că dacă se notează

$$\frac{\overline{A'_{k_1 k_j} A_{k_1}}}{\overline{A'_{k_1 k_j} A_{k_j}}} = \beta_j,$$

atunci $I_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$ este baricentrul maselor

$$1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{l+1}$$

plasate în punctele A_{k_1}, A_{k_2}, ... $A_{k_{l+1}}$.

Dar dacă se aplică teorema lui MENELAUS la triunghiul $A_0 A_{k_1} A_{k_j}$ tăiat de transversala $A'_{0k_1} A'_{0k_j} A'_{k_1 k_j}$ deducem că

$$\beta_j = \frac{\alpha_{k_j}}{\alpha_{k_1}}$$

astfel că masele plasate în punctele A_{k_1}, $A_{k_2} \dots A_{k_{l+1}}$ sunt

$$1, \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}}, \dots, \frac{\alpha_{k_{l+1}}}{\alpha_{k_1}}.$$

Baricentrul însă nu se schimbă dacă înmulţim toate masele cu α_{k_1}. Astfel s'a demonstrat că $I_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$ este baricentrul maselor α_{k_1}, α_{k_2}, ..., $\alpha_{k_{l+1}}$ plasate în punctele A_{k_1}, A_{k_2}, ..., $A_{k_{l+1}}$.

9. Cu această precizare se poate enunţa o teoremă analoagă cu cea dela Nr. 3.

Hiperplanul P taie spaţiul linear format de punctele A_{k_1}, A_{k_2}, ..., $A_{k_{l+1}}$ după un hiperplan cu l dimensiuni al cărui pol faţă de poliedrul $A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_{l+1}}$ este $I_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$.

Hiperplanul P, mai taie spaţiul linear format de celelalte puncte rămase din $A_0, A_1, \dots A_n$ când se dau la o parte punctele $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots A_{k_{l+1}}$, după un hiperplan cu $n - l - 1$ dimensiuni al cărui pol faţă de poliedrul format de aceste puncte este $I'_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$.

Dreptele $I_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}} I'_{k_1 k_2 \dots k_{l+1}}$ *sunt concurente, când indicii* $k_1, k_2, \dots k_{l+1}$ *variază în toate modurile posibile.*

Intr'adevăr, din cele explicate la Nr. 8, dreapta $I_{k_1 k_2 \ldots k_{i+1}}$ $I'_{k_1 k_2 \ldots k_{i+1}}$ trece prin baricentrul maselor 1, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, plasate în punctele $A_0, A_1, \ldots A_n$.

10. Putem da acum şi o teoremă analoagă cu cea dela Nr. 4.

Hiperplanele $P_{k_1 k_2 \ldots k_{i+1}}$ *care trec prin punctul* $I_{k_1 k_2 \ldots k_{i+1}}$ *şi prin punctele* $A_0, A_1, \ldots A_n$ *din care s'a dat la o parte punctele* $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_{i+1}}$ *au un punct comun, când indicii* $k_1, k_2, \ldots k_{i+1}$ *variază în toate modurile posibile.*

Intr'adevăr din cele ce s'a explicat la Nr. 8, hiperplanul $P_{k_1 k_2 \ldots k_{i+1}}$ trece prin baricentrul maselor 1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, plasate în punctele $A_0, A_1, \ldots A_n$.

11. Vom termina acest articol, dând şi o extensiune teoremei dela Nr. 6.

Să considerăm punctele $S, A_1, \ldots, A_n$, vectorii $\vec{SA}_1, \vec{SA}_2, \ldots \vec{SA}_n$ definind un spaţiu cu n dimensiuni.

Pe muchiile $SA_1, \ldots, SA_n$ să luăm punctele $A'_1, \ldots A'_n$ şi să considerăm hiperplanul $P_{k_1 k_2 \ldots k_i}$ care trece prin punctele $A'_{k_1}, A'_{k_2} \ldots, A'_{k_i}$ şi prin toate punctele $A_1, A_2, \ldots A_n$ din care s'a dat la o parte punctele $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_i}$. Indicii $k_1, k_2, \ldots, k_i$ sunt numere diferite între ele alese din şirul $1, 2, \ldots, n$.

Când indicii $k_1, k_2, \ldots, k_i$ variază, planele $P_{k_1 k_2 \ldots k_i}$ au un punct comun Q_i. *Când* i *variază avem* n *puncte* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *care sunt colineare.*

Demonstraţia este imediată. Punând

$$\frac{\overline{A'_k S}}{\overline{A'_k A_k}} = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Se vede imediat că hiperplanul $P_{k_1 k_2 \ldots k_i}$ trece prin baricentrul maselor — 1, α_{k_1} plasate în S şi A_{k_1}, prin baricentrul maselor — 1, α_{k_2} plasate în S şi $A_{k_2}, \ldots$, prin baricentrul maselor — 1, α_{k_i} plasate în S şi A_{k_i} precum şi prin celelalte puncte $A_1, A_2, \ldots A_n$ din care s'a dat la o parte punctele $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_i}$.

Prin urmare hiperplanul $P_{k_1 k_2 \ldots k_i}$ trece prin baricentrul maselor — i, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ plasate în punctele $S, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Dacă se notează cu Q_0 baricentrul maselor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ plasate în punctele $A_1, A_2, \ldots A_n$, avem

$$\vec{SQ}_i = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - i} \vec{SQ}_0, \qquad (4)$$

ceeace dovedeşte că toate punctele Q_i sunt pe dreapta SQ_0.

12. Dacă se consideră patru puncte Q_i, Q_j, Q_k, Q_l din cele definite la Nr. 11, raportul lor anarmonic este egal cu raportul anarmonic al numerelor i, j, k, l, adică

$$(Q_i Q_j Q_k Q_l) = (i, j, k, l)$$

unul din numerele i, j, k, l putând fi chiar zero.

Intr'adevăr, dacă se aplică formula (4), se deduce că

$$\overrightarrow{Q_k Q_i} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)(i-k)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - i)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - k)} \overrightarrow{SQ_0}$$

şi prin urmare

$$\frac{\overrightarrow{Q_k Q_i}}{\overrightarrow{Q_k Q_j}} = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n - j}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n - i} \cdot \frac{i-k}{j-k}. \qquad (5)$$

Se deduce că

$$\frac{\overrightarrow{Q_k Q_i}}{\overrightarrow{Q_k Q_j}} : \frac{\overrightarrow{Q_l Q_i}}{\overrightarrow{Q_l Q_j}} = \frac{i-k}{j-k} : \frac{i-l}{j-l}$$

adică $$(Q_i, Q_j, Q_k, Q_l) = (i, j, k, l)$$

şi teorema este demonstrată.

Dacă se înlocueşte Q_l cu punctul S, atunci avem relaţia

$$(Q_i, Q_j, Q_k, S) = (i, j, k, \infty). \qquad (6)$$

Intr'adevăr dacă se ţine seamă de formula (5) şi de formula (4), avem

$$\frac{\overline{Q_k Q_i}}{\overline{Q_k Q_j}} : \frac{\overline{SQ_i}}{\overline{SQ_j}} = \frac{k-i}{k-j}$$

şi prin urmare formula (6) este demonstrată.

Când $n = 3$, regăsim în formula (6), ultimul rezultat al al chestiunei tratate la Nr. 6, adică: diviziunile (Q_0, Q_2, Q_1, S), (Q_3, Q_1, Q_2, S) sunt armonice.

Intr'adevăr avem

$$(Q, 2, 1, \infty) = \frac{1}{1-2} = -1$$

şi $$(3, 1, 2, \infty) = \frac{2-3}{2-1} = -1.$$

D. V. IONESCU
Profesor la Facultatea de Ştiinţe
a Universităţii Regele Ferdinand I din Cluj.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL „ING. ALEXANDRU ROȘU"

Subsemnații membri în comisiunea pentru decernarea premiului « ING. ALEXANDRU ROȘU », cercetând volumul LI al *Gazetei Matematice*, pentru alegerea celui mai harnic corespondent al *Gazetei*, elev de liceu, am constatat următoarele:

Criza prin care trece activitatea la *Gazeta Matematică* a elevilor de liceu, a atins un maxim în volumul încheiat.

Hărnicia elevilor de liceu pare că a poposit să privească strădania celor ce au umplut cele 50 de volume precedente.

Anul LI fiind an de sărbătoare pentru *Gazetă*, colaboratorii elevi de liceu s'au crezut în vacanță și par'că într'un consens unanim și-au micșorat activitatea.

Fie ca exemplele cuprinse în cele 23446 pagini încheiate să aducă tinerilor elevi de liceu, dorul de munca matematică, pentru care *Gazeta* face atâtea sacrificii. Căci o activitate deosebită numai din partea unui singur corespondent elev de liceu, nu poate constitui o mulțumire pentru *Gazeta Matematică* ce așteaptă dela corespondenții săi cu totul alte rezultate și aceasta cu atât mai mult cu cât corespondentul evidențiat, este același premiat de anul trecut, domnul CONSTANTINESCU R. MIHAI, elev în clasa a VIII-a la Liceul Petru și Pavel din Ploești.

Activitatea d-lui CONSTANTINESCU R. MIHAI se detașează categoric de activitatea anemică a celorlalți corespondenți.

Astfel d-l CONSTANTINESCU R. MIHAI a rezolvat în cursul anului un număr de 97 probleme anunțate pe copertele volumului LI.

In cuprinsul volumului LI, activitatea d-lui CONSTANTINESCU R. MIHAI este următoarea:

O problemă propusă (6265), două exerciții propuse (13 și 14) și 27 probleme rezolvate dintre care unele au soluțiile remarcate pentru frumusețea lor (5778, 5857, 5921, 6026, 6079, 6122), iar altele au soluțiile întovărășite de observațiuni și discuții interesante (5926, 6047, 6122, 5125).

Față de cele de mai sus considerăm că activitatea d-lui CONSTANTINESCU R. MIHAI îndeplinește cu prisosință condițiunile premiului și în consecință propunem ca premiul [1] « ING. ALEXANDRU

1) Valoarea premiului din acest an a fost sporită cu 100.000 lei prin donația d-lui avocat AL. AL. ROȘU.

ROŞU » să se acorde pentru anul LI d-lui CONSTANTINESCU R. MIHAI, elev clasa a VIII-a la Liceul Petru şi Pavel din Ploeşti.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. ALEXANDRU ROŞU"

Ing. A. D. BUNESCU, Avocat ALEXANDRU AL. ROŞU, Ing. D. STOICA.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 24 Februarie 1947 a *Gazetei Matematice*.

NOTE MATEMATICE

17. *Un caz de rezolvare al patrulaterelor.* In *Tratatul meu de Trigonometrie plană şi sferică.* Ex. 3, pag. 213, dau un mijloc de a se rezolva un patrulater, căruia i se cunosc unghiurile şi două laturi opuse. Iată o altă soluţie a acestei probleme, mai simplă şi mai elegantă.

Fie $AD = d$, $BC = b$ laturile date, iar $d > b$. Laturile AB, CD se întâlnesc în E. In triunghiul AED, cunoaştem latura $AD = d$ şi unghiurile alăturate A şi D; rezolvindu-l, determinăm pe AE, DE.

In triunghiul EBC, cunoaştem latura $BC = b$ şi unghiurile; rezolvindu-l, determinăm EB, EC, deci

$$AB = AE - EB \quad , \quad CD = ED - EC.$$

Formulele de rezolvare sunt

$$AB = \frac{d \sin D - b \sin C}{\sin (A + D)} \quad , \quad BC = \frac{d \sin A - b \sin B}{\sin (A + D)} .$$

Metoda se aplică şi cazului analog dela patrulaterele sferice.

M. G.

18. *Asupra unei desvoltări în serie.* Desvoltarea în serie ce formează obiectul exerciţiului 14 (G. M., LII, pag. 197) fiind eronată îmi propun a reveni asupra acestei chestiuni. Astfel îmi propun a desvolta în serie funcţiunea

$$y = chx = \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x})$$

după puterile lui $z = e^x + 1$. Ca şi în soluţia publicată exprim pe y în funcţia de z sau:

$$y = \frac{1}{2}\left[z - 1 + \frac{1}{z-1}\right].$$

Deoarece, pentru x real avem $z > 1$, rezultă:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{2}\left[z - 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots\right] \qquad (1)$$

desvoltare ce este convergentă pentru $1 < z < \infty$, sau x finit. Considerată în planul complex, aceeaşi desvoltare este convergentă pentru $|z| = |1 + e^x| > 1$. Punând $z = s + it$ obţinem că (1) este valabil pentru

$$e^s + 2\cos t > 0$$

şi în special pentru $t = 0$, iar s finit.

Desvoltarea în serie, ce figurează în soluţiunea publicată este valabilă pentru $|z| < 1$, sau

$$e^s + 2\cos t < 0.$$

Ş. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI

Examenul de admitere Octombrie-Noembrie 1946

Geometria. I. Se dau 2 drepte D_1 şi D_2 care trec printr'un punct O din spaţiu şi se cere:

a) Să se construiască un cerc situat în planul determinat de cele 2 drepte D_1 şi D_2, având centrul în O şi astfel încât, dacă A şi B sunt punctele în care acest cerc taie dreapta D_1 şi C şi D punctele în care acelaşi cerc taie dreapta D_2, distanţa AC să fie egală cu o lungime dată l, unghiul AOC fiind ascuţit.

b) Care este mărimea unghiului AOC, în cazul în care

$$AC = AD \quad \text{şi} \quad AD = 2\,AC.$$

c) Să se calculeze mărimea razei cercului în funcţie de l în ambele cazuri precedente.

II. Se dă o jumătate de sferă şi un cilindru circular drept care are o bază suprapusă peste cercul mare care limitează jumătatea de sferă, iar cea de a 2-a bază a sa este tangentă la jumătatea de sferă şi este paralelă cu prima bază. Se cere:

a) Să se determine raportul dintre suprafaţa laterală a cilindrului şi suprafaţa jumătăţii de sferă.

b) Dacă se ia baza comună a cilindrului şi a jumătăţii de sferă ca baza şi a unui con circular drept cu vârful în punctul de tangentă al celei de a 2-a bază a cilindrului cu jumătatea de sferă, să se găsească o relaţie între volumele cilindrului, conului şi jumătăţii de sferă astfel diferite.

III. Să se construiască un plan bisector al unghiului făcut de 2 linii drepte nesituate în acelaşi plan în spaţiu.

IV Se consideră paralelipipedul dreptunghic cu bazele ABCD şi EFGH pătrate, înălţimea fiind dublu laturii patratului. Fie M şi N mijloacele muchiilor laterale opuse AE şi CG. Să se arate:

1°. Că punctele D, M, F, N sunt sunt în acelaşi plan 2°. Că figura DMFN este un romb. 3°. că $\sphericalangle$ DMF = 120°. 4°. Să se găsească suprafaţa rombului în funcţie de latura a a patratului. 5°. Să se determine poziţia piciorului perpendicularei duse din C pe planul rombului. 6°. Să se afle distanţa dela punctul C la acel plan.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. An. XIX. No. 3. Mai 1946.

Idem. Nr. 5. Iulie 1946.

Múzeumi Füzetek. Publicaţiile ştiinţifice ale *Muzeului Ardelean.* Serie nouă, Vol. III. N-rii 1—4. 1945.

Dăm următoarele date complimentare la recenzia de la pag. 221. din acest volum al G. M. Revista conţine între altele, articole şi comunicări de matematici şi de fizică matematică, dintre care următoarele în limbi străine: FÉNYES I.: Zur wellenmechanischen Herleitung des statistischen Atommodells; *Idem:* Statistische Analogie der Orthogonalität bei Valenzelektronem; *Idem:* The Correction of the Weizsäckers Addition; *Idem:* Gruppierung nach Quantenzustanden der Elektronen des statistischen Atommodells. T. VESCAN: Considérations sur la dissymétrie structurale par rapport au principe de la moindre action dela théorie d'EINSTEIN. DEZSÖ L. The short period Cepheid RU Piscium. Mai conţine şi următoarele articole cu rezumate în limbi străine: Über zvei Grundaufgaben der graphischen Analysis (S. V. BORBÉLY); Sur une série linéaire spéciale des domaine convexes (J. MOLNÁR); Sur un théorème de géometrie élémentaire concernant les poligones (E. FILA), în care se dă o generalizare a unei teoreme a d-lui POMPEIU, (în care se stabilise că segmentele IA, IB şi IC, unde I este un punct oarecare, iar ABC un triunghiu, formează totdeauna un triunghiu); Contributions à la connaissance des notions

fondamentales des sciences modernes (T. VESCAN; Quelques théorèmes concernant la serie linéaire spéciale des domaines convexes (J. MOLNÁR).

Numerele viitoare ale revistei vor conține și rezumate în limba română.

T. V.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXVI. Nr. 12. Februarie 1947. I. IRIMESCU: O nouă metodă de a genera curbele rosaces. Note Matematice, Bibliografie, Probleme rezolvate și propuse, Tabla de materii.

Idem. Anul XXVII. Nr. 1. Martie 1947. V. ALACI: † N. ABRAMESCU. V. ALACI: Câteva teoreme de algebră. Note Matematice, Diverse, Bibliografie, Probleme rezolvate și propuse.

MIHAIL ST. BOTEZ. *Geometria Descriptivă*, curs predat la Politehnica „GH. ASACHI" din Iași, 380 pagini, format 26 × 18 cm. Institutul de arte grafice Alexandru A. Terek, Iași 1946).

Este prima carte mai completă de geometrie descriptivă apărută în românește și care umple un gol recunoscut în acest domeniu și mai ales în acest timp.

Scrisă cu deosebit entuziasm și cu competența celui consacrat geometriei descriptive, tipărită cu mari sacrificii în bune condiții și lucrată într'un sistem de colaborare între profesor asistent și studenți, ce face cinste atmosferii științifice dela Iași; cartea este în adevăr bogată în conținut și plină de viață.

Primele 10 capitole, clasice ale geometriei descriptive: Sisteme de proiecție; Dreapta; Planul; Dreapta conținută în plan; Dreapta și planul; Poziția a două plane; Al treilea plan de proiecție; Metodele geometriei descriptive; Unghiuri diedre; Poliedre; sunt scrise elementar.

Cu capitolul XI „Curbe", se ating noțiuni de Analiză Matematică, iar cu capitolul XII „Proprietăți proiective" se introduc noțiunile de raport anarmonic, omologie, afinitate și proiectivitate; pe cari se sprijină în următoarele patru capitole: Construcția conicelor; Suprafețe cilindro-conice; Secțiuni plane; Intersecția suprafețelor cilindro-conice.

Urmează apoi încă nouă capitole: Sfera; Suprafețe de rotație; Elipsoidul cu axe neegale; Hiperboloidul de revoluție cu o pânză; Câteva proprietăți ale suprafețelor riglate; Câteva suprafețe riglate; Hiperboloidul scalen; Paraboloidul hiperbolic; Elicea, Elicoidul și Serpentinul.

Fiecare capitol este urmat de o „Recapitulare" succintă și de un număr de 10—25 exerciții însoțite de indicații de rezolvare. Exercițiile în număr de peste 200 în total sunt în mare parte originale, propuse de autor la diversele examene.

Pe de altă parte, în cuprins chiar, sunt tratate unele aplicații cari apropie cursul de rostul lui tehnic, cum este de exemplu problema racordării conductelor cilindrice (pag. 194).

Prin figuri — numeroase schițe în spațiu și epure — foarte clare, bine dimensionate și bine așezate în pagină și prin text care apare ca și vorbit (aci avem de semnalat unele nepotriviri, scuzabile mai ales pentru un limbaj matematic în formație, în acest domeniu); cartea se citește ușor și reușește să formeze acea intuiție în spațiu atât de necesară tehnicianului.

AD. GHEORGHIU.

MIHAIL ŞT. BOTEZ. *Aplicaţiile Geometriei Descriptive*, Caetul I, Curs profesat la Facultatea de Construcţii a Politehnicei „GH. ASACHI" din Iaşi, 142 pagini, format 26 × 16 cm. Institutul de arte grafice Alexandru A. Terek, Iaşi 1946).

Cartea cuprinde trei capitole larg desvoltate teoretic, cu aplicaţii complet tratate şi urmate deasemenea de „Recapitulare" şi exerciţii; acestea sunt:

Proecţii cotate, în care se tratează şi suprafeţe topografice, acoperişe, drumuri.

Proecţiunea axonometrică, ortogonală şi oblică, tratată atât grafic cât şi prin calcul, dându-se o întreagă serie de relaţiuni trigonometrice.

Teoria umbrelor, în care se începe cu traseul umbrelor la 45° asupra corpurilor geometrice simple, se studiază umbra unei nişe şi se încheie cu „Consideraţii generale asupra teoriei umbrelor" în care se tratează problema analitic. Capitolul se termină cu două aplicaţii din domeniul construcţiilor.

Cartea se păstrează totuşi pe un nivel teoretic, fără să intre prea mult în detalii tehnice şi de grafică.

In teoria umbrelor la 45°, în special nu sunt abordate unele metode proprii şi nu se trag concluzii practice, ce ar fi fost cu atât mai utile în tehnică.

Semnalăm cu această ocazie unele scăpări în introducerea noţiunilor de fotometrie (pag. 96), unde între altele se defineşte punctul strălucitor ca punct de maximă intensitaie luminoasă, pe când denumirea este consacrată punctului de pe o suprafaţă lucioasă ce reflectează sursa luminoasă în ochiul, observatorului.

AD. GHEORGHIU.

I. I. STAMATE: *Exerciţii de matematici generale*. Litografia Schildkraul. Cluj 1946.

CERERI

342. Partea întreagă a unui număr real şi pozitiv este, prin definiţie, cel mai mare întreg real care nu depăşeşte acel număr real şi pozitiv. Această definiţie se aplică întocmai şi în cazul unui număr real negativ sau în acest caz se consideră partea întreagă cel mai mic număr întreg care nu este inferior respectivului număr real şi negativ?

E. VIŞA.

DIVERSE

Redacţionale. La problema 6216, publicată în numărul trecut la pag. 258 s'a primit, când revista era deja sub tipar, o bună soluţie geometrică dela d-l P. D. COLUMBESCU (Student Politehnică Bucureşti).

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2599. *Se dă*

$$y = k[f(x)e^x + g(x)e^{-x}] + a$$

în care $$e^{2x} = \frac{2g' - g''}{2f' + f''}.$$

Să se arate că punctele de inflexiune ale curbei, când ele există, sunt colineare.

D. PERIEȚEANU.

Abscisele punctelor de inflexiune, când ele există, sunt date de ecuația $y'' = 0$ care, în cazul problemei, este:

$$[f + 2f' + f'']e^x + [g - 2g' + g'']e^{-x} = 0;$$

aceasta se mai scrie încă sub forma:

$$fe^x + ge^{-x} + \left[1 - \frac{2g' - g''}{2f' + f''}e^{-2x}\right][2f' + f'']e^x = 0.$$

Conform enunțului, prima paranteză este nulă, deci:

$$fe^x + ge^{-x} = 0,$$

care, dacă o vom introduce în ecuația curbei, ne dă dreapta $y = a$.

OVIDIU ENULESCU
(pe când era student).

PROBLEMA 5355. *Se dă un unghiu* xoy, *o dreaptă fixă* Δ *și un punct fix* A *pe* Ox. *Pe* Δ *se ia un punct variabil* M. *Dreapta* AM *taie pe* Oy *în punctul* N; *prin* N *se duce o dreaptă de înclinare* α *pe* Ox *și fie* H *punctul de întâlnire al acestei drepte cu* OM. *Să se găsească:*

1°. *Locul punctului* H *când* α *este constant este o iperbolă.*

2°. *Infășurătoarea asimptotelor acestei iperbole când* α *variază.*

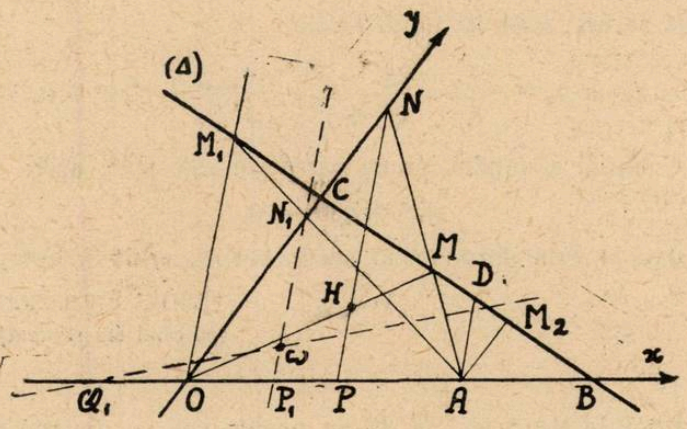
GH. D. SIMIONESCU.

Soluție geometrică. 1°. Notăm cu P proiecția sub unghiul α a punctului N pe dreapta Ox. Punctul H se află atunci la inter-

secția dreptelor OM și NP, care pot fi socotite ca raze corespunzătoare a două fascicole omografice: unul cu vârful în O, iar al doilea cu vârful în (α), punctul dela infinit dat de direcția α. In adevăr din enunț se vede că unei drepte NP îi corespunde un singur punct M, deci o singură dreaptă OM.

Rezultă că locul geometric al lui H este o conică ce trece prin O și prin (α), adică o *iperbolă* ce trece prin O și a cărei direcție asimptotică face unghiul α cu Ox.

Fie B, C și D punctele unde dreapta Δ întâlnește respectiv dreptele Ox, Oy și paralela la NP dusă prin A. Se observă imediat că atunci când M vine în C, H ≡ C și deasemenea când M vine în D, H ≡ D, deci punctele C și D aparțin locului geometric. Ele sunt intersecția acestui loc cu dreapta Δ.



Să considerăm raza comună O (α) aparținând fascicolului cu vârful în (α). Atunci N și P coincid cu O, NA devine OA iar M vine în B. Deci razei O (α) îi corespunde OB, cu alte cuvinte dreapta Ox este tangenta în O la iperbolă.

Să considerăm acum pe O (α) aparținând fascicolului cu vârful în O. Ea întâlnește dreapta Δ în H_1, iar AM_1 taie pe Oy în N_1. Dreapta $N_1 P_1$ înclinată de unghiul α pe Ox este raza corespunzătoare dreptei O (α), deci tangentă la iperbolă în punctul (α), adică asimptota.

Pentru a găsi cealaltă asimptotă vom duce dreapta AN_∞ care taie pe Δ în M_2 ($AM_2 \parallel Oy$). Razele corespunzătoare sunt OM_2 şi (α) N_∞ adică dreapta dela infinit. Punctul H se află deci la infinit în direcţia OM_2, a doua direcţie asimptotică. Putem construi efectiv asimptota observând că cele două asimptote trebue să taie tangenta Ox în două puncte simetrice faţă de punctul de contact O. Vom duce deci prin O_1, simetricul lui P_1 faţă de O, o paralelă la OM_2. Această a doua asimptotă va tăia pe prima N_1P_1 în ω, *centrul iperbolei.*

2°. Punctul M_2 este independent de α, deci asimptota $Q_1\omega$ se deplasează paralel cu ea însăşi când α variază. Invelitoarea se reduce la un punct la infinit.

Pentru cealaltă asimptotă N_1P_1 se observă că fiecărei direcţii α îi corespunde o rază OM_1 şi deci un punct N_1 şi reciproc unui punct N_1 îi corespunde o rază OM_1, deci o direcţie α.

Astfel punctele N_1 şi (α) descriu diviziuni omografice cu bazele respectiv Oy şi dreapta dela infinit, de unde rezultă că înfăşurătoarea asimptotei N_1P_1 este o conică tangentă acestor două drepte, *deci o parabolă.*

Să căutăm punctele de tangentă ale parabolei cu cele două drepte. Ele sunt corespunzătoare lui N_∞, socotit pe rând, ca aparţinând celor două diviziuni. Astfel când (α) vine în N_∞, $M_1 \equiv N_1 \equiv C$, deci parabola e tangentă în C dreptei Oy. Apoi când N_1 vine în N_∞, M_1 vine în M_2, deci direcţia corespunzătoare lui N_∞ este AM_2 şi aceasta dă *punctul de contact* al parabolei cu dreapta dela infinit. AM_2 este deci *direcţia axei parabolei.*

In sfârşit pentru o mai bună precizare putem găsi încă două poziţii particulare ale tangentei N_1P_1. Să observăm că dacă M_1 devine M_∞ pe Δ, atunci N_1P_1 devine $AN_0 \parallel \Delta$, iar dacă M_1 vine în B, N_1P_1 se confundă cu Ox.

In rezumat parabola *e tangentă laturilor triunghiului* OAN_0, *trece prin* C *şi are direcţia axei dată de* OM_2.

La această problemă s'au primit numai soluţii analitice. D-nii: PAUL DRĂGHICESCU, D-TRU GH. VASILIU (liceul mil. Iaşi) şi I. C. UDREA (liceul Armatei Craiova) au luat ca axe chiar laturile unghiului xoy, iar d-nii: EUGEN N. WEGENER (Bucureşti) şi AUREL N. POPA (liceul militar Iaşi) au luat ca axe pe Ox şi perpendiculara pe ea în O.

D-L E. WEGENER nu a precizat că înfăşurătoarea e o parabolă.

PROBLEMA 5433. *Pe ipotenusa unui triunghiu dreptunghic* ABC *se iau punctele* D *şi* E *dela* B *către* C. *Notăm*

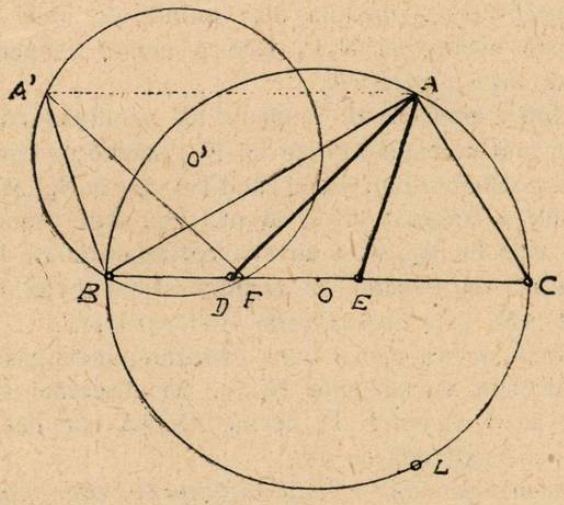
$$\sphericalangle BAD = \alpha \ , \ DAE = \beta \ , \ \sphericalangle EAC = \gamma.$$

Să se determine segmentele $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$ *şi unghiurile* α, β, γ *astfel ca atât unele cât şi altele să fie în progresie aritmetică.*

Aplicaţie: Triunghiul ABC *are laturile proporţionale cu numerele 3, 4, 5.*

GH. D. SIMIONESCU.

Fie un triunghiu oarecare ABC cu elementele sale date. Ne propunem să determinăm pe latura $BC = a$ punctele D şi E astfel ca unghiurile α, β, γ specificate în enunţ deoparte şi segmentele BD, DE, EC formate pe latura BC, de altă parte, să formeze două progresiuni aritmetice.



Pentru unghiuri avem relaţia

$$\alpha + \beta + \gamma = A \quad \text{şi} \quad 2\beta = \alpha + \gamma$$

de unde rezultă

$$\beta = \frac{A}{3} \ , \ \alpha + \gamma = \frac{2A}{3}. \qquad (1)$$

Pentru segmente avem relaţiile similare

$$BD + DE + EC = a \quad , \quad 2 \cdot \overline{DE} = \overline{BD} + \overline{EC}$$

de unde rezultă

$$\overline{DE} = \frac{a}{3} \quad , \quad \overline{BD} + \overline{EC} = \frac{2a}{3} \cdot \qquad (2)$$

Trebue reţinută şi reciproca acestor concluziuni; dacă avem relaţiile (1) atunci unghiurile α, β, γ formează o progresie aritmetică. Intr'adevăr însemnând cu $2u$ diferenţa unghiurilor γ şi α, vom putea scrie

$$\gamma - \alpha = 2u \quad , \quad \gamma + \alpha = \frac{2A}{3}$$

de unde avem progresia aritmetică

$$\alpha = \frac{A}{3} - u \quad , \quad \beta = \frac{A}{3} \quad , \quad \gamma = \frac{A}{3} + u.$$

Acelaşi lucru pentru segmentele BC, DE, EC.

— Considerăm acum triunghiul ADE în care avem $\beta = \frac{A}{3}$, latura opusă $\overline{DE} = \frac{a}{3}$ şi înălţimea $AH = h$ aceeaşi cu a triunghiului dat. Notăm

$$\sphericalangle ADE = x \quad , \quad \sphericalangle AED = y$$

astfel că în acest triunghiu avem relaţiile

$$x + y = \pi - \frac{A}{3} \quad ; \quad \frac{a}{3} \cdot \frac{\sin x \cdot \sin y}{\sin \frac{A}{3}} = h. \qquad (3)$$

Avem însă relaţia

$$2 \sin x \cdot \sin y = \cos (y - x) - \cos (y + x) = \cos (y - x) + \cos \frac{A}{3}$$

vom ţine seamă de această relaţie şi atunci a doua ecuaţie din sistemul (3) devine

$$\cos (y - x) + \cos \frac{A}{3} = \frac{6h}{a} \cdot \sin \frac{A}{3} \cdot$$

Vom introduce aci unghiul auxiliar φ astfel ca

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{6h}{a}$$

şi ecuaţia precedentă devine

$$\cos(y-x) = \frac{\sin\left(\frac{A}{3} - \varphi\right)}{\sin\varphi}. \qquad (4)$$

Sistemul format de (4) şi prima ecuaţie din (3) rezolvă complect problema. Vom avea unghiurile x şi y apoi se are imediat

$$\alpha = x - B \quad , \quad \gamma = y - C. \qquad (5)$$

Odată determinate aceste unghiuri avem din triunghiul ADE

$$AD = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sin y}{\sin\frac{A}{3}} \quad , \quad AE = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{A}{3}}$$

iar din triunghiurile ABD şi ACE, avem segmentele căutate

$$\overline{BD} = \frac{AD \cdot \sin\alpha}{\sin B} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sin y \cdot \sin(x-B)}{\sin\frac{A}{3} \cdot \sin B}$$

$$\overline{EC} = \frac{AE \cdot \sin\gamma}{\sin C} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sin x \cdot \sin(y-C)}{\sin\frac{A}{3} \cdot \sin C} \qquad (6)$$

Se observă că toate aceste formule necesare rezolvării problemei, sunt calculabile prin logaritmi.

Discuţie. Condiţia de posibilitate a problemei este să avem pentru $\cos(y-x)$ valori acceptabile, adică să avem

$$-1 < \frac{6h}{a} \sin\frac{A}{3} - \cos\frac{A}{3} \leqslant 1$$

care se mai scrie despărţit

$$\frac{6h}{a} \cdot \sin\frac{A}{3} \leqslant 2\cos^2\frac{A}{6} \quad \text{şi} \quad \frac{6h}{a} \cdot \sin\frac{A}{3} > -2\sin^2\frac{A}{6}.$$

Această ultimă relaţie este satisfăcută totdeauna căci $A < \pi$ şi deci membrul întâiu e pozitiv.

In prima neegalitate punem liniile arcului $A/6$ simplificăm şi obţinem condiţia unică

$$\operatorname{tg}\frac{A}{6} \leqslant \frac{a}{6h}. \qquad (7)$$

2°. In cazul problemei propuse, avem A = 90°. Condiția de posibilitate (7) ne dă

$$h \leqslant \frac{a}{6} \cdot \operatorname{ctg} 15^0 \sim 0{,}622 \, . \, a$$

care este totdeauna satisfăcută căci pentru înălțimea dusă pe ipotenusă avem $h < \frac{a}{2}$.

Pentru rezolvarea problemei vom calcula unghiul φ

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{6h}{a} = \frac{6 \, . \, b \, . \, c}{a^2}$$

apoi vom rezolva sistemul

$$\cos (y - x) = \frac{\sin (30^0 - \varphi)}{\sin \varphi} \quad , \quad x + y = 150^0$$

și avem $\alpha = x - B \quad , \quad \gamma = y - C.$

In sfârșit segmentele formate pe ipotenusă au expresiunile

$$BD = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sin y \, . \sin (x - B)}{\sin B} \quad , \quad EC = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sin x \, . \sin (y - C)}{\sin C}$$

iar $$DE = \frac{a}{3} \, .$$

Pentru cazul când laturile triunghiului dreptunghic sunt proporționale cu numerele 3, 4, 5, se găsește

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{72}{25} \quad \therefore \quad \varphi = 19^0 \, 8' \, 54''$$

$$x = 47^0 \, 30' \, 49'' \quad , \quad y = 102^0 \, 20' \, 11''.$$

Iar după ce se calculează și unghiurile B și C ale triunghiului se găsește

$$\alpha = x - B = 10^0 \, 38' \, 40'' \; ; \; \beta = 30^0 \; ; \; \gamma = y - C = 49^0 \, 21' \, 20''.$$

Iar pentru segmentele formate pe ipotenusă se găsește

$$BD = 1{,}002 \quad , \quad DE = \frac{S}{3} = 1{,}666 \quad , \quad EC = 2{,}331.$$

Observare. Dacă ne propunem a construi soluția acestei probleme, aceasta revine la a construi triunghiul în care avem $\sphericalangle ADE = A/3$, latura opusă $DE = a/3$ și înălțimea corespunză-

toare *h*. In cazul unui unghiu A oarecare construcţia cere în prealabil trisecţiunea acestui unghiu problemă care nu se poate rezolva în cazul general.

Cazurile când această trisecţiune este posibilă sunt acelea când unghiul înscris A/3 subântinde un arc de cerc θ ce corespunde laturii unui poligon regulat înscris, latură ce se poate construi cu rigla şi compasul. Vom avea atunci

$$\text{măs}\frac{A}{3} = \frac{\theta}{2} \quad \therefore \quad \text{măs } A = \frac{3}{2}\theta$$

unul din aceste cazuri este cazul $A = 90^0$, când unghiul A/3 înscris subântinde o coardă CL egală cu latura exagonului regulat înscris.

Construirea triunghiului ADE se face în modul următor:

Impărţim ipotenusa $BC = a$ în trei părţi egale pe segmentul BF egal cu $a/3$, construim arcul de cerc O' capabil de unghiul de 30^0. In sfârşit prin vârful A ducem o paralelă AA' la BC care taie cercul O' într'un punct A'. Lungimile A'F şi A'B sunt tocmai segmentele egale cu AD şi AE.

IOAN ST. TEODORESCU.

Altă soluţie. Din triunghiul ABD scoatem

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \sin\beta,$$

iar din triunghiul ADC ($\sphericalangle DAC = 90^0 - \alpha$):

$$\frac{\cos\alpha}{\overline{DC}} = \frac{\sin C}{\overline{AD}} \quad \therefore \quad \cos\alpha = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} \sin C.$$

Prin împărţire căpătăm imediat

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{b}{c} = \frac{\overline{BD}}{a - \overline{BD}} \cdot \frac{b}{c}. \tag{8}$$

Pornind dela triunghiurile ACE şi AEB deducem la fel

$$\text{tg}\gamma = \frac{\overline{EC}}{a - \overline{EC}} \cdot \frac{c}{b}. \tag{9}$$

In cazul problemei date avem

$$\alpha + \gamma = \frac{2A}{3} = 60^0, \quad \text{deci} \quad \text{tg}(\alpha + \gamma) = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \text{tg}\alpha + \text{tg}\gamma = \sqrt{3}\,(1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\gamma). \tag{10}$$

Introducând valorile scoase din (8) şi (9) şi ţinând seama că $\overline{BD} + \overline{EC} = \frac{2a}{3}$ obţinem

$$a(\overline{AD} \cdot b^2 + \overline{EC} \cdot c^2) - a^2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{EC} = \sqrt{3}\, bc \frac{a^2}{3}.$$

Impărţim cu a şi notăm $\overline{BD} = x$. găsim astfel ecuaţia:

$$3ax^2 + (b^2 - 5c^2)\, x + ac\,(2c - \sqrt{3}\, b) = 0. \qquad (11)$$

Discriminantul se poate scrie:

$$R = b^4 + c^4 - 34\, b^2 c^2 + 12\sqrt{3}\, a^2 cb \equiv [b^2 + c^2 + 12bc + 6\sqrt{3}\, bc]$$
$$[b^2 + c^2 - 12bc + 6\sqrt{3}\, bc].$$

Primul factor este evident pozitiv, iar al doilea se mai scrie

$$b^2 + c^2 - 6(2 - \sqrt{3})\, bc = a^2 - 6(2 - \sqrt{3})\, ah = a[a - 6(2 - \sqrt{3})h].$$

Se ştie însă că $h < \frac{a}{2}$ deci $a > 2h$. Cu atât mai mult $a > 6(2 - \sqrt{3})\, h \cong 1{,}62h$, adică şi al doilea factor e pozitiv.

Discriminantul fiind pozitiv, rădăcinile sunt reale. Se poate arăta că există cel puţin o soluţie care satisface problema, oricum ar fi triunghiul dreptunghic dat.

O soluţie analoagă acesteia a fost dată de d-l PAUL P. DRĂGHICESCU (liceul militar Iaşi) cu o discuţie amănunţită şi cu soluţia exactă în cazul particular când laturile sunt 3, 4 şi 5.

S'au mai primit o soluţie total greşită şi o soluţie prea superficială şi cu aplicaţia greşită.

Notă 1. Se poate porni dela relaţia $\overline{BD} + \overline{EC} = \frac{2a}{3}$ şi înlocui segmentele prin valorile lor trase din (8) şi (9). Se ajunge astfel ca ecuaţia:

$$4bc\ \mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\gamma + c^2\ \mathrm{tg}\alpha + b^2\ \mathrm{tg}\gamma - 2bc = 0.$$

Insă $\alpha + \gamma = 60^0$ sau $\gamma = 60^0 - \alpha$, deci $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \sqrt{3}}$.

Notând $\mathrm{tg}\alpha = Z$ şi înlocuind pe $\mathrm{tg}\alpha$ şi $\mathrm{tg}\gamma$ în ecuaţia de mai sus se capătă:

$$(c^2\sqrt{3} - 4bc)\, Z^2 + (c^2 - b^2 + 2\sqrt{3}\, bc)\, Z + b^2\sqrt{3} - 2bc = 0$$

care are acelaşi discriminant ca şi ecuaţia (11). De aci se scoate

$$\mathrm{tg}\alpha = Z \quad \text{şi} \quad \mathrm{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3} - Z}{1 + Z\sqrt{3}}.$$

2. In soluţia d-lui I. ST. TEODORESCU s'a dat $a = 5$; $b = 3$ şi $c = 4$. Dacă se ia $a = 5$, $b = 4$, $c = 5$ progresiile, atât pentru unghiuri cât şi pentru segmente, se inversează.

G. D. S.

PROBLEMA 5612. *Să se verifice formula*

$$C_{m+n+p-1}^{m+n-1} = C_{m+p-1}^{m-1} C_{n-1}^{n-1} + C_{m+p-2}^{m-1} C_n^{n-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} C_{n+p-1}^{n-1}$$

unde C_n^p *este numărul combinărilor* a n *obiecte luate câte* p.

TH. ANGHELUȚĂ.

Soluție dată de VLAD GH. JURIST (clasa a VII-a Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal).

In verificarea cerută vom folosi egalitatea

$$\frac{1}{(1-x)^h} = 1 + C_h^1 x + C_{h+1}^2 x^2 + \ldots + C_{h+p-1}^p x^p + \frac{R_p(x)}{(1-x)^p}, \quad (1)$$

care dă câtul împărțirii, din prima parte, ordonat după puterile crescătoare ale variabilei. In partea a 2-a p este arbitrar, iar $R_p(x)$ este restul a cărui expresie explicită, nu va interveni.

Pentru $h = 1$, egalitatea este verificată, fiindcă avem identitatea cunoscută

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p + \frac{x^{p+1}}{1-x}. \quad (2)$$

Presupunem egalitatea adevărată pentru h. Apoi înmulțim egalitățile (1) și (2). In prima parte avem împărțirea $1:(1-x)^{h+1}$, iar în partea a 2-a, ținând seamă de relația

$$C_{h+p-1}^{h-1} + C_{h+p-2}^{h-1} + \ldots + C_h^{h-1} + C_{h-1}^{h-1} = C_{h+p}^h$$

găsim că (1) este verificată și pentru $h+1$. Verificarea propusă rezultă acum numai decât. Facem în (1) pe h succesiv egal cu m, n și $m+n$ și obținem trei egalități. Coeficientul lui x^p din produsul primelor două dintre aceste egalități este partea a doua a formulei din problemă. Iar coeficientul termenului corespunzător din egalitatea a treia este partea întâia a formulei [1].

Formula se mai poate verifica prin inducție completă. In acest scop, lăsăm pe n fix, făcând să varieze întâi m apoi p.

Pentru $m = 1$, formula este adevărată oricare ar fi p întreg și pozitiv, bine înțeles.

---

1) TH. ANGHELUȚĂ, *Curs de Algebră Superioară*, vol. I, pag. 32; idem pag. 57, Ex. 10.

Presupunem formula adevărată pentru $m = 1$, numărul p fiind arbitrar şi vom arăta că se menţine şi pentru m. Formula propusă este evidentă pentru $p = 0$. O presupunem verificată pentru p şi rămâne de arătat că este adevărată şi pentru $p + 1$. Avem

$$C_{m+n+p}^{m+n-1} = C_{m+p}^{m-1} C_{n-1}^{n-1} + C_{m+p-1}^{m-1} C_n^{n-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} C_{n+p}^{n-1}.$$

Scădem din această egalitate pe cea propusă şi obţinem

$$C_{m+n+p-1}^{m+n-2} = C_{m+p-1}^{m-2} C_{n-1}^{n-1} + C_{m+p-2}^{m-2} C_n^{n-1} + \ldots + C_{m-2}^{m-2} C_{n+p}^{n-1}.$$

Formula din urmă este verificată prin ipoteză, căci rezultă înlocuind în enunţ pe m şi p respectiv cu $m - 1$ şi $p + 1$.

Notă. 1° Rezolvitorul acestei probleme VLAD GH. JURIST a fost unul din harnicii şi promiţătorii noştri corespondenţi. In ziua de 1 Aprilie 1944 a a fost trimis de Şcoală la Bucureşti iar în ziua de 4 Aprilie 1944 a fost răpus de primele bombe ale primului bombardament, alături de un frate al său mai mare student la medicină. Tânărul VLAD GH. JURIST era o fire entuziastă, dotat cu frumoase aptitudini pentru matematici şi se pregătea să dea concurs la Şcoala Politehnică. El era unul dintre elevii cei mai distinşi ai Colegiului „N. Filipescu". La vârsta fragedă a liceanului, era în fruntea tuturor disciplinelor şcoalei. In clasa a V-a a scris o broşură de circa 180 pagini despre VOLTAIRE în limba franceză şi a obţinut premiul „Elena Văcărescu". In clasa a VIII-a a scris *L'Epopeé de l'humanité dans le XVIII siècle.* A scris despre *Dunăre, Opera lui* OVIDIU şi a instituit un premiu de matematici în liceul său. Unui astfel de potenţial i-a fost dat să fie printre primele victime ale bombardamentului. Ne facem o pioasă datorie scriind aceste câte-va cuvinte despre harnicul şi regretatul VLAD GH. JURIST care ne-a părăsit la fragedă vârstă de 18 ani.

2°. Au rezolvat problema d-nii: GEORGE GH. DONŢU (Liceul de Aplicaţie Iaşi), VASILE PĂLĂCEANU (Liceul Militar Timişoara) şi EUGEN N. WEGENER (Bucureşti).

PROBLEMA 6100. *α fiind real şi pozitiv, iar* p *întreg şi pozitiv, să se arate că avem:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos t} \cos(pt - \alpha \sin t)\, dt = \frac{\alpha^p}{p!}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

Soluţie dată de d-nii ADOLF O. SAICHIN şi ANTON I. VARGĂ.

Avem:

$$e^{\alpha \cos t} \cos(pt - \alpha \sin t) = \frac{1}{2} e^{ipt} e^{\alpha(\cos t - i \sin t)} + \frac{1}{2} e^{-ipt} \cdot e^{\alpha(\cos t + i \sin t)}$$

$$\therefore e^{\alpha \cos t} \cos(pt - \alpha \sin t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \cos(p - n)t.$$

Seria $\Sigma \frac{|\alpha|}{n!}$ fiind convergentă se poate integra termen cu termen. Deoarece avem:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p - n)\, dt = \begin{cases} 2\pi & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$$

rezultă identitatea propusă.

Observare. Condițiunea ca α să fie real și pozitiv, nu intervine. Rezultatul rămâne prin urmare același ori care ar fi α.

Altă soluție: α fiind real și pozitiv, considerăm o variabilă aleatorie x ce verifică legea lui POISSON, adică ia valorile 0, 1, 2, ... n, cu probabilitățile:

$$e^{-\alpha}, e^{-\alpha} \frac{\alpha}{1!}, e^{-\alpha} \frac{\alpha^2}{2!}, \ldots, e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}, \ldots$$

Pentru această variabilă aleatorie funcțiunea caracteristică $\varphi(t)$ este:

$$\varphi(t) = \mathrm{E}(e^{int}) = e^{-\alpha} + e^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{int} \frac{\alpha^n}{n!},$$

$$\therefore \varphi(t) = e^{\alpha(e^{it} - 1)}$$

Invers, fiind dată funcțiunea caracteristică $\varphi(t)$ se știe cum putem determina probabilitățile.

Avem astfel:

$$e^{-\alpha} \frac{\alpha^p}{p!} = \lim_{c \to \infty} \frac{3}{2c} \int_{-c}^{+c} \varphi(t)\, c^{-ipt}\, dt.$$

p fiind un număr întreg funcțiunea $\varphi(t)\, e^{ipt}$ este evident periodică, perioada fiind 2π. Putem deci să facem $c = \pi$. Relațiunea noastră devine:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\alpha(\cos t + i \sin t) - ipt}\, dt = \frac{\alpha^p}{p!}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha \cos t} \cos(pt - \alpha \sin t)\, dt = \frac{\alpha^p}{p!}$$

și

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha \cos t} \sin(pt - \alpha \sin t)\, dt = 0.$$

Prima din aceste egalităţi este relaţiunea din enunţ, iar cea de a doua este evidentă, funcţiunea de integrat fiind impară.

Notă. D-nii A. SAICHIN şi A. VARGĂ au rezolvat deasemeni problema, derivând primul membru al egalităţii propuse în raport cu α.

Ş. G.

EXERCIŢII

17. *Să se arate că*

$$E = n^4(n-1)^3(n-2)^2(n-3)$$

se divide prin 144, ori care ar fi întregul n.

SOFRONIE I. ŞTEFĂNESCU.

R. Avem $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Dacă $n = 2q$ atunci n^4 se divide prin 2^4 şi $(n-2)^2$ prin 2^2, deci E se divide prin 2^6. Dacă $n = 2q+1$ atunci $(n-1)^3$ se divide prin 2^3, iar $(n-3)$ prin 2, iar E prin 2^4. Făcând consideraţii analoage faţă de divizorul 3 se găseşte ca E se divide neapărat prin 3^2. Cum 2 şi 3 sunt primi rezultă că E se divide prin $2^4 \cdot 3^2$.

Se vede că dacă n este pereche, E se divide şi prin 288.

18. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^8 - 16x^6 + 91x^4 - 216x^2 + 182 = 0.$$

AL. I. ŢIGĂNOIU.

R. Ecuaţia dată se mai scrie sub forma

$$(x^2-4)^4 - 5(x^2-4)^2 + 6 = 0.$$

Rezolvarea este imediată dacă se pune

$$x^2 - 4 = y$$

Se găseşte

$$y_1 = 2 \quad , \quad y_2 = 3$$

şi se deduc pentru x următoarele 8 valori reale

$$\pm\sqrt{4 \pm \sqrt{2}} \text{ şi } \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{3}}.$$

19. *Să se calculeze suma*

$$S_1 = \cos^2 a_1 + \frac{\cos^2 a_2}{1!} + \frac{\cos^2 a_3}{2!} + \frac{\cos^2 a_n}{(n-1)!}$$

ştiind că $a_1, a_2, \ldots$ *sunt în progresie aritmetică.*

I. A. BARBU.

R. se notează cu S_2 suma în care se înlocuește *cos* prin *sin* și se ține seamă că

$$\cos a + i \sin a = e^{ia}.$$

Se calculează apoi $S_1 + S_2$ și se găsește

$$S_1 = e^{\cos r} \cos(a_1 + \sin r)$$

unde r este rația progresiei date [1].

20. *Să se rezolve ecuația*

$$\frac{8\cos^3 x + 3\cos^2 x - 6\cos x - 4}{6\sin^2 x \cos^3 x - 3\sin^3 x} = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x - 2}.$$

M. G. IOSIFESCU.

R. Înlocuind *sec* în funcție de *cos*, făcând reducerile și ținând seamă de

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{și de} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

ecuația din enunț se reduce la ecuația

$$\cos 3x = \frac{1}{2}$$

ale cărei rădăcini sunt date de

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{6k+1}{3}\pi.$$

21. *Să se rezolve sistemul*

$$\sin x + \sin y + \sin z = \lambda \; ; \quad \cos x + \cos y + \cos z = 1 \; ; \quad x + y + z = n\pi.$$

I. ST. TEODORESCU.

R. 1°. Fie $n = 2k$. Ultima ecuație dă $z = 2k\pi - (x + y)$ iar primele două devin

$$\sin x + \sin y = \lambda - \sin(x + y) \quad \text{și} \quad \cos x + \cos y = 1 - \cos(x + y)$$

Punând $x + y = 2u$ și $x - y = 2v$ sistemul devine

$$2\sin u \cos v = \lambda - \sin 2u \; ; \quad 2\cos u \cos v = 1 - \cos 2u$$

care prin împărțire se reduce la

$$\sin u - \lambda \cos u + \sin u = 0 \quad \therefore \quad \operatorname{tg} u = \frac{\lambda}{2}.$$

Se găsește ușor că v este dat de

$$\cos v = \operatorname{tg} u \sin u = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^2 + 4}}$$

cu condiția de posibilitate

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 16 \leqslant 0 \quad \therefore \quad -\sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$$

2°. Fie $n = 2k + 1$. Sistemul dat se deduce la

$$\sin u \cos v = \lambda - \sin 2u \quad \text{și} \quad 2\cos u \cos v = 1 + \cos 2u = 2\cos^2 u.$$

A doua ecuație dă

$$\cos u = 0 \quad \text{sau} \quad \cos u = \cos v.$$

Restul se deduce ușor.

---

1) A se vedea și problema 6134, propusă la pag. 488, Vol. L.

PROBLEME PROPUSE

6340. Să se găsească cifrele a, b, c, d diferite între ele, ştiind că produsul $(a+b)(c+d)$ este patrat perfect.

G-L GH. BUICLIU.

6341. Să se construiască un triunghiu cunoscând un unghiu, distanţa dela ortocentru la centrul cercului circumscris şi ştiind că o latură este media aritmetică a celorlalte două.

FL. NEDELCU.

6342. Fie O_i, H_i centrele cercurilor circumscrise şi ortocentrele triunghiurilor formate de patru drepte. Să se demonstreze că cele 4 mediatoare ale grupurilor de puncte O_i, H_i, sunt concurente.

I. C. VASILIU.

6343. In orice patrulater inscriptibil ABCD, ale cărui diagonale AC, BD se întâlnesc în I, există relaţiile

$$\overline{AB}^2.\overline{IC}.\overline{ID} = \overline{CD}^2.\overline{IA}.\overline{IB} = k' \; ; \; \overline{BC}^2.\overline{IA}.\overline{ID} = \overline{DA}^2.\overline{IB}.\overline{IC} = k'' \quad (1)$$

$$k' + k'' = \overline{AC}.\overline{BD}\sqrt{\overline{IA}.\overline{IB}.\overline{IC}.\overline{ID}}. \quad (2)$$

In care alte patrulatere mai există relaţia (1)?

P. P. DRĂGHICESCU.

6344. Să se demonstreze egalitatea

$$\begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & p_{m-k+1} \\ p_{m+1} & p_m & p_{m+k-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m+k-1} & p_{m+k-2} & p_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} & P_{k-m+1} \\ P_{k+1} & P_k & P_{k-m+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{k+m-1} & P_{k+m-2} & P_k \end{vmatrix}$$

în care p_i şi P_i reprezintă respectiv suma combinărilor simple şi cu repetiţie a cantităţiler oarecare x_1, x_2, ... x_n luate câte i ($p_0 = P_0 = 0$). Cazuri particulare pentru $m = 1$ şi $k = 1$.

M. ADAM.

6345. Dacă $a_0, a_1, \ldots a_n, a_{n+1}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de raţie r, să se calculeze sumele

$$S_1 = \frac{a_0}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} C_n^1 + \frac{a_2}{a_3} C_n^2 \ldots + (-1)^n \frac{a_n}{a_{n+1}} C_n^n$$

$$S_2 = \frac{A_n^1}{a_2} r - \frac{A_n^2}{a_2 a_3} r^2 + \frac{A_n^3}{a_2 a_3 a_4} r^3 \ldots + (-1)^n \frac{A_n^n}{a_2 a_3 \ldots a_{n+1}} r^n$$

unde A_p^q şi C_p^q sunt respectiv simbolii aranjamentelor şi a combinărilor a p obiecte luate câte q.

P. P. TEODORESCU.

6346. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 2x = \sin^2(\theta + x) + 2\sin(\theta + x).$$

A. I. VARGĂ.

6347. Se dă punctul F fix în plan şi axele dreptunghiulare Ox, Oy. Prin F se duc două drepte perpendiculare, care întâlnesc pe Ox în B, D şi pe Oy în A, C. Prin A şi B trece o parabolă (P) tangentă axelor în aceste puncte. Fie (P') o altă parabolă tangentă aceloraşi axe în C şi D.

Să se găsească locul geometric al intersecţiei parabolei (P) cu directoarea parabolei (P') când unghiul drept APC se roteşte în jurul lui F.

E. WEGENER.

6348. Să se arate că o hiperbolă înscrisă în triunghiul diagonal al unui patrulater complect şi având o latură a patrulaterului ca asimptotă peste tangentă dreptei lui NEWTON a patrulaterului.

RĂDUCANU GEORGESCU.

6349. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\cos 2x$$

$$x^3y''' + 9x^2y'' + 18xy' + 6y = 7\cos 3x - \cos^3 x$$

$$x^4y'''' + 16x^3y''' + 72x^2y'' + 96xy' + 24y = 8(4\cos 4x - \cos 2x).$$

VIRGIL CLAUDIAN.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Athanasiu L. M. (6312); *Baghină V. V.* (6315); *Bucur Al. N.* (6296); *Constantinescu N. Ilie* (E, N, P); *Constantinescu R. M.* (6232, 303, 12, 14, 15, 19, 24, 31, E, P); *Constantinescu Valerian* (6282); *Dănescu Al.* (5649, E); *Dăscălescu I. Mihai-Vlad* (5649, 6323); *Diaconescu A. I.* (6290); *Diaconu C. C.* (5992); *Dodu A. E.* (6290); *Doneaud E. A.* (6267); *Enescu G.* (5871, 966, 6043, 53, 101, 270, 71, 90, E); *Firescu Gr. Şt.* (6222, 323); *Florescu B. I.* (P); *Grigore A. Gh.* (6222, 59, 310, 11, 12); *Herşcovici Dan* (6302); *Ilie A. I.* (E); *Mănescu N. I.* (6105, 265, 70, 314); *Marinescu Em.* (6145, E, N, P); *Menciu C.* (P); *Mihălcioiu Şt. M.* (6074, 88, 227, 94, 312, 19, 23, E, P); *Moraite G. Al.* (6202, 07, 96); *Nanul Şt.* (5312); *Pantazopol C. Şt.* (6314, 35); *Şandru I. V.* (6262, P); *Soare V. M.* (3699, 4169, 6226, 58, 96, 305, 15, 24, 27, 31); *Stăncescu Virgil* (5134, 6314); *Stanciu I. Valeriu-Mihai* (5792, E); *Ştefănescu Sofronie* (6261); *Teodorescu Şt. I.* (2338, 4196, 5505; 847, P); *Teodorescu P. P.* (4360, 5567, 843, C, E, N, P, R); *Udrea C. I.* (6228); *Vasiliu E. Dan* (5765, 852, 966, 6155, 262, 71, 82, 90, 93, 323); *Vasiliu M. Mircea* (6088, 227, 323); *Vrânceanu Gh. Gh.* (6288, 96); *Wegener N. E.* (6035).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cincisute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se claseză.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 84.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 7.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, şi IX sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 20.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 60.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 16.000

XX. I **I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 20.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . Lei 60.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 40.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 20.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . Lei 20.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 25.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 20.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 20.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . Lei 25.000

Pentru volumele din Colecţia şi a Bibliotecilor din *Gazeta Matematică* trimise în provincie se va plăti contra ramburs şi taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII abonamentul este de 84.000 lei.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 27.000 lei.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 41.022.

BIBLIOTECA PROF. LICEUL „GHEORGHE LAZĂR” SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 9. — MAI 1947

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice“ din 1947 . . . . . *Gh. D. Simionescu.*
2. Poziţii de echilibru relativ în problema atracţiei Newtoniene a două puncte materiale . . . . . *Ing. M. Pătroianu.*
3. Raport pentru premiul de algebră „A. G. Ioachimescu“ . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 19—20.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2147, 2731, 4022, 6270.
10. Exerciţii: 22—28.
11. Probleme propuse: 6325, 6350—6359.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Marţi 27 Mai ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 10.
Marţi 10 Iunie ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 10.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 10.000
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 100.000
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 500.000

La *« Gazeta Matematică »* se primesc abonamente pentru *Intermédiaire des Recherches Matématiques*, anii 1945, 1946 şi 1947. Costul abonamentului: 168.000 lei fiecare an.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL LII, Nr. 9 *SUPLIMENT* MAI 1947

DAREA DE SEAMĂ

asupra reuniunii care a încheiat al 37-lea concurs al „Gazetei Matematice"

Suntem în după amiaza zilei de *Sâmbătă 19 Aprilie 1947* ; este ora 17 și 30 minute.

Examinarea scrisă și orală a candidaților la *Concursul Gazetei Matematice* s'a terminat și Comisiunea examinatoare, întrunită în amfiteatrul A. P. A. al *Politehnicei din București*, concentrează rezultatele obținute, calculează mediile și lucrează la clasificarea concurenților.

In același timp, în localul *Gazetei Matematice* din București, Calea Griviței 158, etaj 1, este mare activitate, întru cât anul acesta tradiționala masă comună nu s'a putut realiza din cauza situației grele economico-financiare, și a fost înlocuită printr'o reuniune chiar în localul propriu al Societății.

Ca sub o baghetă magică, austera sală a bibliotecii G. M., în care au loc solemnele ședințe ale Societății, este metamorfozată într'o încăpere primitoare, veselă și luminoasă.

Masa lungă de consiliu este înlocuită cu patru mese mici, cochet aranjate, împodobite cu frumoase vase de flori, liliac și mărgăritărele.

Se recunoaște imediat o intervenție misterioasă asemănătoare celei înfăptuite de *Albă ca zăpada* în casa celor șapte pitici.

Pentru descoperirea misterului, m'am deghizat imediat în SHERLOCK-HOLMES și am început cercetările, spre a găsi autorul miracolului.

Autorul s'a dovedit a fi o doamnă . . ., Doamna OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, ajutată fiind cu multă râvnă de Domnișoarele ALEXANDRA BĂDULESCU și ANA IOAN.

După ultime informații, o contribuție importantă în organizarea acestei reuniuni, a fost adusă de harnicul și simpaticul nostru secretar, d-l CONSTANTIN PÂRVĂNESCU, care fugea atât de repede dintr'o cameră în alta, încât nu l-am putut recunoaște decât alergând după el.

Dar, această povestire nu se oprește aici.

In adevăr, când am văzut farfuriile lungi încărcate cu gustări, am avut impresia că sunt în fața unor desene ornamentale fără . . . viață.

Până nu le-am încercat *direct*, nu m'am putut convinge că aceste desene colorate nu sunt altceva decât ouă roșii, cu ridichi împletite în filigran, feliuțe de brânză suprapuse liniar, felii de slănină așezate după curbe închise etc., etc. (trebue să mărturisesc că în acest etc. nu se cuprinde decât mustarul, sarea și scobitorile).

In acest timp încep a sosi oaspeții. In grupe de câte patru-cinci, cei tineri discută despre profesori, examene, problemele concursului, cei mai în vârstă își reamintesc de timpul când erau elevi.

Se făcu astfel ora 18 și 30 minute. Comisiunea de examinare, în frunte cu d-nii G-ral GH. BUICLIU și D. STOICA, sosește și ședința este astfel deschisă.

In jurul celor patru mese se găsesc acum:

D-l PETRE MIRESCU, *Secretar General al Ministerului Educației Naționale* și membru al Soc. *Gazeta Matematică*.

D-nii: Ing. N. GEORGESCU, Arhitect SPIRU-HARET, Profesor NICOLAE GAIU, Ing. F. PANAITESCU, membri ai *Gazetei Matematice* și V. GRIGORCEA și CONSTANTIN PÂRVĂNESCU, invitați ai Soc. *Gazeta Matematică*.

D-nii: General GH. BUICLIU, Ing. D. V. STOICA (MOȘ-CRĂCIUN) și Prof. Ing. D. STAN, stâlpi ai *Gazetei Matematice*.

D-nele: OTILIA GEORGESCU-ROEGEN și MARIANA BRATU și d-rele ALEXANDRA BĂDULESCU și ANA IOAN, membre ale Soc. *Gazeta Matematică*.

D-nii: I. S. ANTONIU, ALEXANDRU BUNESCU, I. CHIȚULESCU, VIRGIL CLAUDIAN, N. GEORGESCU-ROEGEN, Colonel EUGEN IACOB, GH. ILIESCU, HARALAMBIE IONESCU, C. D. IONESCU-ȚIU, General GH. I. LITEANU, T. MAREȘ, ALEXANDRU PANTAZI, FL. PĂSĂRICĂ, GH. PĂTRAȘCU, TRAIAN POPP, AL. AL. ROȘU, Comandor A. STAN, GH. D. SIMIONESCU, ALEXANDRU STOENESCU, RADU ȚIȚEICA. C. C. TEODORESCU, ION VARDALA, ION C. VASILIU și General G. ZAPAN, membrii ai Soc. *Gazeta Matematică*.

D-ra SANDA M. HANGAN și d-nii: CONST. CORDUNEANU, ANDRÉ DONEAUD, MIHAIL EFTODE, RADU SPIRU HARET, IONEL PISANCA, DINU GH. SENI, IOAN C. UDREA, DAN E. VASILIU, PAUL CONSTANTINESCU, MIRCEA IOSIFESCU, IOAN MĂNCESCU, ILIE L. POPESCU, ION T. MUNTEANU, CONST. V. ROȘU, ILIE STOIAN, PETRE P. TEODORESCU, PETRE CERNESCU, ROMULUS M. HUREZEANU, MIHAI MIHĂLCIOIU, EMIL C. TUDOR, MUCIA VASILIU, VASILE BĂGHINĂ, IOAN DIACONESCU, DAN DRAGOMIR, IOAN FĂCĂOARU, GHEORGHE PETRE, GHEORGHE RISTEA, EMIL DABIJA și VASILE GHEORGHIU, candidați la concursul *Gazetei Matematice*.

Masa începe cu câte un păhărel de țuică bătrână; se ciocnesc apoi tradiționalele ouă roșii în mărturisirea creștină *Cristos a înviat — Adevărat a înviat*.

Cu această ocazie s'a întâmplat un eveniment de o importanță capitală, la ora 18 și 43 minute: d-l RADU ȚIȚEICA ciocnind cu d-l C. C. TEODORESCU, ambele ouă s'au spart *simultan*. Prin aceasta s'a rezolvat practic problema 3161, propusă de d-l Prof. GH. ZAPAN: *Ciocnind două ouă, se pot sparge amândouă deodată?*

Soluția problemei nu poate fi pusă în discuție, fiind experimentată de d-l RADU ȚIȚEICA, profesor de fizică la *Universitatea din Cluj* și constatată de d-l C. C. TEODORESCU, profesor de Rezistența Materialelor la *Politehnica din București*.

Autorul problemei, d-l Prof. GH. ZAPAN nu va fi totuși mulțumit, deoarece oul ales de d-sa cu multă grije, ca să aibă *profil aerodinamic*, a fost spart cu ușurință de un ou lătăreț oarecare.

Masa se continuă astfel în sgomot și voie bună; gustările sunt atacate cu elan și frumoasele ornamente de pe farfurii dispar, lăsând în urma lor o umbră de melancolie: *toate sunt trecătoare*.

Din fericire, această melancolie este înnecată într'un bun vin alb înnebunit cu puțin sifon.

La ora 19 și 10 minute începe seria cuvântărilor. Deschiderea o face d-l G-ral GH. BUICLIU cu următoarele cuvinte:

Domnilor Colegi, Iubiți Concurenți,

Suntem azi la al 37-lea concurs al « Gazetei Matematice » și la al 31-lea Concurs din acelea care au fost urmate de o reuniune și o masă comună. Ambele aceste două numere sunt antipatice, sunt numere egoiste, care nu au niciun divizor. Poate de aceia nu suntem la obișnuita masă comună. Fapt este că anul acesta, din cauza greutăților de tot felul, masa comună a fost înlocuită cu o gustare comună.

Folosind o metodă cunoscută în matematici, să presupunem însă că suntem la masa comună, că ne găsim la desert, și să începem ritualul tradiției noastre.

Concursul « Gazetei Matematice » cuprinde elemente logic variabile, precum concurenții, membrii comisiilor examinatoare, problemele propuse, rezultatele obținute etc.

Acest concurs însă conține și o serie de elemente constante. Constant este interesul și dragostea pentru concurenți, constantă este dozarea problemelor, permanentă este grija care se pune de a elimina orice element afectiv în darea rezultatelor, constantă este căldura cu care vă primim între noi. Dar pe deasupra tuturor acestor constante, este o constantă supremă, gândul nostru de respectos omagiu permanent către M. S. Regele.

TRĂIASCĂ REGELE MIHAI I.

Intreaga asistență în picioare, prin urale și strigăte de TRĂIASCĂ REGELE, ovaționează pe SUVERAN.

Corul candidaților intonează Imnul Național *Trăiască Regele*. Urmează apoi cuvântarea d-lui Ing. ALEX. BUNESCU. D-sa începe prin a reaminti pierderea recentă a unui membru al *Gazetei Matematice*, admirabilul dascăl NICULAE ABRAMESCU.

In memoria sa, asistența păstrează un minut de reculegere.

In continuare d-l Ing. ALEXANDRU BUNESCU spune:

Acesta este primul concurs și aceasta este prima reuniune prietenească anuală a noastră, care au loc dincolo de existența fizică a celor patru întemeietori ai « Gazetei Matematice ». Deci, al doilea gând al nostru de adâncă pietate, de caldă veneratie și de permanentă recunoștință, trebue îndreptat astăzi către fericiții creatori ai familiei Gazetei Matematice : CRISTESCU, ȚIȚEICA, IOACHIMESCU *și* IONESCU. *Sufletul lor întreg a rămas între noi : el este cimentul moral al operei pe care ne-au lăsat-o moștenire, el ne leagă pe unii de alții, cei de ieri, de azi și de mâine, și pe toți de « Gazeta Matematică ». Grație lor asociația pusă în serviciul unei științe pure, abstracte, are astfel și un suflet : un suflet de viață reală, pentrucă la baza construcției, ei au așezat entuziasmul, munca desinteresată și sacrificiile continue, pentrucă aceste patru elemente morale alcătuiesc astăzi ființa « Gazetei Matematice ». Iată de ce « Gazeta Matematică » păstrează o frumoasă tradiție.*

Ea este totodată o școală a științei, dar și de etică pentru tinerii noștri prieteni din licee.

Câte izvoare nesecate, de lecții de muncă, de cinste, de devotament, de credință, de patriotism și de umanism, ar putea extrage dascălii talentați din viața acestor patru fundatori ai familiei noastre.

Slăvită să le fie amintirea.

Cuvântarea d-lui ALEXANDRU BUNESCU se termină în tăcere. Adânc emoționați, fiecare din cei prezenți, revedem în mintea noastră chipurile blânde ale celor patru fundatori, iar în sufletul nostru simțim prezența sufletelor lor mari și generoase.

A urmat apoi tradiționala *cuvântare morală*, ținută de d-l Prof. Ing. D. STAN. Iată conținutul său:

Iubiți prieteni ai Gazetei,

După o cunoscută vorbă a lui ABRAHAM LINCOLN, *este posibil ca un om să privească toată vremea în jos, spre pământ și să fie ateu, dar nu e de conceput cum ar putea să privească în sus, spre ceruri și să spuie că nu există Dumnezeu.*

Parafrazând, putem la fel să ne dăm seama că dacă omenirea de azi s'ar lăsa impresionată numai de relele ce o frământă, de lăcomiile, nedreptățile și mai ales ipocriziile care domină dela o vreme relațiile dintre oameni, ar putea să desespereze în privința viitorului și să admită că se îndreaptă către dispariția totală a civilizației. Pentru cei care știu însă să-și ridice ochii ca să vadă mai departe și-și dau osteneala să judece cu discernământ ; pentru toți cei care nu dau de pildă uitării secolele de lupte pentru libertate și pentru respectul drepturilor omului și nici exemplele marilor națiuni, care de două ori în secolul acesta au pus totul în cumpănă ca să salveze micile țări cotropite ; pentru cei ce știu să aprecieze sacrificiile și grelele suferințe liber consimțite de sute de milioane de oameni, ca să vie în ajutorul altora din colțuri opuse ale globului, în convingerea că numai astfel vor putea întrona pacea pe pământ ; pentru cei care cred în progresele tehnice uluitoare, ce așteaptă încă să fie puse total în slujba mulțimilor de pretutindeni ; pentru toți aceștia, nu este de conceput că universala neliniște actuală nu va lua în curând sfârșit, și că omenirea nu va cunoaște din nou binefacerile păcii adevărate, cu instaurarea libertăților reale, cu revenirea la respectul omului, și cu întoarcerea la domnia unui minimum de bună-credință în relațiile dintre oameni.

Același lucru și pentru noi Românii. Dacă ar fi să stăm cu ochii ațintiți numai la noianul de nenorociri ce s'au năsputit asupra noastră de un lung șir de ani : la tiraniile din ce în ce mai apăsătoare, la înfrângerile, amputările și dezastrele ce ne-au fost hărăzite pentrucă ne-am lăsat mereu împinși pe drumuri diametral opuse instinctului național, credințelor noastre statornice și sufletului chinuit al întregeii nații, — ar trebui să ne copleșească sentimentul scufundării definitive, al anarhiei finale și al dispariției noastre ca Stat independent. Pentru aceia dintre noi, care nu dau uitării însă rezistența milenară a Ardelenilor și nici vicisitudinile nesfârșite ale mult frământatei istorii a țărilor românești ; pentru cei ce știu să-și ridice ochii, cu venerație, către imaginile celor ce au format sfințita galerie a atâtor eroi și martiri, a nenumăraților viteji și înțelepți, ce au îndrumat destinele frânturilor neamului nostru de-a-lungul secolelor ; pentru toți aceștia nu e de conceput că soarta permanentă ce ni se cuvine, ar putea să fie sclavia, minciuna și lipsurile, că sensul cuvintelor ar putea să fie pervertit la nesfârșire, când e vorba de viața și drepturile noastre, că neomenia și reaua credință ar putea să rămână veșnic stăpâne pe meleagurile acestea.

Tot astfel, în sfârșit, dacă acei ce ostenesc în învățământul nostru de toate gradele, ar fi să caute numai în lipsurile și nestatorniciile lui din anii din urmă și la greutățile invincibile în care se sbat profesorii adesea descurajați, ar putea să piardă încrederea în valoarea școlilor românești și în viitorul lor. Pentru aceia însă, ce țin seamă de nivelul ridicat la care a putut ajunge învățământul secundar și superior, altădată, când certificatele românești erau recunoscute în străinătate înaintea multor altora ; pentru cei ce au încă vie în minte opera marelui HARET ; *pentru cei ce se pot*

întoarce cu gândul la seria glorioasă de mari dascăli, ce au ilustrat catedre și școli; pentru toți aceștia nu e de conceput că învățământul nostru ar fi condamnat să se destrame, că semi-doctismul generalizat ar rămâne să fie singurul țel ce-și va mai putea propune să atingă și că chemarea spre apostolat va să dispară la profesorimea noastră de toate gradele, înnăbușită de tiranisiri și desconsiderare, de lipsuri elementare și de mizerie prelungită.

Cât despre voi, harnici concurenți ai Concursului «Gazetei Matematice», voi aveți la îndemână una din cele mai interesante pilde a grijei vii, atente și desinteresate pentru instrucția și educația tineretului, în însăși existența susținută și în realizările «Gazetei», ca și în sprijinul de care ea se bucură din partea conducerii Ministerului Educației Naționale, astăzi mai mult ca oricând în cei 50 de ani de când există. Așa dar, dacă și voi, în loc să vă opriți la eventualele scăderi din situația de astăzi, vă veți lăsa pătrunși de pildele de dragoste pentru tineret, de muncă desinteresată și entuziastă, cu sacrificii continui, pe care le dă asociația noastră trecută de jumătate de secol, nu descurajare și neîncredere, ci siguranță și elan tineresc trebue să vă umple sufletele. Pentru aceasta n'aveți decât să vă ridicați din când în când ochii spre cerurile Gazetei *și să prindeți imaginile celor* 4 Evangheliști *ai ei, așa cum au ajuns până la voi, încadrate în falduri de legendă, ce nu cuprinde în fond decât adevăruri tot atât de pure ca și cele pe care le stabilește știința noastră tutelară: matematica. Și* Ion Ionescu, *inginerul cu așa de mare renume, profesorul legendar, temut, dar unanim respectat și iubit; și* George Țițeica, *ilustrul savant cu reputație universală, neîntrecut dascăl și neostenit patriot, cu înfățișare senină și cu suflet atât de cald; și* Andrei Ioachimescu, *captivantul profesor de mecanică, desăvârșit inginer, model de probitate, de bunătate și de omenie; și* Vasile Cristescu, *inginerul distins, harnic cercetător pe ogorul matematicilor elementare, atât de devotat corespondenților* Gazetei, *toți patru, în tot ce-au realizat în carierele lor strălucite, în lungul lor apostolat, ca și prin această* Gazetă, *e ușor de descifrat că au avut ca principale fire conducătoare: prețuirea mai presus de toate a* adevărului *și practica neostenită a* omeniei, *a acelei omenii care a fost caracteristica primordială a nației noastre și care nu poate fi concepută fără buna credință.*

Destinați să duceți și voi mai departe spiritul și realizările generațiilor precedente, dragi corespondenți aleși ai Gazetei Matematice, *să prețuiți și voi mai presus de orice* adevărul *nealterat și* bunacredință *fără interpretări alambicate, pentru ca atunci când lumea se va așeza și va reveni la un climat de pace și libertate, să puteți aduce și voi un aport pozitiv la civilizarea lumii și la progresul neamului și țării românești.*

In opera trainică a Gazetei Matematice, *de instruire și de educare a tineretului studios, practica bunăcredinței totale, ca și cultul adevărului întreg, nu numai a celui științific, matematic, dar și din toate manifestările vieții, au fost și rămân pietrele unghiulare, pe care le-au voit cei patru* Evangheliști *și la care ținem neapărat noi toți. In împrejurările de astăzi, când minciuna și reaua credință se tot întind peste omenirea obosită, în închinarea de viață lungă și înfloritoare pe care i-o facem* Gazetei *noastre, să punem deci cu toții accentul, în special, pe atributele ei de instituție dedicată adevărului și omeniei.*

Trăiască Gazeta Matematică.

Aplauze puternice au încheiat frumoasa cuvântare a d-lui Ing. D. Stan. Asistența închină un pahar cu vin pentru *Gazeta Matematică.*

Cuvântul este acum luat de d-l Ing. I. S. ANTONIU:

Domnilor Membri, iubiți Corespondenți,

Gazeta Matematică se sprijină atât pe o puternică tradiție, cât și pe devotamentul și sacrificiile membrilor săi. In calitate de delegat al « G. M. », țin să aduc acum mulțumiri tuturor celor care au susținut Societatea noastră.

Prima noastră mulțumire se îndreaptă către d-l Profesor PETRE MIRESCU, *pentru ajutorul moral și material adus* Gazetei Matematice.

(Aplauze puternice întăresc mulțumirile aduse de d-l I. S. ANTONIU d-lui Prof. PETRE MIRESCU).

D-l Profesor MIRESCU, *în calitate de Secretar General al Ministerului Educației Naționale, a readus aminte profesorilor de liceu, de existența « Gazetei Matematice », arătând rolul important pe care-l joacă în ridicarea nivelului matematic al alevilor liceelor noastre ; prin aceasta d-sa a făcut ca « Gazeta Matematică » să pătrundă în mâinile multor elevi, viitori corespondenți ai « G. M. », iar mai târziu, poate, viitori matematicieni și ingineri.*

In plus d-l Prof. P. MIRESCU *a pus la dispoziția « G. M. » hârtia necesară apariției, acum când procurarea acestui material este o problemă dintre cele mai grele.*

Tot d-sale trebue să-i mulțumim pentru găzduirea a trei concurenți la liceul Matei Basarab, prin bunăvoința d-lui director al liceului, ION TOTOI.

Mulțumim de asemenea d-lui Ing. I. CHIȚULESCU *pentru procurarea de bilete de tren dus și întors pentru candidați și d-lui Rector* PETRULIAN, *pentru punerea la dispoziție a sălilor necesare ținerii concursului.* (Asistența aplaudă îndelung).

Pentru grija tipăririi « Gazetei Matematice » și apariția sa la timp, precum și pentru organizarea acestei reuniuni și gustări comune, aducem mulțumiri neobositului Ing. GH. ILIESCU. (D-l Ing. GH. ILIESCU este viu aplaudat de toți participanții).

Tot acum menționăm frumosul gest al d-lui Avocat AL. AL. ROȘU, *care ne-a dăruit vinul bun pentru gustarea de azi și d-lui Ing.* D. STOICA-MOȘ CRĂCIUN *pentru țuica sa aducătoare de energie și voie bună.* (Se aplaudă cu un brio bine susținut. Se cere ca aceste daruri să intre în tradiția *Gazetei Matematice*, urmând ca în anii viitori d-nii D. STOICA și AL. AL. ROȘU să fie executați fără milă. O parte din asistență este mirată de ce vinul d-lui ROȘU este *alb ;* se fac chiar propuneri pentru schimbarea numelui lui AL. ROȘU în ALB-ROȘU).

Dar d-l I. S. ANTONIU continuă:

Am observat cu toții admirabilul aranjament al acestei încăperi, masa veselă, florile parfumate și prin aceasta am bănuit intervenția unor mâini femenine.

In adevăr, toate acestea se datoresc activității d-nei OTILIA GEORGESCU-ROEGEN *și d-nelor* ALEXANDRA BĂDULESCU *și* ANA IOAN, *cărora le aducem mulțumirile noastre.* (Aplauze prelungite).

Menționez de asemenea cu această ocazie, frumoasele cuvinte trimise de d-l Prof. PETRE SERGESCU, *dela Paris, unde se află în prezent : « Sunt cu tot sufletul în mijlocul dv. și dorese fierbinte ca scumpa noastră « Gazetă » să învingă toate greutățile și să meargă mereu înainte pentru binele Științei și Școalei Românești ».*

In plus vă aduc la cunoștință că d-l Prof. PETRE SERGESCU, *în toate împrejurările prezintă « Gazeta Matematică » în cercurile matematice din străinătate, arătând im-*

portanța și rolul important ce-l are în ridicarea nivelului matematic din România. (Asistența închină un pahar cu vin în sănătatea d-lui Prof. P. SERGESCU).

D-l Ing. I. S. ANTONIU încheie cuvântarea sa, mulțumind Comisiunii examinatoare și candidaților și urând tuturor celor prezenți viață lungă și fericită și la anul viitor o masă mare comună, prezidată de d-l PETRE MIRESCU.

(Aplauze vii și prelungite întăresc mulțumirile și urările d-lui Ing. I. S. ANTONIU). In replică răspunde d-l Avocat AL. AL. ROȘU:

Se știe că cine intră la « Gazeta Matematică », nu primește nimic, ci trebue să dăruiască ceva.

Unii membrii dau probleme, alții corectează soluțiile etc.; eu dau vinul, d-l STOICA *dă țuica, fiecare după aptitudinile sale.* (Aplauze frenetice, aclamații; d-l D. STOICA-MOȘ CRĂCIUN râde în barba-i rară; în realitate D. STOICA este complet ras; se poate deci susține că are barba rară, întru cât un *Moș Crăciun* fără barbă nu se poate concepe).

In încheiere, d-l AL. AL. ROȘU promite că-și va cumpăra o vie pentru a putea satisface tradiția ce s'a creiat de a dărui vinul trebuitor meselor *Gazetei Matematice.*

Asistența ia cu mulțumire act de acest angajament și așteaptă cu încredere realizarea lui cât mai neîntârziat.

Din partea elevilor vorbește d-l RADU SPIRU-HARET:

Domnilor Profesori, Domnilor membri ai « Gazetei Matematice »,

Cu profundă emoție iau cuvântul în numele candidaților, pentru a vă exprima întreaga noastră gratitudine, de cinstea pe care ne-o faceți și dragostea cu care ne înconjurați, chemându-ne în mijlocul Dv. după fiecare concurs anual al « Gazetei ».

Noi cei tineri și ca noi întreaga știință matematică românească în devenire, vă suntem recunoscători pentru străduințele și desinteresarea cu care luptați spre a ține sus și a face să strălucească, ca în trecut, farul luminos și adesea inaccesibil, far ce reprezintă pentru noi « Gazeta Matematică ».

Eu personal, găsindu-mă în ultima clasă de liceu, am cinstea pentru ultima dată, să apar în fața Domniilor-Voastre în calitate de concurent, vă făgăduesc și cred că sunt în sentimentul tuturor colegilor, ca și mai departe să urmăresc linia de corectitudine, muncă desinteresată și abnegație, pe care am învățat-o dela Dv. până în ziua când vom fi socotiți demni de a ne alătura Domniilor-Voastre, pentru ca cu puteri unite, să ducem mai departe făclia științei matematice românești spre binele și propășirea iubitei noastre patrii.

D-lor Profesori, vă mulțumesc încă odată în numele colegilor mei și al meu și vă urez să trăiți, la mulți ani.

Frumoasa cuvântare a d-lui RADU SPIRU-HARET este îndelung aplaudată de întreaga asistență.

Urmează d-l Inspector Școlar GH. D. SIMIONESCU, care rostește următoarele:

Doamnelor și Domnilor,

Imi permiteți a vă face o propunere. « Gazeta Matematică » a fost întemeiată de 10 ingineri și profesori și susținută de patru stâlpi.

In prezent nu avem decât un singur stâlp, în persoana d-lui General GH. BUICLIU, *ales la aniversarea a 40 de ani de existență a « G. M. ».*

Propun de a i se alătura un nou stâlp și anume pe d-l Ing. D. STOICA-MOȘ CRĂCIUN *pentru devotamentul, sacrificiile făcute și nețărmurita dragoste ce a arătat « Gazetei Matematice ».*

Asistența ratifică propunerea d-lui GH. D. SIMIONESCU prin aplauze puternice, urale și strigăte *Trăiască Moș Crăciun.*

Ca o completare a celor spuse de d-l GH. D. SIMIONESCU, d-l Ing. I. S. ANTONIU propune ca numărul stâlpilor să fie mărit la trei, deoarece numai astfel construcția *Gazetei Matematice* va avea stabilitatea cerută de Mecanică și Rezistență.

Noul stâlp propus este d-l Prof. Ing. D. STAN, cunoscutul autor al *cuvântărilor morale.*

Propunerea este primită cu mult entuziasm în aplauzele unanime ale asistenței.

A urmat apoi producția artistică a candidaților.

Sub comanda d-lui G-ral GH. ILIEANU se improvizează pe loc un cor al candidaților, întărit și de unii membrii ai *G. M.*, d-nii RADU ȚIȚEICA, ȘERBAN ȚIȚEICA, I. S. ANTONIU, Colonel E. IACOB, IONESCU-ȚIU, I. C. VASILIU, FL. PĂSĂRICĂ, Comandor A. STAN, V. GRIGORCEA și subsemnatul. (Vă rog să mă credeți că glasul acela răguşit și fals nu era chiar al meu).

S'au executat următoarele bucăți:

1. *Gaudeamus igitur.* (Auzind aceste fraze latinești, elevii din cl. IV-a, cărora li s'a dat la concurs o problemă în care interveneau fraze latinești, au crezut că este vorba de o nouă problemă și s'au ascuns care pe unde au putut, hotărîndu-se să plece apoi imediat în munți).

2. *De-ar fi mândra în deal la vie.* (D-l Avocat AL. AL. ROȘU se gândea ce bine o să fie după ce o să-și ia *vie* și o să *vie* și mândra).

3. *S'a dus cucul de pe-aici.* (Cred și eu că s'a dus sărmanul cuc, după ce a ascultat un asemenea cor).

4. *La fântâna cu găleată.* (Cântecul a produs vii proteste în asistență: *Jos cu fântâna, Trăiască d-l Roșu, Trăiască Moș Crăciun*).

5. *A ruginit frunza din vii, De ce nu vii, de ce nu vii.* (Auzind acest cântec, un mecanic de pe o locomotivă a crezut că este invitat la masa *Gazetei Matematice* și din grabă a intrat cu locomotiva pe peronul gării de Nord, fapt autentic. Ceea ce i se poate reproșa acestui mecanic, este că nu a putut întoarce complet locomotiva și urca cu ea scara până la etajul I).

6. *Pe cărare sub un brad, Șade un voinic supărat.* (Ar fi putut oare să fie vesel bietul voinic după ce a auzit atâtea discursuri).

Dintre concurenții ce au făcut parte din cor, am remarcat pe d-ra SANDA M. HANGAN, a cărei voce făcea un contrast plăcut față de restul corului.

Cât despre efectul total muzical obținut, se putea spune: *puțini în cor, mulți ca decor.*

Menționăm tot în cadrul producției artistice, declamațiile făcute de d-l RADU SPIRU HARET într'un cerc mai restrâns: o amuzantă poveste despre un automobil și o frumoasă poezie tristă de LAMARTINE.

Este ora 20 și 10 minute.

D-l G-ral GH. BUICLIU ridică ședința, mulțumind tuturor pentru participare, urând candidaților succes și ani mulți fericiți, iar membrilor *Gazetei* revedere la prima ședință, precum și la viitoarea masă comună cu d-l Prof. PETRE MIRESCU, Ministru.

Corul intonează *Mulți ani trăiască.*

Astfel se încheie al 37-lea *Concurs al « Gazetei Matematice ».*

ALEXANDRU STOENESCU.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1947

Deşi vremurile sunt nespus de grele, viaţa foarte aspră şi climatul necesar învăţăturii nefavorabil, trecând peste toate aceste piedici, datorită faptului că resorturile morale n'au slăbit, *Gazeta Matematică* a putut face faţă şi anul acesta datoriei de a continua tradiţia concursurilor sale anuale.

Aşa cum s'a anunţat la timp, concursul a început la 17 Aprilie în localul Şcoalei Politehnice.

Au fost admişi la concurs 50 de elevi dintre care 22 dela liceele civile şi 28 dela liceele militare. Din aceştia s'au prezentat la prima lucrare scrisă 38 de elevi. Regretăm că trebue să menţionăm şi anul acesta că din cei 12 absenţi numai 3 au socotit necesar să anunţe că nu pot lua parte la concurs, din motive de epidemie locală sau de boală.

Cu titlul de experienţă s'a renunţat la ideea lucrărilor scrise eliminatorii, urmând ca din constatările făcute anul acesta să se ajungă la o formulă întemeiată pe realităţi.

Examinarea orală a fost făcută în zilele de 18 şi 19 Aprilie, Comisiunea fiind formată din: d-na OTILIA GEORGESCU-ROEGEN pentru *algebră* la clasa a IV-a şi a V-a; d-l AURELIAN STAN, pentru *geometrie* la clasa a IV-a; d-l GH. D. SIMIONESCU pentru *geometrie* la clasa a V-a şi *algebră* la clasa a VIII-a; d-l C. IONESCU-ŢIU pentru *trigonometrie* la clasa a VI-a; d-l AL. PANTAZI pentru *geometrie* la clasa a VI-a; d-l N. GEORGESCU-ROEGEN pentru *algebră* la clasa a VII-a; d-l I. CHIŢULESCU pentru *geometrie descriptivă* la clasa a VII-a; d-l ŞERBAN GHEORGHIU pentru *geometria analitică* la clasa a VIII-a şi d-l AL. STOENESCU pentru *mecanică* la clasa a VIII-a.

In afară de membrii comisiei examinatoare, alţi membri ai *Gazetei* au urmărit cu atenţie desfăşurarea concursului, unii luând parte activă la examinare. Aceştia sunt: d-ra ALEXANDRA BĂDULESCU, d-na MARIANA BRATU, d-ra MARGARETA CARACUDOVICI, d-ra ANA ST. IOAN şi d-nii: Ing. I. S. ANTONIU, G-l G. BUICLIU, Ing. AL. BUNESCU, Ing. C. CIORĂNESCU, Prof. N. CIORĂNESCU, Prof. VIRGIL CLAUDIAN, Prof, N. GAIU, Ing. GH. ILIESCU, Prof. C. IONESCU-BUJOR, Prof. HAR. P. IONESCU, G-l G. LITEANU, Prof. N. N. MIHĂILEANU, Prof. AL. V. NICULESCU, Ing. GH. PĂTRAŞCU, Prof. TR. POPP, GH. PETRESCU, Av. AL. ROŞU, Ing. M. SARIAN, Ing.

D. STOICA, Ing. C. C. TEODORESCU, Prof. RADU ŢIŢEICA, Prof. ŞERBAN ŢIŢEICA, Ing. I. C. VASILIU.

Ca şi altă dată, au asistat şi persoane în afară de membrii *Gazetei* printre care: d-na Arhitectă VIRGINIA HARET şi d-nii I. B. FLORESCU, Ing. FL. NEDELCU şi Prof. E. TOPORĂSCU.

Ţinerea concursului în localul Şcoalei Politehnice din Bucureşti a început să capete consistenţă de tradiţie a *Gazetei.*

Acesta este primul concurs la care nu am mai avut cel puţin mângâerea să-l ştim în viaţă pe ultimul din cei patru stâlpi dela începuturile *Gazetei Matematice,* cel care i-a călăuzit mersul timp de o jumătate de veac, ION IONESCU.

Ca o notă generală a concursului din acest an, majoritatea examinatorilor au observat lipsa de exerciţiu a elevilor. Atât lucrările scrise cât şi răspunsurile orale au dovedit acest lucru. Ca note particulare: *a)* clasa a VIII-a s'a prezentat slab cu excepţia celui premiat şi celui menţionat, atât la geometria analitică cât şi la algebră; *b)* clasa a VII-a, prin contrast, s'a prezentat aproape în întregime bine şi a cucerit patru premii şi două menţiuni; *c)* clasa a VI-a s'a prezentat în general slab la geometrie; *d)* clasa a IV-a şi a V-a s'a prezentat mai bine la oral decât la scris.

In apreciere s'a ţinut seamă de condiţiile de şcolaritate şi de viaţă din acest an şi preţuind şi, dragostea cu care elevii au învins greutăţile pregătindu-se pentru concurs, s'a ajuns la următoarea clasificare:

1. Premiul I a fost acordat fără ezitare d-lui C. C. CORDUNEANU, elev în clasa a VII-a a Colegiului Naţional „N. Filipescu" dela Predeal, pentru cunoştinţele sale întinse şi sigure dovedite la ambele probe orale, excelenta lucrare de geometrie descriptivă şi o bună lucrare de algebră. I se dă ca premiu [1]: *Medalia comemorativă* şi volumele: Academia Română: *Oeuvres* de GEORGES TZITZEICA Tome I; SC. FOTINO: *Contribuţiuni la studiul acusticei marilor săli. Gazeta Matematică,* Vol. Jubilar II; A. G. IOACHIMESCU: *Mecanica raţională*; I. IONESCU: *Beton armat;* V. MARIAN: *Elementele lui Euclid* Vol I, II şi III.

---

1) Premiile se pot ridica dela sediul Societăţii *Gazeta Matematică* începând dela 16 Iunie a. c. în fiecare zi de lucru între orele 8 şi 13.

In aceste premii este cuprins şi premiul «LT. COL. GH. TĂNĂSESCU», conform regulamentului acestui premiu.

2. Premiul al II-lea a fost obţinut de d-l RADU SP. HARET, elev în clasa a VIII-a a Liceului Francez din Bucureşti, pentru foarte bune probe la scrisul de mecanică şi oralul de algebră, proba orală bună la mecanică şi o bună lucrare de algebră. I se dă ca premiu *Medalia comemorativă şi volumele:* SC. FOTINO: *Contribuţiuni la studiul acusticei marilor săli; Gazeta Matematică* Vol. XXXII; A. G. IOACHIMESCU: *Mecanica Raţională;* V. MARIAN: *Elementele lui Euclid* Vol. I, II, III; N. N. MIHĂILEANU: *Transformarea prin inversiune.*

3. Premiul al III-lea, s'a cuvenit d-lui PETRE A. CERNESCU, elev în clasa a VI-a a Liceului „En. Văcărescu" din Târgovişte, pentru probele foarte bune de trigonometrie şi bune la geometrie. I se dă ca premiu: A. ANGELESCU: *Lecţiuni de calcul diferenţial: Gazeta Matematică* Vol. XXXVII; *Gazeta Matematică* Vol. Jubilar II; I. IONESCU: *Beton armat*; I. IONESCU: *Maxime şi minime geometrice*; N. N. MIHĂILEANU: *Raportul anarmonic.*

4. Premiul al IV-lea a revenit d-lui ION T. MUNTEANU, elev în clasa a VII-a a Colegiului Naţional „N. Filipescu" dela Predeal, pentru o foarte bună probă orală la algebră şi ambele probe foarte bune la geometria descriptivă. I se dă ca premiu: A. ANGELESCU: *Lecţiuni de calcul diferenţial;* SC. FOTINO: *Geometria descriptivă; Gazeta Matematică:* Vol. XXXVII; N. N. MIHĂILEANU: *Transformarea prin polare reciproce:* G. ŢIŢEICA: *Culegere de probleme de geometrie analitică.*

5. Premiul al V-lea s'a acordat d-lui MIRCEA IOSIFESCU, elev în clasa a VII-a a liceului „Sf. Petru şi Pavel" din Ploeşti, pentru probele excelente de geometrie descriptivă şi probele bune de algebră. Păcat că a fost coborît în clasificare de probele de algebră, dar sperăm că faţă de promisiunile din anul trecut să-şi recâştige locul la viitorul concurs. I se dă ca premiu: V. CRISTESCU: *Culegere de probleme de trigonometrie, partea III; Gazeta Matematică* Vol. XXXVII; I. IONESCU: *Beton armat*; I. IONESCU: *Maxime şi minime geometrice;* N. N. MIHĂILEANU: *Corespondenţa omografică.*

6. Premiul al VI-lea a fost obţinut de d-l PETRE P. TEODORESCU elev în clasa VII-a a liceului „Matei Basarab" din

București, pentru lucrarea de geometrie descriptivă și ambele probe orale foarte bune. I se dă ca premiu: SC. FOTINO: *Contribuțiuni la studiul acusticei marilor săli; Gazeta Matematică* Vol. jubilar I; și Vol. XXXVII; I. IONESCU: *Maxime și minime geometrice*; N. N. MIHĂILEANU: *Corespondența omografică.*

7. Al șaptelea și ultimul premiu a fost acordat unuia din cei mai tineri candidați, elevului EMIL FL. DABIJA din clasa a IV-a a Colegiului Național „N. Filipescu" dela Predeal, pentru probele mai mult decât bune la algebră și bune la geometrie. Sperăm că la viitoarele concursuri să urce pe scara premiilor. I se dă ca premiu: *Gazeta Matematică* Vol. XXXII; Vol. jubilar I; V. HERBERT: *Traité d'algèbre;* N. N. MIHĂILEANU: *Transformarea prin inversiune.*

Pe lângă premiile de mai sus s'au acordat mențiuni elevilor care au avut o parte din probe foarte bune, însă au fost lipsiți de omogeneitatea ce se pretinde unui premiant.

Iată mențiunile acordate, pe clase:

Clasa a V-a: VASILE V. BĂGHINĂ (liceul militar Craiova) pentru ambele probe de algebră; IOAN GH. FĂCĂOARU (Colegiul Național „N. Filipescu" Predeal, pentru ambele probe orale și în special pentru cea de geometrie; GH. I. RISTEA (Liceul „Matei Basarab" București) pentru oralul de algebră și lucrarea scrisă de geometrie.

Clasa a VI-a: MIRCEA VASILIU (liceul militar Craiova) pentru trigonometrie.

Clasa a VII-a: ION N. MĂNCESCU (Colegiul Național „N. Filipescu" Predeal) pentru ambele probe orale; CONST. V. ROȘU (Colegiul Național „N. Filipescu" Predeal) pentru ambele probe orale, în special pentru cea de algebră.

Clasa a VIII-a: IOAN C. UDREA (Liceul Militar Craiova) pentru oralul de algebră. La toți aceștia li se dă câte un volum *Gazeta Matematică* Vol. I jubilar și broșura N. N. MIHĂILEANU: *Transformări prin polare reciproce.*

Privind către zarea timpului cu încredere, să nădăjduim că viitorul concurs va fi scutit de cel puțin o parte din greutățile întâmpinate acum.

Incheiem aducând mulțumiri d-lui Rector al Școalei Politehnice pentru găzduirea ce ne-a dat, Direcțiunii Liceului Matei Basarab

pentru găzduirea pe care a făcut-o concurenţilor din provincie precum şi Direcţiunii Generale a C. F. R. care a dat bilete gratuite de tren concurenţilor care nu aveau mijloace băneşti să şi le procure.

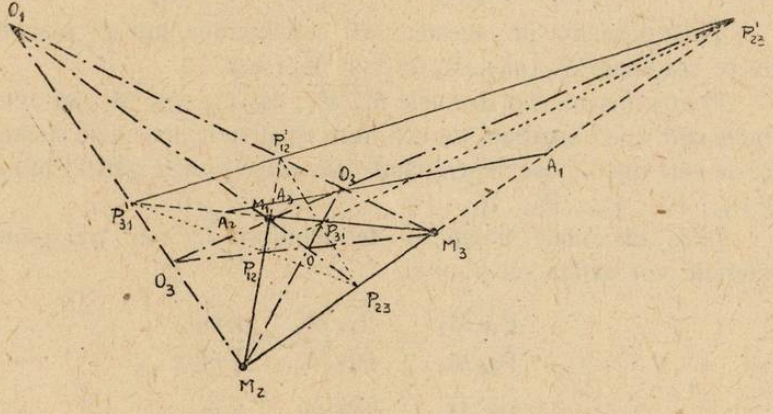
DELEGAT PENTRU RAPOARTE,
GH. D. SIMIONESCU.

POZIŢII DE ECHILIBRU RELATIV IN PROBLEMA ATRACŢIEI NEWTONIENE A DOUĂ PUNCTE MATERIALE

Lăsând la o parte studiul dinamic al mişcării a două puncte materiale în ipoteza unor forţe de interacţiune variind după legea lui NEWTON, vom pune în evidenţă o categoriè de puncte caracteristice, legate numai de mărimea şi poziţiunea maselor active.

Fie M_1 (m_1) şi M_2 (m_2) două puncte materiale fixe, acţionând atractiv sau repulsiv, după legea lui NEWTON, amândouă într'un fel sau în feluri deosebite, asupra unui alt punct material P (m) situat pe axa lor.

Ne propunem a determina masa şi poziţia în care, punctul material P rămâne în echilibru sub acţiunea maselor din M_1 şi M_2.



Distanţele $\overline{PM_1}$ şi $\overline{PM_2}$ trebuind să satisfacă ecuaţiunea de condiţie:

$$\frac{f \cdot m \cdot m_1}{\overline{PM_1}^2} = \frac{f \cdot m \cdot m_2}{\overline{PM_2}^2}$$

se obţin pe axa considerată, ca soluţii ale problemei, două puncte P_{12} şi P'_{12} ale căror distanţe la M_1 şi M_2 verifică rapoartele:

$$\frac{\overline{P_{12}M_1}}{\overline{P_{12}M_2}} = -\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}; \quad \frac{\overline{P'_{12}M_1}}{\overline{P'_{12}M_2}} = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}.$$

Din expresiunea acestor rapoarte sunt de tras următoarele prime concluziuni:

1°. Punctele P_{12} şi P'_{12} se găsesc respectiv în interiorul şi în exteriorul segmentului $\overline{M_1M_2}$.

2°. Punctele P_{12} reprezintă poziţia de echilibru a unei mase materiale atrase simultan, sau respinsă simultan de masele din M_1 şi M_2. O numim pentru aceasta poziţia de echilibru interioară. Punctul P'_{12} reprezintă poziţia de echilibru a unei mase atrasă de masă din M_1 şi respinsă de masa din M_2 simultan, sau invers. Numim pentru aceasta punctul P'_{12} poziţie de echilibru exterioară.

3°. Cele două poziţiuni de echilibru sunt independente de valoarea coeficientului de atracţie f şi de mărimea masei solicitate m.

4°. Poziţia de echilibru interioară este mai apropiată de masa cea mai mică, iar poziţia de echilibru exterioară este situată de partea masei celei mai mici:

Într'adevăr punând $m_2 > m_1$, rezultă din rapoartele precedente:

$$\overline{P_{12}M_1} < \overline{M_2P_{12}} \quad ; \quad \overline{P'_{12}M_1} < \overline{P'M_2}.$$

Ţinând seama de acestea, să considerăm într'un plan trei puncte materiale $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$ şi $M_3(m_3)$.

Pentru fiecare din dreptele $\overline{M_1M_2}$; $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_1}$, să determinăm câte două poziţiuni de echilibru relative la sistemele elementare de câte două mase, însemnând cele şease puncte astfel obţinute cu P_{12}, P'_{12}; P_{23}, P'_{23}, P_{31}, P'_{31}.

Între distanţele poziţiilor de echilibru la cele trei puncte materiale vor exista relaţiunile:

$$-\frac{\overline{P_{12}M_1}}{\overline{P_{12}M_2}} = \frac{\overline{P'_{12}M_1}}{\overline{P'_{12}M_2}} = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}$$

$$-\frac{\overline{P_{23}M_2}}{\overline{P_{23}M_3}} = \frac{\overline{P'_{23}M_2}}{\overline{P'_{23}M_3}} = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_3}}$$

$$-\frac{\overline{P_{31}M_3}}{\overline{P_{31}M_1}} = \frac{\overline{P'_{31}M_3}}{\overline{P'_{31}M_1}} = \frac{\sqrt{m_3}}{\sqrt{m_1}}.$$

Din aceste proprietăți se deduc cu ușurință următoarele teoreme de geometrie.

Teorema I. *In triunghiul maselor, cevienele care unesc una din mase cu poziția de echilibru interioară a celorlalte două, sunt concurente.*

Teorema II. *Grupurile de câte trei poziții de echilibru:* P'_{23}, P_{31}, P_{12}; P'_{31}, P_{12}, P_{23} *și* P'_{12}, P_{23}, P_{31} *în care una din poziții este exterioară, iar celelalte două sunt interioare, sunt colineare.*

Teorema III. *Cele trei poziții de echilibru exterioare sunt colineare.*

Teorema IV. *Grupurile de câte trei drepte* $M_1 P_{23}$, $M_2 P'_{31}$; $M_3 P'_{12}$; $M_1 P'_{23}$, $M_2 P_{31}$, $M_3 P'_{12}$; *și* $M_1 P'_{23}$, $M_2 P'_{31}$, $M_3 P_{12}$ *sunt concurente în trei puncte* O_1, O_2 *și* O_3.

Teorema V. *Mijloacele* A_1, A_2 *și* A_3 *ale distanțelor pozițiunilor de echilibru relative la fiecare din cele trei sisteme elementare de câte două mase sunt colineare.*

Teorema VI. *Sistemele de câte două puncte materiale și pozițiunile respective de echilibru, împart dreptele lor suport, în raporturi armonice.*

Teorema VII. *Grupurile de câte patru puncte* $M_2 O P_{31} O_2$, $M_3 O P_{12} O_3$ *și* $M_1 O P_{23} O_1$ *formează pe dreptele lor suport, diviziuni armonice.*

Teorema VIII. *Grupurile de câte patru puncte* $M_2 O_3 P'_{31} O_1$; $M_3 O_1 P'_{12} O_2$ *și* $M_1 O_2 P'_{23} O_3$ *formează pe dreptele lor suport, diviziuni armonice.*

Toate aceste proprietăți geometrice se deduc ușor direct prin considerarea figurei lui D'ALEMBERT [1].

ING. M. PĂTROIANU.

RAPORT PENTRU PREMIUL DE ALGEBRĂ „A. G. IOACHIMESCU"

Potrivit art. 2 și 3 din regulamentul său, acest premiu se decerne autorului român, elev de liceu, pentru lucrările referitoare la algebră, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

1) A se vedea G. ȚIȚEICA. *Culegere de probleme de geometrie.* **Problema 14, Cap. XI.**

Cercetând activitatea corespondenților elevi de liceu la *Gazeta Matematică*, Vol. LI, am constatat că niciunul nu a publicat articole sau note de algebră. De asemenea, în ceea ce privește problemele de algebră, propuse sau rezolvate, am constatat că niciunul din corespondenții elevi de liceu nu s'a ridicat la un nivel care să justifice acordarea premiului.

In consecință, Comisiunea este de părere și propune să nu se acorde anul acesta premiul de algebră « A. G. IOACHIMESCU ».

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Ing. I. S. ANTONIU, G-l GH. BUICLIU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 24 Februarie 1947.

NOTE MATEMATICE

19. *Un punct remarcabil din planul unui triunghiu.* 1°. In triunghiul ABC, înscris în cercul (O) de rază R și având pe G și H ca baricentru și ortocentru, se notează cu O_a, O_b, O_c centrele cercurilor BOC, COA, AOB.

Dreptele AO_a, BO_b, CO_c *concură în conjugatul izogonal* O_q *a centrului* O_9 *a cercului lui* EULER *a triunghiului* ABC.

In adevăr AO_9 întâlnește mediatricea Δ_a a laturei BC într'un punct A' așa în cât

$$OA' = AH = 2R\cos A.$$

Dar
$$OO_a = \frac{R}{2\cos A}$$

deci
$$OA' \times OO_a = R^2 = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2$$

M și N fiind punctele în care Δ întâlnește pe (O).

Dreptele AA' și AO_a sunt conjugate armonic în raport cu bisectoarele AM, AN ale unghiului A și deci conjugate izogonal față de unghiurile (AO, AH) și (AB, AC). Dreptele BB' și BO_b, CC' și CO_c se bucură de proprietăți analoage, deci teorema este demonstrată.

Observațiuni. a) Punctul O_9 este pe hiperbola echilateră circumscrisă triunghiului ABC și trecând prin O.

b) Teorema dela 1° se generalizează în felul următor: *Fiind date un triunghiu* ABC *şi două puncte* Q, Q', *conjugate isogonal în* ABC, *conjugatele armonice ale dreptelor* AP, BP, CP (P *fiind un punct arbitrar în plan*) *în raport cu* AQ *şi* AQ', BQ *şi* BQ', CQ *şi* CQ' *concură în conjugatul isogonal* P' *al lui* P [1].

2°. In triunghiul special în care [2]

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5R^2$$

punctul O_9 este pe circonferinţa (O), iar O_9 este aruncat la infinit în direcţia axei parabolei de focar O_9 înscrisă triunghiului ABC, dreptele AO_a, BO_b, CO_c fiind paralele.

Mai adăugăm încă următoarele proprietăţi ale acestui triunghiu special:

1. *Cercul circumscris triunghiului tangenţial este transformatul cercului* O_9 *în inversiunea* (O, R^2); *el coincide cu cercul ortocentroidal* (Ω), *descris pe* GH *ca diametru şi face parte din fascicolul cercurilor* (O) *şi* (O_9).

2. *Punctele* O_9, O_a, O_b, O_c *sunt pe un acelaşi cerc de centru* G *şi de rază* R/3 *tangent interior cercului* (O).

3. *Punctul lui* LEMOINE *coincide cu complimentarul conjugat isogonal centrului de similitudine invers al cercurilor* (Ω) *şi* (O_a).

4. *Triunghiul podar al mijlocului segmentului* OO_9 *este asemenea triunghiului ortic.*

5. *Simetricele vârfurilor în raport cu laturile opuse, sunt pe o dreaptă* Δ *care trece prin punctul* k *al lui* LEMOINE [3] *şi punctele care împart înălţimele* AA', BB', CC' *în acelaşi raport* (— 2/3), *sunt pe o dreaptă* Δ", *perpendiculară pe* Δ' *în* k, *deci paralelă la* AO_a, BO_b, CO_c.

V. THÉBAULT.

20. *Notă asupra exerciţiului 37, Vol. XLIX, G. M.* Vom face câteva observaţiuni cu privire la ecuaţiunea

$$(a - x)^n = (x - b)^n. \qquad (1)$$

---

1) Această proprietate generală mi-a fost comunicată de d-l R. BOUVAIST.

2) V. THÉBAULT: *Gazeta Matematică*, Vol. XXX, pag. 283 şi *Mathesis*, Vol. XLVI supliment.

3) JOUNGMAN. *Educational Times*, 1915—238.

1°. Să presupunem pe a, b, n reali, n fiind întreg. Rezolvarea *completă* a ecuației se face extrăgând rădăcina a n — a din ambii membri

$$a - x = (x - b)\sqrt[n]{1}$$

$$a - x = (x - b)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$x = \frac{a + b\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}{1 + \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \quad (2)$$

Dacă $n = 2m + 1$, ecuația are o singură rădăcină reală, $x = \frac{a+b}{2}$, independentă de n.

Dacă $n = 2m$, ecuația are două rădăcini reale, independente de n, pe $x = \frac{a+b}{2}$ și pe $x = \infty$.

Rădăcina reală a ecuației este abscisa punctului comun de intersecție al curbelor

$$y = (a - x)^n \quad ; \quad y = (x - b)^n$$

care sunt parabole de ordinul n, prezentând inflexiuni în punctele de traversare a axei $x'x$, $(a, 0)$ și $(b, 0)$, sau minime în aceste puncte, după cum avem respectiv $n = 2m + 1$ sau $n = 2m$.

2°. Presupunând pe a, b imaginare, iar pe n tot real și întreg, rădăcinile ecuației (1) sunt date tot de formula (2). Evident însă că nu mai avem concluziunile cu privire la realitatea rădăcinilor și nici interpretarea geometrică dela punctul precedent.

3°. In general, rezolvarea ecuației

$$[P_m(x)]^n = [Q_p(x)]^n$$

în care P, Q sunt polinoame de gradele m și p, n fiind un întreg, se face tot prin extragerea rădăcinei a n — a din ambii membri. Având $m > p$, din ecuația

$$P_m(x) = Q_p(x)\sqrt[n]{1}$$

obținem mn rădăcini.

VIRGIL GHIȚESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE » DIN ANUL 1947

Probele scrise din 17 Aprilie 1947

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA IV-a

Algebra. I. Doi „aşi" ai clasei, matematicianul şi latinistul, pornesc să lucreze, fiecare în specialitatea lui, în viteză maximă, unul rezolvând probleme, iar celălalt traducând fraze latineşti.

Ei observă că, pe când cel dintâiu rezolvă o problemă, celălalt traduce numai $2\frac{1}{2}$ fraze.

După $1\frac{1}{2}$ ore de lucru, latinistul dă de un text mai greu, astfel că, în timp ce primul lucrează o problemă, el traduce numai 2 fraze.

După $3\frac{3}{4}$ ore de când au început întrecerea, se vede că diferenţa dintre numărul frazelor traduse cu totul şi numărul de probleme rezolvate, întrece cu 2 împătritul numărului de probleme ce în mod constant lucrează matematicianul pe oră.

Câte probleme desleagă primul pe oră?

Câte fraze traduce latinistul pe oră?

II. Se dă expresiunea:

$$E = LX^2 + MXY + NY^2,$$

unde, dacă se pune $X = \frac{4x - 3y}{5}$, $Y = \frac{3x + 4y}{5}$

se obţine o expresie de forma:

$$E = lx^2 + mxy + ny^2.$$

Să se calculeze expresiunile lui l, m, n şi să se arate că

$$l + n = L + N$$

$$4ln - m^2 = 4LN - M^2.$$

(Ambele chestiuni obligatorii).

OTILIA GEORGESCU-ROEGEN.

Geometrie în spaţiu. I. Se dau planurile P şi Q. In planul P se dă unghiul AOB şi cercul C, iar în planul Q se dă dreapta D.

1) Să se găsească pe dreapta D un punct P astfel încât unghiurile POA şi POB să fie egale.

2) Cum trebue aşezat planul Q, încât să nu se găsească pe el nici un punct P astfel ca unghiurile POA şi POB să fie egale?

3) Să se arate că există o sferă cu centrul pe planul Q, care să taie planul P după cercul dat C.

4) Care trebue să fie poziţia planului Q, astfel ca să nu existe o asemenea sferă?

II. Se dă un triunchiu de piramidă poligonală de înălţime h şi baze S şi s. Se uneşte un punct oarecare O de pe baza mare cu vârfurile A, B, a, b ale feţei ABab.

1) Să se arate că:

$$\text{volumul } Oab\text{A} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\text{S}}} \text{ volumul OAB}b.$$

2) Cu ajutorul relaţiei de mai sus şi ţinând seamă de piramidele în care se poate descompune trunchiul de piramidă dat, prin unirea punctului oarecare O, cu vârfurile A, B, C, D, ... L, M, N; a, b, c, ... l, m, n; ale bazelor, să se determine formula trunchiului de piramidă.

(Ambele chestiuni obligatorii).

ING. A. STAN.

CLASA V-a

Algebra. I. Se dau polinoamele:

$$P_1(m) = x^2 + (5m + 1)\,x - 5$$

$$P_2(m) = x^2 + (2m + 5)\,x + 2.$$

Se cere:

a) Să se găsească valorile lui m pentru care ecuaţiile în x

$$P_1(m) = 0 \quad , \quad P_2(m) = 0$$

au o rădăcină comună şi apoi să se rezolve.

b) Notând cu m_1 şi m_2 valorile lui m aflate la punctul (a), să se găsească valorile lui x pentru care:

$$\frac{P_1(m_1)}{P_2(m_1)} \qquad \frac{P_1(m_2)}{P_2(m_2)}$$

au valori de semne contrare.

II. Să se arate că dacă: $x + y + z = 0$, expresiunea $2(x^4 + y^4 + z^4)$ se poate pune sub forma unui patrat perfect.

(Ambele chestiuni obligatorii).

OTILIA GEORGESCU-ROEGEN.

Geometria. Se dau două cercuri ortogonale C şi C', cu centrele O şi O', care se taie în A şi B. Prin O se duce o dreaptă care taie cercul C în M şi N şi cercul C' în P şi Q (N în interiorul cercului C', iar P interior cercului C).

Perpendiculara dusă din O' pe dreapta MN întâlneşte cercul C' în punctele E şi F.

1°. Să se demonstreze că dacă se uneşte un capăt al diametrului EF cu un capăt al diametrului MN, dreapta rezultată trece sau prin A sau prin B.

2°. Să se arate că punctele M şi N sunt conjugate faţă de P şi Q (împart în acelaş raport segmentul PQ).

3°. Fie T unul din punctele în care cercul de diametru PQ taie cercul C. Să se demonstreze egalitatea de unghiuri

$$\sphericalangle MTP = \sphericalangle PTN = \sphericalangle NTQ.$$

4°. Cercul de diametru PQ este ortogonal cercului C.

Notă. Două cercuri sunt ortogonale când tangentele lor în unul din punctele de intersecţie, sunt perpendiculare.

G. D. SIMIONESCU.

CLASA VI-a

Geometria. *Problema I.* Se consideră un patrulater convex ABCD ale cărui diagonale AC şi BD se întâlnesc în L. Cercurile ABL şi CDL se întâlnesc în L şi M, cercurile ADL şi BCL în L şi N. Dreapta LM întâlneşte din nou cercurile ADL şi BCL în P şi Q respectiv, iar LN cercurile ABL şi CDL respectiv în Q' şi R. Se cere:

1. Să se arate ce devine figura printr'o inversiune având polul în L.

2. Să se deducă apoi că LM şi LN sunt conjugate armonic faţă de diagonalele AC şi BD.

3. Să se arate că avem:

$$MA \times QB = MB \times QA = \frac{1}{2} AB \times MQ$$

şi patru grupe de relaţii analoage, care se vor scrie.

Problema II. Se dă o piramidă exagonală regulată de latura a şi înălţime h. Din vârful A al exagonului de bază ABCDEF se duce perpendiculara AA' pe muchia SD. Să se afle în funcţie de a şi h lungimea acestei perpendiculare. Presupunând volumul piramidei constant şi egal cu V, să se determine a şi h în funcţie de V astfel ca lungimea AA' să fie maximă.

PROF. AL. PANTAZI.

Trigonometria. 1°. Să se stabilească identităţile:

$$(\cos^2 a + \sqrt{\cos 2a})^{1/2} + (\cos^2 a - \sqrt{\cos 2a})^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$(\sec^2 a + \sqrt{\sec^2 a + \operatorname{tg}^2 a})^{1/2} - (\sec^2 a - \sqrt{\sec^2 a + \operatorname{tg}^2 a})^{1/2} = \sqrt{2}.$$

2°. *a)* Fie $A_1 B_1 C_1$ triunghiul format de intersecţiile bisectoarelor unui triunghiu oarecare ABC cu cercul circumscris. Să se arate că suma proiecţiilor laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$ pe laturile respective ale triunghiului ABC este egală cu perimetrul triunghiului ABC.

b) In cazul când unghiul A este drept, proiecţia laturei $B_1 C_1$ pe BC este egală cu semisuma catetelor.

c) Ţinând seamă că $A + B + C = \pi$, să se stabilească relaţiile;

$$\sum \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = 0 \quad ; \quad \sum \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sum \sin A.$$

$$\sum \sin\frac{A-B}{4}\left(\cos\frac{C}{4} - \sin\frac{C}{4}\right) = 0 \quad ; \quad \sum \cos\frac{A-B}{4}\left(\cos\frac{C}{4} + \sin\frac{C}{4}\right) = \sqrt{2}\sum \cos\frac{A}{2}$$

3°. Intr'un triunghiu ABC cu toate vârfurile ascuţite şi $\hat{A} < \hat{B}$, ducem înălţimile AA_1 şi BB_1, să se arate că:

$$\frac{\overline{AA_1} - \overline{B_1B}}{\overline{AB_1} - \overline{A_1B}} = \frac{\overline{AB_1} + \overline{A_1B}}{\overline{AA_1} + \overline{B_1B}} = \operatorname{tg}\frac{C}{2} \quad ; \quad \frac{\overline{AA_1} - \overline{B_1B}}{\overline{A_1B} + \overline{AB_1}} = \operatorname{tg}\frac{B-A}{2}.$$

4°. Să se arate că:

$$\frac{1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x + 2\cos 8x}{1 - 2\cos 2x + 2\cos 4x - 2\cos 6x + 2\cos 8x} = \frac{\operatorname{tg} 9x}{\operatorname{tg} x}$$

(Chestiunea 3° sau 4° este la alegere).

ING. C. IONESCU-ŢIU.

CLASA VII-a

Algebra. 1. Se dă sistemul

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

în care se presupune

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Să se găsească cazurile în care soluţiile sistemului dat verifică sistemul

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = d_1$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = d_2$$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = d_3$$

şi să se rezolve.

2. Se dă expresiunea

$$E = \frac{e^{f(x)} - e^{g(x)}}{f(x) - g(x)}$$

şi se presupune

$$f(a) = g(a)\ ,\ f'(a) = g'(a), \ldots f^{(p)}(a) = g^{(p)}(a)\ ,\ f^{(p+1)}(a) \neq g^{(p+1)}(a).$$

Să se găsească prin regula lui HÔPITAL limita expresiunii E pentru $x \to a$ şi să se explice de ce această limită este independentă de p.

(Ambele chestiuni obligatorii).

N. GEORGESCU-ROEGEN.

Geometria descriptivă. Linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei a III-a a colii de hârtie şi la 150 mm. dela marginea de sus a paginei.

Prin punctul dat A (150, 70, 80)[1]), să se ducă o dreaptă care să facă un unghiu de 30° cu planul orizontal de proiecţiune, urma sa orizontală H găsindu-se pe linia pământului şi la stânga liniei de ordine a punctului A. Urmele planului P ∝ P', perpendicular pe mijlocul M al distanţei AH, fac între ele un unghiu Θ.

1. Printr'o rabatere să se determine adevărata mărime a unghiului Θ, precum şi a distanţei M α.

2. Printr'o schimbare de plan vertical de proiecţiune, să se determine unghiul pe care îl face planul P, cu planul orizontal de proiecţiune şi să se verifice rezultatul faţă de datele problemei.

3. Să se găsească pe urma verticală a planului P, un punct N, astfel în cât lungimea MN să fie egală cu o lungime dată *l*. — Discuţie.

Pe pagina a II-a a colii se vor arăta, pe scurt, procedeele urmate.

ING. I. I. CHIŢULESCU.

---

1) Cele trei numere din paranteză sunt: primul, distanţa liniei de ordine a punctului A dela marginea din stânga a paginei; al doilea, depărtarea lui A şi al treilea cota.

Cotele sunt date în milimetri.

CLASA VIII-a

Algebra. I. Fie $f(x) = 0$ o ecuație reciprocă de grad par și $\varphi(y) = 0$ ecuația ce se obține prin transformarea $y = x + \frac{1}{x}$.

Să se demonstreze că dacă $f(x) = 0$ are *toate* rădăcinile *imaginare*, iar $\varphi(y) = 0$ *toate reale*, atunci rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ se găsesc pe cercul cu raza $r = 1$.

II. Să numim ecuația *bireciprocă*, ecuația *reciprocă* ce prin substituția obișnuită

$$x + \frac{1}{x} = y$$

ne conduce la o ecuație tot *reciprocă*.

a) Să se determine forma generală a ecuațiilor *bireciproce* de gradul VI și VIII, care au coeficienții termenilor egali depărtați de extremi egali și de același semn.

(Deoarece se poate totdeauna împărți cu primul coeficient, se va presupune că acesta este 1).

b) Să se studieze complet ecuația bireciprocă de gr. VI și să se determine numărul maxim de rădăcini reale.

G. D. SIMIONESCU.

Geometria analitică. Axele Ox și Oy fiind perpendiculare se consideră hiperbola

$$(H) \qquad xy = 1$$

și cercul

$$(C) \qquad x^2 + y^2 + \lambda(x - a^2 y) - a^2 - \frac{1}{a^2} = 0,$$

în care a este constant, iar λ un parametru variabil.

1°. Să se arate că cercul (C) trece prin două puncte fixe A și A', diametral opuse pe hiperbola (H).

2°. Hiperbola (H) și cercul (C) au în afară de punctele A și A' alte două puncte comune M și N. Să se formeze ecuația dreptei MN.

Se va deduce apoi, că:

3°. Punctele M și N sunt diametral opuse pe cercul (C).

4°. Dreapta MN este paralelă cu normala în A sau A' la (H).

5°. Perpendiculara dusă din M pe AA' întâlnește a doua oară hiperbola (H) în N' diametral opus, pe (H), lui N.

Analog, perpendiculara dusă din N pe AA', întâlnește a doua oară hiperbola (H) în M', diametral opus lui M.

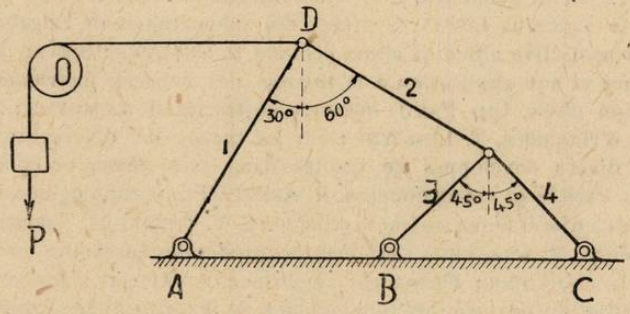
6°. Produsul distanțelor originei la două drepte MN, relative la două cercuri (C) ortogonale, este constant.

Ș. GHEORGHIU.

Mecanica. *Problema I.* Se dă într'un plan vertical, un sistem de patru bare 1, 2, 3, 4 articulate între ele şi articulate în punctele fixe A, B, C, bare ale căror unghiuri cu verticala sunt date de figură.

De vârful D este prins un fir orizontal, ce trece peste un scripete O şi susţine o greutate P.

Se cer eforturile în cele 4 bare.



Problema II. Un automobil străbate o şosea orizontală, rectilinie cu viteza de 72 km/oră. Şoferul observă un obstacol pe şosea în momentul când se află la o distanţă de 40 m. de obstacol şi frânează. Greutatea maşinii este P = 1500 kg., iar forţa de frânare F este orizontală şi poate fi luată F = 900 kg.

A putut fi evitat accidentul?

(Acceleraţia gravităţii se va lua $g = 10$ m/sec^2).

ING. AL. I. STOENESCU.

BIBLIOGRAFIE

Association Française pour l'avancement des sciences. 64me session. Paris. Congrès de la Victoire 20 au 26 Octobre 1945. Supplément au fascicule 9 (janvier 1947) de *l'Intermédiaire des Recherches Mathématiques.* A. DENJOY: Aperçu général de l'activité mathématique française sous l'occupation Allemande. G. VALIRON: Les travaux d'analyse mathématique publiés en France pendant l'occupation, J. HADAMARD: Le problème de DIRICHLET dans le cas hiperbolique. A. DENJOY: L'Arithmétisation du transfini. H. DELANGE: Fonctions entières et théorèmes taubériens M. JANET: Equations aux dérivées partielles, liens nouveaux avec quelques autres questions. P. LELONG: Sur les fonctions entières de deux variables complexes. Mlle JACQUELINE FERRAND: La représentation conforme. G. CHOQUET: Topologie de la représentation conforme. J. DIEUDONNÉ: Les fonctions continues P-odiques. F. TEISSIER DU CROS: Sur une classe de nombre transcendants signalée par M. VALIRON, à propos d'une généralisation du théorème d'ABEL. A CHATELET: L'Arithmétique et l'algèbre en France sous l'occupation. C. CHABANTY: Sur des résultats récents

de la théorie des points entiers, pseudo-entiers, et rationnels. G. BENNETON : Sur l'arithmétique des quaternions. F. CHATELET : Une méthode galoisienne en théorie des nombres. M. KRASNER : Généralisation et analogues de la théorie de GALOIS. A. GÉRARDIN : Système multigrade en nombres entiers et problèmes connexes. G. BOULIGAND : La géometrie et la topologie en France pendant l'occupation. J. HADAMARD : Composition des similitudes planes. P. MONTEL : Sur la géometrie finie des coniques. V. HLAVATY : La géométrie différentielle réglée. P. LIBOIS : Synthèse des axiomatiques de l'algèbre et des géometries projective affine et affine centrale. R. DEBEVER : Sur un problème d'equivalence et son application à la théorie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire. CH. PAUC : Mesures abstractes. T. LEMOYNE : Sur deux théorèmes d'HALPERN. T. LEMOYNE : Sur les classes de divers lieux et les ordres de divers enveloppes de droites dans les systèmes de coniques. G. CHOQUET : Variété et corps conexes. R. APERT : Etude topologique du voisinage d'une courbe C d'une surface algébrique S. V. THÉBAULT : Transmutations d'un tetraèdre. M. KRASNER : Certaines propriétés des ensembles ouverts non connexes. L. GAUTHIER : Géométrie algébrique. A. APPERT : Recherches sur une généralisation des groupes topologiques. M. FRECHET : Les contributions françaises recentes au calcul des probabilités et à la statistique mathématique. G. DARMOIS : Sur les regressions linéaires et paraboliques. P. LEVY : Trois théorèmes sur le mouvement brownien. M. DUMAS : Sur les lois de probabilités divergentes en la formule de FISHER. G. MALECOT : Le calcul des probabilités et la biologie mendelienne. E. MERWART : Sur la numération des millésimes préchrétiens.

Buletinul Politehnicii „Gh. Asachi" din Iaşi. Tom. I. Fascicola 2. Iulie-Decembrie 1946. Editura Politehnica „Gh. Asachi" din Iaşi. AL. C. CLIMESCU : Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité. GH. GHEORGHIEV : Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications. M. ST. BOTEZ : Sur une surface cerclée particulière. ADOLF HAIMOVICI : Sur une certaine déformation des congruences de sphères. MIRON NICOLESCO : Remarque sur le potentiel newtonien. AL. C. CLIMESCU : Sur les espaces à topologie transitive d'ordre *n*. A. MYLLER : Ecuaţii iterale lineare de ordinul al doulea cu coeficienţi constanţi. O. MAYER : Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions de variable complexe. GAETANO FICHERA : Sul problema di DINI-NEUMANN nel piano. C. P. BOGDAN : Sur l'enveloppe des familles planes des coniques. C. P. BOGDAN : Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire. D. I. MANGÉRON : Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. D. I. MANGÉRON : Notes de mécanique rationnelle. I. IRIMESCU : Calculs topographiques à la machine de calcul sans levier. VIRGILIU G. GHEORGHIU et N. CALINICENCO : Sur les corélations entre le p_H, la salinité et la concentration de l'oxigène dissout dans l'eau de la mer noir. I. N. CIOCHINĂ : Sur la variation du volume des éléménts participants dans une réaction chimique. I. N. CIOCHINĂ et C. CALISTRU : Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique. CONST. STRUB : Un artifice de calcul dans l'analyse chimique. EM. BOLDUR : Dentologie du chien. CESAR P. ANTONI et N. V. BOŢAN : La théorie du quadripôle appliquée au

moteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase. ŞTEFAN POPESCU: Sur l'amélioration des courges. C. SANDU-VILLE: Contribution à la connaissance des micromycètes de Moldavie.

Časopis pro Pěstováni Matematiky a Fgsiky (journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique Année 71). Praha 1946. J. KOROUS: On a generalization of FOURIER series. ST. SCHWARZ: A hypercomplex proof of the JORDAN-KRONECKER'S „Principle of reduction". ST. SCHWARZ: Contribution à la réductibilité des congruences binomiques. VL. KNICHAL: Sur une généralisation d'un théorème des MM. BLICHFELDT et VISSER dans la géometrie des nombres. VL. KNICHAL: Sur la distribution des mesures sur une sphère à *n* dimensions. A. KOTZIG: Sur les „translations K". V. HRUŠKA: Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires. Z. PIRKO: Sur le mouvement d'une figure plane variable. F. LINK: Exploration météorique de la haute atmosphère. I. ŠIMON: Electromagnetic waves on a wire surrounded by a dielectric cylinder. R. PISKA: Construction de la tangente et du centre de la courbure. V. ŠTĚPÁNSKY: Etude analytique et synthétique d'une courbe du troisième degré donnée par trois paires des points conjugués.

Intermédiaire des recherches mathématiques. (I. R. M.). Tome 2. Fascicule 7; juillet 1946.

Idem. Tome 3. Fascicule 9, janvier 1947.

Am subliniat apariţia acestui interesant periodic în bibliografia dela pag. 395, Vol. LI. De atunci numerele care s'au mai primit, au fost numai anunţate, fără vre-un sumar sau vre-o nouă bibliografie. Din constatarea acestor numere se vede că I. R. M. ia o desvoltare şi un dinamism special ale cărui scopuri le cităm după cum urmează, chiar din I. R. M.

« Aider les recherches mathématiques; renseigner sur toute question mathématique, quel qu'en soit le niveau ou la spécialité; faciliter les contacts entre les chercheurs et indiquer les specialistes; signaler les problèmes mathématiques non résolus et les sujets de recherches, même s'ils proviennent d'autres branches de la science; tenir au courant de l'activité mathématique; collaborer aux réalisations mathématiques d'intérêt collectif; contribuer aux échanges internationaux ».

D-l P. BELGODÈRE, care conduce publicaţia I. R. M., oferă pentru România abonamentele pentru anii 1945, 1946, 1947 egale cu *dublul abonamentului anual la Gazeta Matematică.* Acest abonament se plăteşte în lei chiar la Societatea *Gazeta Matematică.*

După cum se vede din enumărarea scopurilor I. R. M., această publicaţie interesează pe membrii Societăţii *Gazeta Matematică* şi poate interesa şi pe corespondenţii revistei *Gazeta Matematică.* De aceea primim avantajoasa ofertă a d-lui P. P. BELGODÈRE şi o comunicăm membrilor şi corespondenţilor societăţii noastre.

GH. B.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII Nr. 2 Aprilie 1947. V. ALACI: Câteva teoreme de algebră. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

A. GLODEN: Le centenaire de la découverte de Neptune par LE VERRIER (Extras).

A. GLODEN: Note concernant les travaux d'EDDINGTON. (Extras).

A. GLODEN: Sur la répartition spatiale et le nombre des étoiles fixes (Extras).

V. MARIAN — R. ŢIŢEICA: *Curs de fizică generală.* Vol. I. Mecanica. (Editura Lepage, Cluj, 1947, 184 pagini). Volumul de faţă reprezintă desvoltarea cursului ţinut în faţa studenţilor anului I ai Facultăţii de ştiinţe a Universităţii Reg. Ferdinand I din Cluj, de către autori şi anume partea I. referitoare la mecanică. Este un manual universitar, de care a fost lipsit mult timp învăţământul nostru superior. Autorii, distinşi membri ai Soc. *Gazeta Matematică*, ca şi editura şi Tipografia „Naţională" din Cluj au făcut un efort considerabil şi lăudabil, luând, în condiţiile grele de azi, iniţiativa tipăririi.

Volumul I după o introducere clasică, conţine capitolele: I: Cinematica. II: Studiul forţelor. III: Statica. IV: Lucru, Energie. V: Dinamica corpurilor rigide. VI: Gravitaţia universală, potenţial. VII: Mecanica corpurilor deformabile. VIII: Statica lichidelor. IX: Statica gazelor. X: Dinamica fluidelor.

Alcătuirea cursului este modernă. Autorii se folosesc de vectori şi de integrale, firește cu moderaţia necesară într'un astfel de curs. Sunt excelente paginile cu privire la masa grea şi masa inertă, principiul relativităţii clasice, forţele de inerţie, forţele CORIOLIS, dinamica sistemelor şi în special cele cu privire la giroscop, care lipsesc, de obiceiu, din cărţile obişnuite româneşti şi chiar şi din cele franceze. Menţionăm deasemenea pasajele cu privire la forţele intermoleculare, ecuaţia lui BERNOULLI şi contracţia vânei la lichide

Autorii se folosesc poate prea rar de aplicaţii biologice, cu toate acestea volumul se poate recomanda şi studenţilor dela ştiinţele naturale, medicină şi farmacie.

N'ar fi fost poate inutilă nici menţionarea unor date istorice, unul din autori fiind un cunoscut specialist al istoriei ştiinţelor. In special se pretindea menţionarea măcar a titlului lucrării fundamentale a lui NEWTON.

Credem însă că autorii au trebuit să fie mai prudenţi şi mai modeşti din cauza lipsei de hârtie, care chiar dacă se găseşte, este încă tot prea scumpă pentru manuale, punându-se şi de data aceasta ideea ca hârtia pentru scopuri ştiinţifice să fie furnizată pe un preţ mai redus editorilor emulându-se astfel tipărirea în special a manualelor didactice de curs superior.

Sunt de amintit câteva uşoare scăpări de stil: „Congresul electricienilor" (pag. 4), „sunt de acele" în loc de „acelea" (p. 29), „se poate măsură prin *mijlocirea*" (pag. 44), „activează" în loc de „acţionează" (p. 59), etc... care din fericire sunt puţin numeroase. (Sublinierile sunt ale noastre).

In sfârşit o obiecţiune de natură epistemologică. Anume, nu putem fi de acord cu enunţul dat de autori că idealul ştiinţei este stabilirea unei singure ipoteze sau teorii pentru explicarea fenomenelor naturii, deoarece acesta este un punct de vedere monist personal, depăşit deja de epistemologia ştiinţifică. Ţinta supremă, cunoaşterea naturii, punerea sa în slujba omului, este independentă de faptul că acest lucru reuşeşte printr'o singură teorie (sau ipoteză) sau ba. Postulatul monist nu este absolut necesar şi mai ales nu poate fi

idealul suprem al ştiinţei. De asemenea este de natură mai mult didactică decât ştiinţifică stabilirea unei relaţii de cauzalitate între forţe şi acceleraţie. Simultaneitatea forţei şi acceleraţiei exclude acest punct de vedere antropomorf şi cere înlocuirea sa printr'o relaţie de interdependenţă sau mai bine zis de interacţiune. Chiar şi acest ultim punct de vedere este inutil din punct de vedere ştiinţific, rămânând a arăta pur şi simplu că forţa şi acceleraţia sunt anumite manifestări, în relaţie reciprocă, ale unor anumite mişcări.

Pe lângă aceste observaţii, volumul de faţă este un îndreptar, serios întocmit, pentru cei care vor să înveţe fizica cu rigurozitate ştiinţifică şi aşteptăm cu mult interes şi cu multă recomandare şi insistenţă ca autorii să-şi tipărească cât mai curând şi celelalte volume.

T. VESCAN.

I. VARDALA: Nouvelles idée et hypothèses au sujet des notions et des principes de la mécanique rationnelle. Bucarest 1947.

CERERI

Răspuns la cererea 341 (Gazeta Matematică, LII, 246). Se întreabă dacă pentru corpurile convexe din spaţiile cu n dimensiuni există o relaţiune analoagă celeia a lui EULER din spaţiul cu 3 dimensiuni.

Nu mai este posibil să afirm că există sau nu vre-o relaţiune asemănătoare pentru corpurile convexe din spaţiile cu mai mult de trei dimensiuni.

Relaţiunea lui EULER este însă generalizată pentru suprafeţele conexe de gen p, p fiind diferit de zero. Pentru aceste suprafeţe relaţiunea lui EULER devine:

$$L - V - F = 2p - 2.$$

Pentru $p = 0$ se obţine relaţiunea clasică a lui EULER relativă la poliedre.

Pentru suprafeţele de gen $p = 1$, de exemplu torul — aceeaşi relaţiune este

$$L = V + F.$$

Relaţiunea lui EULER, generalizată este utilă pentru determinarea genului unei suprafeţe închise sau a genului grupurilor fucsiene.

In această chestiune se poate consulta APPELL şi GOURSAT *(Théorie des fonctions algébriques)*, ediţiunea revăzută de P. FATOU, tome I, pag. 112 şi tome II, pag. 139—143.

Ş. G.

DIVERSE

a) O circulară a Ministerului Educației Naționale.

Apreciind rolul cultural pe care-l îndeplinește *Gazeta Matematică* de 51 de ani de când apare, Ministerul Educației Naționale a găsit cu cale că este necesar ca această revistă să fie răspândită cât mai mult și cunoscută de cât mai mulți elevi de liceu. In acest scop a trimis o circulară tuturor liceelor din țară recomandând ca profesorii de matematici să propună comitetelor școlare abonarea la *Gazeta Matematică* a câte 10 elevi din fiecare liceu. Reproducem paragraful final al circularei Nr. 69.023/B/947, care arată modul cum a înțeles Ministerul rolul pe care-l are matematica în formarea spirituală a elevilor, rol pe care *Gazeta Matematică* îl îndeplinește de peste 5 decenii.

„Matematica fiind alături de studiul limbei patriei, obiect de bază în învățământul nostru secundar, Ministerul consideră ca foarte necesară pentru formarea spirituală a elevului o asemenea revistă care a constituit cartea de căpătâi a atâtor generații, din care au rezultat numeroase exemplare ce au determinat, până dincolo de hotare, bunul nume al științei românești".

Mulțumim Ministerului pentru îndemnul pe care care-l dă prin circulara sa Nr. 69.023/B/947 profesorilor și elevilor și pentru bunele aprecieri pe care le face prin aceste recomandări, străduințelor și sacrificiilor *Gazetei Matematice* pentru stimularea învățământului matematicei. Acest îndemn Ministerial este o nouă recunoaștere[1]) a sacrificiilor *Gazetei Matematice* și o încurajare de continuare pe drumul drept și cristalin trasat de întemeietorii acestei reviste și a ceea ce se chiamă spiritul *Gazetei Matematice.*

b) Gestul unui premiat al Gazetei Matematice.

In ședința de Luni 28 Aprilie 1947, a soc. *Gazeta Matematică* d-l I. S. ANTONIU a înmânat d-lui MARCEL COTARIU un plic cu 250.000 (două sute cinci zeci mii) lei, premiul de Trigonometrie „V. Cristescu", ce i s'a acordat în ședința Adunării Generale ordinare din 18 Februarie 1946 pentru activitatea la Trigonometrie în Vol. L. La cuvintele care au însoțit înmânarea plicului tânărul premiat a răspuns emoționat un simplu *„mulțumesc"* și a părăsit sala pentru a reveni peste câte-va minute mai emoționat și a oferi pentru revista *Gazeta Matematică „modestul meu obol de 250.000 lei".* Mulțumindu-se cu simbolul moral al succesului său, d-l MARCEL COTARIU a dovedit prin gestul său spontan că se încadrează în spiritul *Gazetei Matematice: „muncă desinteresată și sacrificiu".*

---

1) A se vedea și circulara trimisă în 1937 și publicată în *Gazeta Matematică* vol. XLII pag. 362.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2147. α, β *fiind coordonatele unui punct din plan, să se împartă planul în regiuni după natura suprafeței*

$$\alpha^2\beta x^2+\alpha\beta^2 y^2+\beta^2 z^2+2\alpha\beta^2 yz+2\alpha^3 xz+2\alpha^2\beta xy$$
$$+2\alpha^6 x+2\alpha^3\beta^3 y+2\alpha\beta^5 z+\alpha\beta^8=0.$$

F. NEDELCU.

Dacă $\alpha=0$ suprafața dată se reduce la planul $z=0$.
Dacă $\beta=0$ suprafața se reduce la planele

$$x(z+\alpha^3)=0.$$

Considerăm în cele ce urmează $\alpha\neq 0$ și $\beta\neq 0$. Inmulțim ecuația dată cu β și formăm invarianții Δ, δ, I și J. Avem

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha^2\beta^2 & \alpha^2\beta^2 & \alpha^3\beta & \alpha^6\beta \\ \alpha^2\beta^2 & \alpha\beta^3 & \alpha\beta^3 & \alpha^3\beta^4 \\ \alpha^3\beta & \alpha\beta^3 & \beta^4 & \alpha\beta^6 \\ \alpha^6\beta & \alpha_3\beta^4 & \alpha\beta^6 & \alpha\beta^9 \end{vmatrix}=\alpha^{18}\beta^4\frac{\beta^4}{\alpha^4}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)^3\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-1\right)^2\left(\frac{\beta^3}{\alpha^3}-1\right)$$

$$\therefore\quad \Delta=\alpha^{18}\beta^4\frac{\beta^4}{\alpha^4}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)^4\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}-1\right)^2\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta}{\alpha}+1\right]>0 \qquad (1)$$

$$\delta=\begin{vmatrix} \alpha^2\beta^2 & \alpha^2\beta^2 & \alpha^3\beta \\ \alpha^2\beta^2 & \alpha\beta^3 & \alpha\beta^3 \\ \alpha^3\beta & \alpha\beta^3 & \beta^4 \end{vmatrix}=\alpha^3\beta^5(\beta-\alpha)^5(\beta+\alpha) \qquad (2)$$

$$I=\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4=\alpha^2\beta^2\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta}{\alpha}+1\right]>0 \qquad (3)$$

$$J=\begin{vmatrix} \alpha\beta^3 & \alpha\beta^3 \\ \alpha\beta^3 & \beta^4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha^2\beta^2 & \alpha^3\beta \\ \alpha^2\beta & \beta^4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha^2\beta^2 & \alpha^2\beta^2 \\ \alpha^2\beta^2 & \alpha\beta^3 \end{vmatrix}$$
$$=\alpha^3\beta^2(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha^2\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta}{\alpha}+1\right] \qquad (4)$$

Invarianții Δ și I sunt totdeauna pozitivi. Semnele celorlalți invarianți depind de $\alpha\beta(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$ și de $\alpha(\beta-\alpha)$.

Cu aceste elemente se construeşte imediat următorul tabel care răspunde chestiunei puse în enunţ.

Regiunea	Semnele cantităţilor						Genul suprafeţei
	α	$\beta-\alpha$	β	$\beta-\alpha$	j	δ	
I	+	−	+	+	−	−	Iperboloid cu o pânză
II	+	+	+	+	+	+	Elipsoid imaginar
III	−	+	+	+	−	−	Iperboloid cu o pânză
IV	−	+	+	−	−	+	Iperboloid cu o pânză
V	−	+	−	−	−	−	Iperboloid cu o pânză
VI	−	−	−	−	+	+	Elipsoid imaginar
VII	+	−	−	−	−	−	Iperboloid cu o pânză
VIII	+	−	−	+	−	+	Iperboloid cu o pânză

Dealungul bisectoarei $\beta - \alpha = 0$ avem $\Delta = \delta = 0$ şi suprafaţa devine planul dublu

$$(x + y + z + \alpha^3)^2 = 0.$$

Dealungul bicectoarei $\beta + \alpha = 0$, suprafaţa dă planele reale

$$(x + y - z - \alpha^3)^2 - 2(\alpha - y)^2 = 0.$$

Regiunea I este cuprinsă între axa pozitivă Ox şi bisectoarea OA a primului cadran, regiunea II este cuprinsă între bisectoarea OA şi axa pozitivă Oy, ..., regiunea VIII este cuprinsă între bisectoarea OB' a cadranului al patrulea şi axa pozitivă Ox.

Sunt anunţaţi în Vol. XX ca rezolvitori ai acestei probleme d-nii: E. ABASON, R. BELIAN, P. DULFU, S. GHIOLU, E. GRIGORESCU, L. HAMBURGER, C. ISTRATI, I. LINTEŞ, P. MELAS, AL. PANTAZI, D. PERIEŢEANU, GH. ZAPAN şi GR. ZAPAN.

PROBLEMA 2731. *Să se găsească toate numerele, care îndeplinesc condiţia că diferenţa între patratul lor şi numărul format prin suprimarea cifrei unităţilor şi adunarea ei la cifra zecilor numărului rămas să ne dea un patrat perfect.*

C. ISTRATI.

Din enunţ se deduce că se cer numerele întregi pozitive. Fie a un număr de o cifră şi $10N + a$ numărul căutat. Dacă se

suprimă cifra unităţilor rămâne N. A aduna pe a la cifra zecilor numărului rămas înseamnă a aduna pe $10a$ la N. Cu acestea, condiţiile din enunţ sunt cuprinse în egalitatea

$$(10N + a)^2 - (N + 10a) = x^2$$

$$\therefore \quad 100N^2 + (20a - 1)N + a^2 - 10a - x^2 = 0 \qquad (1)$$

Din (1) se scoate

$$N = \frac{-20a + 1 \pm \sqrt{3960a + 1 + 400x^2}}{200}. \qquad (2)$$

Pentru ca N să fie întreg trebue ca mai întâi să avem

$$3960a + 1 + 400x^2 = z^2 \quad \therefore \quad 3960a + 1 = (z + 20x)(z - 20x) \qquad (3)$$

unde x şi z sunt numere întregi. Se observă că $\sqrt{3960a} > 20a$, deci pentru N întreg pozitiv nu se va considera în (2) semnul — înaintea radicalului. Pentru a găsi valorile întregi pozitive ale lui N vom da lui a în (3) pe rând toate valorile 0, 1,... 7, 8, 9 şi vom determina pe z, care dus în (2) ne dă pe N. Problema nu admite nicio soluţie de aceea ne vom mărgini la examinarea unei singure valori a lui a, de exemplu $a = 9$. Din (3) se scoate

$$(z + 20x)(z - 20x) = 35641 = 29 \times 1229. \qquad (4)$$

Numerele 29 şi 1229 fiind prime (4) conduce la următoarele sisteme de ecuaţii

$$z + 20x = 35641 \quad \text{cu} \quad z - 20x = 1$$

şi

$$z + 20x = 1229 \quad \text{cu} \quad z - 20x = 29$$

sau alte două analoage schimbând membrii doui între ei.

Din aceste sisteme se scoate

$$z = 17821 \quad \text{şi} \quad z = 629$$

care duse în (2) nu dau soluţii întregi pentru N.

Se procedează la fel şi pentru celelalte valori ale lui a. Singura dificultate de calcul este descompunerea în factori primi a numărului $3960a + 1$.

Este cert că enunţul are o eroare sau este necomplect. Insuşi propunătorul problemei mi-a spus că şi-a pierdut notiţele de acum 25 de ani de când a propus problema şi că nu-şi aminteşte care sunt numerele de care se ocupa problema sa.

Pe copertele volumelor vechi este anunţat ca rezolvitor al acestei probleme d-l T. I. BÂRSU.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4022. *Se se găsească un patrat perfect de opt cifre, format din trei grupe de câte două cifre semnificative, separate între ele prin câte un zero, fiecare grup fiind un patrat perfect.*

N. CIORĂNESCU.

Fie N rădăcina patrată a numărului căutat, care este de patru cifre şi mai mare ca 3162. Dacă punem:

$$N = 10^3 a + 10^2 b + 10 c + d$$

avem $$N^2 = 10^6 (10 m + n) + 10^3 (10p + q) + (10 z + n)$$

unde: $10 m+n$, $10 p+q$, $10 z+n$ sunt patrate perfecte. Din relaţia:

$$10^4 (10 a + b)^2 + 2 . 10^2 (10 a + b) (10 c + d) + (10 c + d)^2$$

$$= 10^6 (10 m + n) + 10^3 (10 p + q) + (10 z + n)$$

rezultă că trebue să avem în primul rând:

$$(10 c + d)^2 = 10 z + n$$

de unde rezultă $c = 0$. După simplificare rezultă apoi:

$$10^2 (10 a + b)^2 + 20 ad + 2 bd = 10^4 (10 m + n) + 10 (10 p + q)$$

ceea ce atrage după sine:

$$(10 a + b)^2 = 10^2 (10 m + n)$$

care nu poate avea loc decât dacă $b = 0$ şi $a^2 = 10 m + n$, deci a ca şi d trebue să fie mai mare ca 3.

Scriind acum:

$N = 10^3 a + d$ ridicând la patrat şi identificând cu expresia lui N^2 rezultă că:

$$2 ad = 10 p + q = \text{patrat perfect.}$$

Patratele perfecte pare de două cifre sunt: 16, 36 şi 64. Deci am putea avea:

$ad = 8$, 18 sau 32. Insă în acelaşi timp trebue ca şi $a > 3$, $d > 3$. Numai 32 se descompune însă în factori, ambii > 3. Deci soluţiile problemei sunt: $a = 4$, $d = 8$ sau $a = 8$, $d = 4$, adică numerele ce corespund problemei sunt:

$N^2 = 4008^2 = 16064064$ şi $N^2 = 8004^2 = 64064016$.

Au găsit cele două soluţii pe căi mai puţin riguroase d-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Liceul Militar, Iaşi), M. R. CONSTANTINESCU (Ploeşti), Maior EUG. IACOB, GH. A. GRIGORE, I. ROGOZ, BARBU I. POPESCU (Timişoara), M. PĂTRĂŞCIOIU (Buzău), MARCEL COTARIU (Brăila), D. D. BOIANGIU (Politehnica Bucureşti), Sublocot. ŞTEFAN TILICĂ, VASILE D. PĂLĂCEANU (Timişoara). D-l ION BARBU (Caracal) a găsit numai o soluţie, d-l GH. A. GRIGORE încearcă o generalizare, insuficient studiată, căutând patratele perfecte de $3p+2$ cifre semnificative, format din trei grupe de câte p cifre separate prin câte un zero.

In fine unii din corespondenţi n'au ţinut seama că cifrele erau cerute prin enunţ să fie semnificative, şi au dat şi alte soluţii.

PROBLEMA 6270. A, B, *n, k fiind numere întregi, să se demonstreze că dacă* $A \pm k$ *şi* $A^{n-1} \pm k$ *se divid prin* B, *atunci toate numerele* $A^i \pm k$ *se divid prin* B, *oricare ar fi* $i > n$. *Semnele se corespund.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-l M. R. CONSTANTINESCU (Bacalaureat, Ploieşti).

Conform enunţului avem

$$A^n \pm k = mB \quad , \quad A^{n-1} \pm k = pB \quad \therefore \quad (A-1)\,A^{n-1} = MB \qquad (1)$$

Fie $i = n + p$ cu $p \geqslant 1$. Suma

$$(A^{n+p} \pm k) - (A^{n-1} \pm k) = A^{n-1}(A^{p+1} - 1)$$

$$= (A-1)\,A^{n-1}(A^p + A^{p-1} + \ldots + A + 1)$$

este, conform egalităţii (1) divizibilă prin B. Cum $A^{n-1} \pm k$ se divide prin B prin ipoteză rezultă că şi $A^{n+p} \pm k$ se divide prin B.

Notă. 1°. Este destul a arăta că $A^{n+1} \pm k$ se divide prin B. Ori

$$A^{n+1} \pm k = A \cdot A^n \pm k = (A - 1 + 1)\,A^n \pm k = (A-1)\,A^{n-1} \cdot A + A^n \pm k$$

care conform relaţiilor (1) se divide prin B.

2°. D-nii: VIRGIL G. CONSTANTINESCU, D. I. CRĂCEA, VASILE DIACONU, E. A. DODU, D. I. STOIAN, P. P. TEODORESCU, I. N. MĂNCESCU, GEORGE ENESCU, D. I. STOIAN şi DAN E. VASILIU au rezolvat problema *parţial*. Unii după ce au stabilit relaţia (1) au dedus că B divide sau pe $A - 1$ sau pe A^{n-1}, eliminând astfel cazul când B nu divide nici pe unul nici pe celalt, având însă divizori comuni şi cu $A - 1$ şi cu A^{n-1}.

3°. Această problemă uşoară, poate ajuta la rezolvarea problemei 2462 propusă la pag. 62, Vol. XXII.

G-L GH. B.

EXERCIŢII

22. *Să se demonstreze că suma*

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

nu se termină cu 2, *3, 7 sau 8 pentru nici o valoare a lui n.*

† T. STOICESCU.

R. Suma dată este un patrat perfect, deci nu se poate termina de cât cu 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

23. *Să se demonstreze că*

$$\varphi_1(2^\alpha) + \varphi_2(2^\alpha) + \ldots + \varphi_\alpha(2^\alpha) = 2^\alpha - 1$$

$\varphi_i(N)$ *fiind indicatorul de ordinul* i *al lui* N.

I. N. PISANCA.

R. Avem

$\varphi_1(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$; $\varphi_2(2^\alpha) = \varphi(2^{\alpha-1}) = 2^{\alpha-2} \ldots \varphi_{\alpha-1}(2^\alpha) = 2$; $\varphi_\alpha(2^\alpha) = 1$

aşa că egalitatea de demonstrat devine identitatea evidentă

$$2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^\alpha - 1.$$

24. *Într'un triunghiu oarecare avem*

$$\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right) = 4\frac{R}{r}.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU.

R. Se pleacă dela relaţia cunoscută

$$\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right) = 4\frac{a+b+c}{\Sigma a \cos A}.$$

25. *Să se găsească locul vârfului* A *al unui triunghiu în care vârfurile* B, C *sunt fixe iar unghiurile* B *şi* C *sunt legate prin relaţia*

$$k \sin B \sin C = 1 + \cos B \cos C$$

unde k *este o constantă cuprinsă între* -1 *şi* $+1$.

MIRCEA D. POPA

R. Din relaţia de condiţie se deduce

$$(k+1)\sin B \sin C = 1 + \cos(B - C) = 2\cos^2\frac{B-C}{2}$$

$$(k-1)\sin B \sin C = 1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \pm\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \qquad (1)$$

Din relaţiile fundamentale dintre laturi şi unghiuri se deduce însă

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

care dusă în (1) dă

$$b + c = \pm a \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \pm m$$

care arată că A se mişcă pe o elipsă cu focarele în B, C şi cu axa mare egală cu $\pm m$.

26. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$p^2 x^4 - 4p^2 Rx^3 - (4p\,RS + S^2 - p^4)\, x^2 - p^2 S^2 = 0$$

$$p^2 x^4 - 2p\,(2pR + S)\, x^3 + (4pRS + S^2 + p^4)\, x^2 - 2p^2 Sx + p^2 S^2 = 0$$

p, R, S, *fiind elementele unui triunghiu.*

P. P. TEODORESCU

R. Ţinând seamă de relaţiile [1])

$$-r + r_a + r_b + r_c = 4R \quad ; \quad -r\,(r_a + r_b + r_c) + r_a r_b r_b r_c r_c r_a = -\frac{1}{p^2}(4pRS + S^2 - p^4) \quad ;$$

$$-r\,(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) + r_a r_b r_c = 0 \quad ; \quad -r r_a r_b r_c = -S^2$$

şi de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, găsim că prima ecuaţie are rădăcinile $-r, r_a, r_b, r_c$.

Urmând aceeaşi cale se găseşte că a doua ecuaţie are rădăcinile r, r_a, r_b, r_c.

27. *Într'un triunghiu oarecare avem*

$$\frac{\Sigma a \sin^2\frac{A}{2}}{\Sigma \sin A} = R - r \quad ; \quad \frac{\Sigma a \cos^2\frac{A}{2}}{\Sigma \sin A} = R + r \quad ; \quad \frac{\Sigma a \cos^2\frac{A}{2}}{\Sigma \sin A} = p.$$

C. CORDUNEANU.

R. Se ţine seamă de următoarele relaţiuni cunoscute

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r_a - r}{4R} \quad ; \quad \cos^2\frac{A}{2} = 1 - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Sigma \sin A = \frac{p}{R} \quad \text{şi} \quad \Sigma \cos A = \frac{R + r}{R}.$$

---

1) *Exercices de Trigonometrie* par F. G. M., pag. 165 et 168.

28. *Să se arate că*

$$\frac{d^n \sqrt{1 \pm \sin 2x}}{dx^n} = \sqrt{1 \pm \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

E. WEGENER.

R. Din

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

se obține relația din enunț prin adunare și scădere.

PROBLEME PROPUSE

6325 [1]. Fie două triunghiuri omologice *abc* și ABC cu centrul de omologie în S. O dreaptă oarecare δ taie laturile *bc*, *ca*, *ab* respectiv în punctele *m*, *n*, *p*. Dreptele S*m*, S*n*, S*p* taie laturile BC, CA, AB respectiv în punctele M, N, P.

Să se arate că punctele M, N, P se găsesc pe o dreaptă Δ, care se întâlnește cu δ pe axa de omologie a triunghiurilor date.

ADRIAN GHEORGHIU.

6350. O publicație periodică va fi sărbătorită la împlinirea a 90 ani de apariție. Anul când a apărut și anul când va fi sărbătorită se scriu cu aceleași cifre având suma 23. Să se afle anul de apariție al publicației și să se deducă numele ei.

LT. COL. E. ȘT. IACOB.

6351. Să se găsească numerele N, N', M și M' știind că $N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$; $N' = a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n$, $2N = 3M$ și $3N' = 2M'$ $a_0, a_1, \ldots a_n$ fiind cifre.

I. B. FLORESCU.

1) Inlocuește problema propusă cu același număr la pag. 231, care este eronată.

6352. Să se rezolve în numere întregi următoarele 3 ecuații:

$$1^0.\ x^2+y^4=z^6\ ;\quad 2^0.\ x^2+y^6=z^4\ ;\quad 3^0.\ x^4+y^6=z^2.$$

G-L GH. BUICLIU.

6353. Fie ABC un triunghiu oarecare și A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimelor lui. Se înseamnă cu H', H'', H''' ortocentrele triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 și cu L, M, N mijloacele înălțimilor AA_1, BB_1, CC_1. Să se arate că triunghiurile $H'H''H'''$ și LMN sunt ortologice.

VIRGIL CLAUDIAN.

6354. Să se arate între înălțimele și razele cercurilor tritangente unui triunghiu există relațiile

$$\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}=\left(\frac{2}{3r}-\frac{1}{h_a}\right)^2+\left(\frac{2}{3r}-\frac{1}{h_b}\right)^2+\left(\frac{2}{3r}-\frac{1}{h_c}\right)^2$$

$$\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\left(\frac{2}{h_a}-\frac{1}{3r}\right)^2+\left(\frac{2}{h_b}-\frac{1}{3r}\right)^2+\left(\frac{2}{h_c}-\frac{1}{3r}\right)^2.$$

GENERAL GR. ZAPAN.

6355. In planul triunghiului ABC se consideră punctele gemene M și M_1. Să se arate că:

1°. Triunghiurile $A'B'C'$ și $A_1'B_1'C_1'$ formate din vârfurile triunghiurilor $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ construite pe laturile triunghiului ABC și având respectiv pe M și M_1 ca ortocentre comune, sunt simetrice față de mijlocul Q al segmentului MM_1.

2°. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, obținute prin aceleași construcții dela 1° asupra triunghiului $A'B'C'$ și asupra punctelor M' și M_1', ce urmează a se determina, sunt simetrice față de Q.

3°. Vârfurile triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$, $A_1'B_1'C_1'$ și punctele M, M_1, M', M_1' sunt pe o hiperbolă echilateră cu centrul în Q.

4°. Să se examineze proprietățile precedente în cazul când A, B, C sunt colineare și în cazul când M este ortocentrul triunghiului ABC.

G-L GH. I. POPESCU.

6356. Se cunoaşte proprietatea şirului

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (1)$$

de a se reproduce, dacă se formează şirul diferenţelor Δu_n. Să se caute, care sunt şirurile recurente şi raţionale de ordinul II:

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}$$

cu p şi q raţionali, care se bucură de aceeaşi proprietate cu şirul (1).

OTILA GEORGESCU ROEGEN.

6357. Se cere să se găsească:

$$1^0. \quad \lim_{a\to 0} y = \lim_{a\to 0} \frac{[f(x)]^2 - f(x-a)f(x+a)}{2f(x) - [f(x-a) + f(x+a)]}$$

ştiind că $f(x)$ este o funcţie continuă.

2^0. *Lim* y când a este constant, iar $f(x)$ tinde către o limită finită când x tinde la infinit.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

6358. Să se rezolve un triunghiu ABC cunoscând unghiul A şi lungimile BB', CC' a două drepte care plecând din vârfurile B şi C împart laturile opuse în raporturi date.

Aplicaţie pentru cazul când BB', CC' sunt mediane.

I. ST. TEODORESCU.

6359. Dacă u, v, w sunt trei unghiuri oarecare atunci

$$1 + \cos u \cos v + \cos v \cos w + \cos w \cos u \geqslant 0.$$

In ce caz avem egalitate? Să se deducă, de aici, că egalitatea nu poate avea loc când u, v, w sunt unghiurile unui triunghiu

M. GHERMĂNESCU.

ERATĂ. 1°. In enunţul problemei 6321 se înlocueşte cuvântul *negative* prin *pozitive.*

2°. Pag. 239 rândul 3 de jos se înlocueşte *patratul* prin *patrulaterul*

3°. „ 240 „ 19 „ „ „ „ *patrulater* „ *particular.*

„ 240 „ 7 „ „ „ „ D „ B.

„ 240 „ 5 „ „ „ „ $\overline{TD}^2$ „ $\overline{TB}^2$.

4°. „ 280 „ 1 „ „ „ „ COLUMBESCU prin COLUMBEANU.

5°. „ 276 „ 1 se pune (înaintea lui e^x.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Athanasiu C. Luciliu-Mihail (5129, 6331, 40); *Bărbulescu C. V.* (6264, 331); *Bucur A. N.* (6331); *Columbeanu D. P.* (6323, 31, P); *Constantinescu N. Ilie* (E, P); *Constantinescu R. M.* (6236, 85, 88, 93, 345, 49, P); *Constantinescu G. Virgil* (6084, 265); *Crăcea I. D.* (6145, 221, 64, 65, 82, 314, 31, 36, 40); *Enescu George* (4705, 5250, 581, 98, 649, 6037, 88, 120, 40, 62); *Fânaru N. D.* (6331); *Georgescu Răducanu* (P); *Gherasim P. I.* (6331); *Herşcovici D. Dan* (6341); *Iosifescu M.* (5343, 6134, E); *Kinsky I.* (6309); *Marcu D. V.* (6346); *Marinescu E. Em.* (6030, 31, 185, 272, P); *Moraite G. Al.* (6262, 315, 27, 31); *Nedelcu Fl.* (P); *Petcu A. Valeriu-Pandele* (5871, 6205, 82, 85); *Pisanca N. I.* (6199, 310, E); *Popa D. M.* (4992, 5250, 367, 696, 745, 6033, 44, 319, 28, 34, 35, 36, 38, 43, 47, A, E, P); *Ristea G. G.* (6315); *Roman I. C.* (6230, 33, 90); *Roşca St. Gh.* (6272, 86, 335, 40); *Soare V. M.* (5609, 822, 6135, 272, 346, P); *Stoian I. D.* (6270); *Szekely L. G.* (6333); *Teodorescu P. P.* (5547, 683, 6205, E, N); *Vasiliu E. Dan* (5980, 6120, 270, 315, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.*

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cincisute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 500.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 400.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 100.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 150.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 400.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei 300.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 100.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 150.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 120.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 50.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 150.000

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII, N-rele 1—8 inclusiv fiind epuizate, abonamentul pentru ultimile patru numere este de 84.000 lei.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 27.000 lei.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 41.226.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1947

BIBLIOTECA LICEUL „GHEORGHE LAZĂR" SIBIU

SUMARUL

1. Perspectiva directă şi teorema lui Desargues . . . . . *Adrian Gheorghiu.*
2. Raport asupra acordării premiului de trigonometrie „V. Cristescu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
3. Note matematice: 21—22.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 2820, 3308, 4067, 5142, 5912, 6066.
8. Exerciţii : 29—33.
9. Probleme propuse: 6360—6370.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:
Marţi 24 Iunie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 11.
Marţi 8 Iulie ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 11.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei 10.000
— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . . . . . „ 100.000
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ 500.000

La *« Gazeta Matematică »* se primesc abonamente pentru *Intermédiaire des Recherches Matématiques*, anii 1945, 1946 şi 1947. Costul abonamentului: 168.000 lei fiecare an.

PERSPECTIVA DIRECTĂ ŞI TEOREMA LUI DESARGUES

1. In perspectivă, ca *„reprezentare a obiectelor din spaţiu pe un tablou plan aşa cum se văd"* sunt două metode de construcţie, deosebite pentru prima oară de I. H. LAMBERT (1728—1777) în cartea sa *„Freye Perspective, oder Anweisung jeden Aufriss aon freyen Stucken und ohne Grundriss zu verfestigen"* Zürich 1759, şi anume:

Metoda *descriptivă*, în care datele: obiectul, punctul de vedere şi tabloul plan, sunt raportate faţă de planele de proecţie, orizontal şi vertical din geometria Descriptivă; determinarea perspectivei obiectului făcându-se prin intersecţia razelor vizuale ale tuturor punctelor lui cu tabloul. Se întroduce o simplificare luându-se ca plan vertical de proecţie însuşi tabloul.

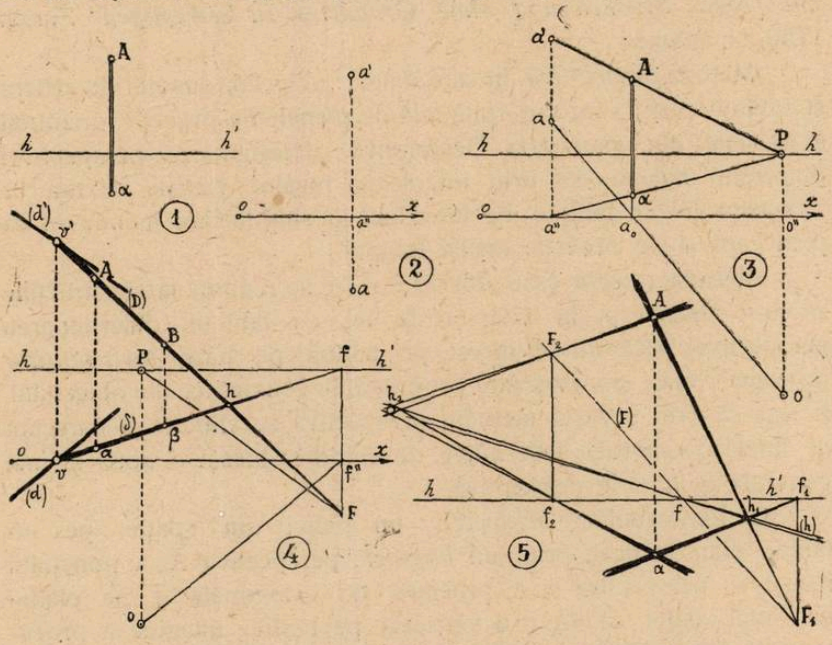
Metoda *directă* (sau *liberă*) în care se renunţă la construcţiile razelor vizuale şi la intersecţiile lor cu tabloul, determinarea perspectivei făcându-se direct pe tablou pe baza *invarianţilor* proecţiei conice şi cunoscând proprietăţile geometrice ale obiectului. E clar că prin această metodă, perspectiva se eliberează oarecum de tutela geometriei descriptive, devenind ea însăşi o nouă şi mai generală geometrie descriptivă.

2. Reprezentăm *perspectiv*, un punct din spaţiu, pe un tablou plan vertical, printr'un *bipunct*: perspectiva A, a punctului însuşi şi perspectiva α a proecţiei lui ortogonale *a*, pe planul orizontal, astfel că αA e o verticală pe tablou, imagine a proectantei punctului din spaţiu, pe planul orizontal. Completăm tabloul cu *linia orizontului hh'*, adică cu *dreapta de fugă* a tuturor planelor orizontale, sau ceea ce e tot una, imaginea dreptei dela infinit a planului orizontal. (Fig. 1).[1]

Aşa alcătuită reprezentarea, putem numi fig. 1, *epura liniară de perspectivă directă*, pentrucă pe ea se pot rezolva problemele *liniare* de geometrie în spaţiu, adică acelea care tratează intersecţii şi relaţii de poziţie (concurenţă, tangenţă, conţinere, paralelism).

1) O a doua reprezentare perspectivă se obţine prin bipunctul (a', A), unde a' este proecţia ortogonală a punctului din spaţiu pe tablou. In acest caz $a'A$ trece prin punctul P, proecţie a punctului de vedere pe tablou.

Se observă că, spre deosebire de *epura de geometrie descriptivă* (Fig. 2) care este convenţională, de vreme ce este rezultatul a două proecţii ortogonale (viziuni dela infinit) pe două plane rectangulare, urmate de o rabatere a unuia pe celalt; *epura de perspectivă* formează o imagine mai naturală, ca rezultat al unei singure viziuni, dela distanţă finită, pe un singur tablou; deşi reprezentăm, nu *un* punct din spaţiu prin două proecţii conice, cât un *bipunct* din spaţiu printr'o singură proecţie conică.



Dar, epura liniară de perspectivă directă, nu este reciprocă, ea nu poate da decât indicaţii *topologice* asupra punctelor din spaţiu, nu şi *topometrice*. Pentru a o transforma în *epura metrică de perspectivă directă*, adică în epură care să poată conduce de la reprezentarea perspectivă (α, A), la reprezentarea descriptivă (*a*, *a'*) şi deci la coordonatele punctului din spaţiu; trebue cunoscută poziţia punctului de vedere, prin:

a) proecţia lui pe tablou = punctul principal P, evident pe linia orizontului *hh'*.

b) înălţimea lui faţă de planul orizontal, deci baza *ox* a tabloului (linia de pământ).

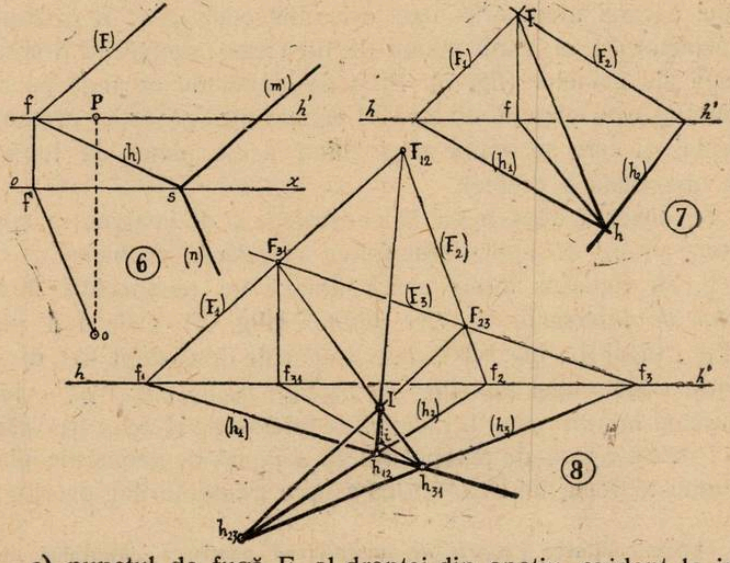
c) distanța lui de tablou sau reprezentarea proecției lui orizontale *o*, în rabaterea planului orizontal anterior pe tabloul vertical inferior. (Se presupune, fără a restrânge generalitatea reprezentării, obiectul plasat în diedrul al doilea).

Astfel completată, epura de perspectivă (fig. 3) poate rezolva și problemele *metrice* de geometrie în spațiu (lungimi și unghiuri). In particular, și ca primă problemă metrică, se determină, prin *operațiile inverse* ale perspectivei punctului, reprezentarea descriptivă a lui, față de planul orizontal și tablou ca plan vertical. In adevăr (fig. 3), se determină: $a_0 \equiv (\alpha A, ox)$, $a'' \equiv (P\alpha, ox)$, încât $a \equiv (oa_0$, verticala lui $a'')$ și $a' \equiv (PA$, verticala lui $a'')$.

3. Două puncte date prin (α, A), (β, B) într'o epură liniară de perspectivă directă (fig. 4), determină o dreaptă [(δ), (D)], care pune în evidență, imediat, două puncte caracteristice ale ei și care o definesc, mai util încă, în perspectiva directă, anume:

a) urma orizontală *h*, intersecție a imaginei (D) a dreptei din spațiu cu imaginea (δ) a proecției sale ortogonale pe planul orizontal.

b) punctul de fugă *f*, al proecției ortogonale pe planul orizontal a dreptei din spațiu, evident la intersecția lui *hh'* cu imaginea (δ).



c) punctul de fugă F, al dreptei din spațiu, evident la intersecția lui (D) cu verticala lui *f*, ca dreaptă de fugă a planului proectant al dreptei din spațiu.

Dacă se introduce linia de pământ *ox* şi reprezentarea descriptivă a punctului de vedere prin bipunctul (*o*, P), se poate determina reprezentarea descriptivă [(*d*), (*d'*)] a dreptei, prin operaţiile inverse ale perspectivei dreptei:

(*d*), paralelă prin *v* la *of''*,

(*d'*), paralelă prin *v'* la PF,

punctul (*v*, *v'*) fiind urma dreptei pe tablou, ca plan vertical[1].

4. Două drepte concurente (fig. 5) au un bipunct comun (α, A) şi determină un plan: urmele lor h_1 şi h_2 (acesta în spaţiul virtual), determină urma (*h*) a planului, iar punctele lor de fugă, F_1 şi F_2, determină dreapta de fugă (F) a planului, evident aceste două drepte caracteristice ale planului se taie pe linia orizontului. Reciproc urma şi dreapta de fugă, definite prin notaţii[2] şi tăindu-se pe linia orizontului, determină perfect un plan (fig. 6) căci în adevăr, dacă se trece la epura metrică, se poate determina reprezentarea descriptivă a planului, faţă de tablou şi planul orizontal, V şi H: urma perspectivă (*h*) taie *ox* în *s*, paralela din *s* la *of''* este urma verticală descriptivă, a planului dat.

5. Intersecţia a două plane în reprezentare perspectivă, este dreapta a cărei urmă orizontală este intersecţia urmelor orizontale ale planelor şi al cărui punct de fugă este intersecţia dreptelor de fugă ale planelor (fig. 7). Proecţia punctului de fugă pe linia orizontului este punctul de fugă al perspectivei proecţiei orizontale a dreptei, şi care se obţine deci unind acest punct de fugă cu urma orizontală a dreptei.

Se observă deosebirea de construcţie şi de imagine în spaţiu a acestei epure, cu epura descriptivă a aceleiaşi probleme.

6. Să figurăm într'o epură liniară de perspectivă directă *punctul de intersecţie a trei plane.* (Fig. 8). Cele trei plane $[h_1, F_1]$, $[h_2, F_2]$, $[h_3, F_3]$ se taie două câte două după trei drepte, conform construcţiei din fig. 7; $h_{23}F_{23}$, $h_{31}F_{31}$, $h_{12}F_{12}$, evident concurente într'un punct I, punctul de intersecţie al celor trei plane.

Privind epura de perspectivă ca o figură de geometrie plană, se obţine teorema lui DESARGUES asupra triunghiurilor omologice.

---

1) Sunt mijloace *proprii de perspectivă* pentru a determina direct panta dreptei faţă de planul orizontal şi adevărata lungime *v' h*.

2) Notaţiile, ca şi în Geometria Descriptivă, fac parte integrantă din epură.

In adevăr, linia orizontului hh' devine axa de omologie, iar punctul I devine centrul de omologie al triunghiurilor $(h_1 h_2 h_3)$ şi $(F_1 F_2 F_3)$.

Dacă se construesc punctele f_{23}, f_{31}, f_{12}, dreptele $h_{23} f_{23}$, $h_{31} f_{31}$, $h_{12} f_{12}$ sunt deasemenea concurenfe într'un punct i, imaginea proecţiei ortogonale pe planul orizontal, a punctului I din spaţiu.

ADRIAN GHEORGHIU.

RAPORT ASUPRA ACORDĂREI PREMIULUI DE TRIGONOMETRIE „V. CRISTESCU" PE ANUL 1945—1946

Subsemnaţii membri ai Comisiei pentru acordarea premiului de trigonemetrie « V. CRISTESCU » în anul 1945—46, cercetând volumul LI al *Gazetei Matematice* am constatat că nici un corespondent, nu îndeplineşte condiţiunile regulamentare.

In consecinţă premiul nu poate fi acordat anul acesta.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"
Ing. I. S. ANTONIU, G-ral GH. LITEANU, AL. V. NICULESCU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală dela 17 Februarie 1947.

NOTE MATEMATICE

21. *Asupra exerciţiului 8 din G. M., Vol. LII, pag. 102.* Plecând dela

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

şi punând $x = \sin A + \sin B - \sin C$; $y = \ldots$ găsim relaţia

$$\Sigma (\sin A + \sin B - \sin C)^3 = \frac{p(p^2 - 12Rr)}{R^3}. \qquad (1)$$

Comparând cu rezultatul dat la pag. 102 din acest volum găsim condiția

$$\frac{1}{4}(p^2 - 3r^2 - 6Rr) = p^2 - 12Rr \quad \therefore \quad p^2 + r^2 = 14Rr; \qquad (\alpha)$$

care se mai poate scrie

$$p^3 + (p-a)(p-b)(p-c) = 14RS$$

sau $$(a+b+c)^3 + \Pi(a+b-c) = 28abc$$

$$\therefore \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2(b+c) + 6abc + [-\Sigma a^3 + \Sigma a^2(b+c) - 2abc]$$

$$= 28abc \quad \therefore \quad \Sigma a^2(b+c) = 6abc. \qquad (\beta)$$

Deci, relația din exercițiul 8, vol. cit., e adevărată numai dacă elementele triunghiului verifică una din relațiile (α) sau (β), cum este cazul *triunghiului echilateral; în acest mod s'ar putea completa enunțul acelui exercițiu.*

In cazul unui *triunghiu oarecare,* avem însă relația (1).

Cu această ocazie semnalez o relație analoagă. Astfel făcând înlocuirile

$$x = 3\sin A - \sin B - \sin C; \; y = \ldots$$

găsim $$\Sigma(3\sin A - \sin B - \sin C)^3 = (\sin A + \sin B + \sin C)^3$$

$$- 24\Pi(\sin A + \sin B - \sin C) = \frac{1}{R^3}[p^3 - 24(p-a)(p-b)(p-c)]$$

$$= \frac{1}{pR^2}(p^4 - 24S^2)$$

$$\therefore \Sigma(3\sin A - \sin B - \sin C)^3 = \frac{p(p^2 - 24r^2)}{R^3} \qquad (2)$$

iar din (1) și (2) găsim, prin scădere, altă relație

$$\Sigma(\sin A + \sin B - \sin C)^3 - \Sigma(3\sin A - \sin B - \sin C)^3 = \frac{12S(2r - R)}{R^3}.$$

PETRE P. TEODORESCU
Liceul „Matei Basarab", București.

22. *Asupra unor ecuații diferențiale.* I. Ecuațiile

$$\frac{dy}{dx} + y^2 \pm \frac{a^2}{x^4} = 0,$$

a căror integrare a făcut obiectul problemei 5391 rezolvată la pag. 189, Vol. LI, se pot integra și astfel: forma lor sugerează schimbarea de funcție $x^2y = u$, cu care acestea devin

$$x^2u' - 2xu + u^2 \pm a^2 = 0$$

sau

$$(u' - 1)\,x^2 + (u - x)^2 \pm a^2 = 0.$$

O nouă schimbare de funcție $u - x = v$ este evidentă și obținem

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dv}{v^2 \pm a^2} = 0,$$

în care variabilele sunt separate. Dacă luăm semnul +, obținem $v = a\,\mathrm{tg}\left(\frac{a}{x} + C\right)$, apoi

$$(\alpha) \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{a}{x} + C\right),$$

unde C este o constantă arbitrară. Dacă luăm semnul —, obținem, pe aceeași cale,

$$(\beta) \qquad y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}\,\mathrm{cot}h\left(\frac{a}{x} + C\right),$$

unde C este o constantă arbitrară, iar $\mathrm{cot}\,h\alpha$ este cotangenta iperbolică a arcului α.

Expresia (α) se poate pune și sub forma (β)

$$(\alpha') \qquad y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}\,\mathrm{cotg}\left(\frac{a}{x} + e\right),$$

căci C este arbitrară.

II. Ecuația

$$(2x - 1)\,y'' - (4x^2 + 1)\,y' + (4x^2 - 2x + 2)\,y = 0,$$

propusă la Examenul de Capacitate din 1935, se poate de asemeni integra pe altă cale (v. pag. 744, Vol. LI): observăm că suma

coeficienţilor termenilor în y, y', y'' este nulă, deci ecuaţia se poate scrie sub forma

$$(2x-1)(y''-y')-(4x^2-2x+2)(y'-y)=0,$$

care duce imediat la soluţia dată la locul citat.

Aceeaşi observaţie însă duce şi la concluzia că ecuaţia considerată admite integrala particulară $y_1 = e^x$, astfel că schimbarea de funcţie $y = y_1\, z = ze^x$, duce la ecuaţia

$$(2x-1)z'' = (4x^2-4x+3)z',$$

care se mai poate scrie

$$\frac{z''}{z'} = 2x-1+\frac{2}{2x-1}$$

deci, prin integrare, $z' = (2x-1)e^{x^2-x+C}$, $z = e^{x^2-x+C}+C'$, finalmente

$$y = ze^x = C_1 e^{x^2} + C_2 e^x.$$

Observaţia de mai sus îmi sugerează următoarea proprietate:

Fiind dată o ecuaţie diferenţială lineară omogenă cu coeficienţi variabili

$$P_0(x)\,y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\,y' + P_n(x) = 0$$

dacă funcţia $\varphi(x, y) = \sum P_{n-1}(x)\,u^i$ *admite o rădăcină simplă* $u = a$, *independentă de* x, *ecuaţia admite integrala particulară* $y_1 = e^{ax}$. *Dacă* $u = a$ *este o rădăcină multiplă de ordinul* p *pentru ecuaţia considerată, ecuaţia diferenţială admite integralele particulare* $y_k = x^{k-1}e^{ax}$, $k = 1, 2, \ldots p$.

Proprietatea de mai sus constitue o generalizare a aceleia corespunzătoare la ecuaţiile diferenţiale lineare şi omogene, cu coeficienţi constanţi.

M. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI. (CHIMIE INDUSTRIALĂ)

Examenul de admitere Octombrie-Noembrie 1946

Matematici generale. I. *a)* Dacă o rădăcină a ecuaţiei $x^2+ax+b=0$ este egală cu pătratul celeilalte rădăcini, să se arate că $a^3+b^2=(3a-1)b$.

Să se verifice rezultatul obținut pe un exemplu numeric.

b) Dar dacă o rădăcină este egală cu cubul celeilalte rădăcini?

II. *a)* Șirul numerelor naturale 1, 2, 3, 4,... este împărțit în grupe:

Grupa 1-a conține primul număr..... 1

„ 2-a „ următoarele 3 numere 2, 3, 4

„ 3-a „ „ 5 „ 5, 6, 7, 8, 9

„ 4-a „ „ 7 „ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16; și așa mai departe.

Să se scrie numerele din grupa de rangul n și să se calculeze suma lor. Caz particular $n = 5$.

b) Aceeași problemă când se înlocuește șirul numerelor naturale 1, 2, 3, 4... cu șirul numerelor impare 1, 3, 5, 7...

III. Tangentele unghiurilor unui triunghiu sunt egale cu numerele 1, 2, 3. Să se construiască triunghiul și să se calculeze produsul înălțimilor în funcție de produsul laturilor lui.

IV. *a)* Pe laturile unui dreptunghiu de laturi a și b se construesc în exteriorul lui, triunghiuri echilaterale și se unesc vârfurile triunghiurilor. Să se calculeze pătratele diagonalelor patrulaterului astfel format.

b) Generalizare pentru un paralelogram de laturi a, b și arie S.

V. *a)* Se dă un patrulater și un punct situat în planul lui; să se găsească locul geometric al acelui punct știind că suma patratelor distanțelor lui la 2 vârfuri opuse ale patrulaterului, este egală cu suma patratelor distanțelor lui la celelalte două vârfuri opuse.

b) Care este locul geometric, dacă punctul este situat în spațiu?

c) Cazuri particulare: patrulaterul este trapez isoscel, dreptunghiu, paralelogram.

VI. *a)* Dacă A, B, C sunt mijloacele laturilor triunghiului echilateral $A_1B_1C_1$, să se arate că locul geometric al punctului din spațiu care satisface condiția:

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

este sfera cu centrul în vârful A_1 și raza A_1B.

b) Generalizare pentru un triunghiu $A_1B_1C_1$ oarecare.

BIBLIOGRAFIE

Acta Bolyai. Vol. I. 1946. S. BORBÉLY: Über eine Integraphen ebener vektoren. I. FÉNYES: A deduction of SCHRÖDIGER'S equation. Z. GYULAI: Beiträge zum Mechanismus des kristallwachstum. L. IMRE and F. SARUSI: On the Asymmetry of Electrodes of the Second Class. L. VAGA, J. ROMANCZAI and P. BITE: Investigations on Furan Compounds. L. VARGA, T. PUSKÁS and E. NAGY: Investigations on Sugar Alcohols. I. PÉTERFI: The influence of the β — Indole — acetic Acid on the Growth and Multiplication of the Algae.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 3. Mai 1947. N. N. MIHĂILEANU: Conice şi ecuaţii diferenţiale lineare. V. ALACI: Condiţiile pentru ca ecuaţia diferenţială

$$(a_1x + b_1y)\,dx + (a_2x + b_2y)\,dy = 0$$

să reprezinte conice sau cubice. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXXIII. Nr. 7. Ian.-Martie 1947. M. DRĂGAN: Originea energiei stelare. N. CALINICENCO: SADI CARNOT şi principiul al II-lea al Termodinamicei. ST. VENCOV: Fotografia în infraroşu şi aplicaţiile ei. C. V. GHEORGHIU: Pigmenţi respiratorii. C. P. ANTONI şi N. V. BOŢAN: Energia eoliană. T. FARCAŞ: Protecţia metalelor contra coroziunii. D. I. MANGERON: Opera ştiinţifică a „Şcolii" Galileene.

PROF. A. G. IOACHIMESCU, **Mecanica Raţională,** *curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti,* revăzut şi adăugat după îndrumările autorului de GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU. *(Biblioteca « Gazeta Matematică »,* Monitorul Oficial 1947, VIII + 464 p.). Personalitatea autorului, a profesorului IOACHIMESCU, se detaşează clar şi luminos pe ecranul amintirilor studenţeşti.

L'am avut profesor. Nu de mecanică; de Algebră, la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. El, alături de marele său coleg de atunci, profesorul GHEORGHE ŢIŢEICA, constituiau două atracţii puternice pentru cei ce veneau să păşească pentru prima oară pragul universităţii.

Pedagogi desăvârşiţi, înarmaţi în acelaşi timp cu ştiinţa necesară pentru a satisface setea noastră de lucruri noui, cei doi profesori se prezentau publicului studenţesc sub două forme personale, deosebite între ele, fiecare din cele două forme având farmecul său. Pe când la ŢIŢEICA lecţia era o înlănţuire logică, transparentă, implacabilă, prin care se realiza o prelungire univocă a lecţiilor precedente, prelegerea lui IOACHIMESCU avea rotunjiri şi surprize la fiece întorsătură de raţionament, construindu-şi întregul ei din descoperiri făcute sub inspiraţie momentană.

Dacă am încerca să cazăm în câte o clasă, omologându-i pe cei doi profesori cu personalităţi similiare, am spune că ŢIŢEICA era un spirit „analitic" pe când IOACHIMESCU ţinea mai mult de tipul „sintetic". Trebue să recunosc însă că o astfel de încadrare în limitele uniformizante a două noţiuni este cu totul insuficientă şi incompletă, când e vorba de două personalităţi aşa de complexe.

Ambii aveau comun o putere misterioasă de a ridica potenţialul de înţelegere al studenţilor, de a le da un elan de lucru care persista remanent multă vreme dincolo de limitele orei de curs. Întrebuinţând mijloace deosebite, ei realizau acelaşi climat spiritual de intens dinamism, care a însemnat pentru cei mai mulţi dintre noi, începutul unei solide culturi matematice.

IOACHIMESCU preda, cum am spus, Algebra. Vă închipuiţi ce instrument puternic de transmisiune dela profesor la student era metoda aceasta a predării sub inspiraţie, mai ales în capitolele aşa de delicate ale Teoriei Grupurilor lui GALOIS, material matematic neobicinuit de nou la noi pe vremea aceia (1904).

Imi pare rău că n'am putut aprecia avantagiile unei asemenea metode, unite cu un dar pedagogic deosebit, la predarea cursului de Mecanică pentrucă n'am fost elevul său la studiul ei. Poate că din cauza aceasta ar fi fost mai nimerit ca recenzia cărţii sale să fie făcută de cineva care i-a audiat lecţiile de Mecanică — şi nu de unul care n'a luat cunoştinţă de ele decât din auzite şi, acum, din cursul tipărit. Cum însă n'am putut refuza amabila invitaţie a Redacţiei *Gazetei Matematice* mai cu seamă fiind vorba de opera unuia dintre cei mai iubiţi profesori ai mei, m'am străduit să suplinesc lipsa semnalată şi să pătrund prin extrapolare, în atmosfera reală din sala de prelegeri a autorului.

Am citit cursul cu mult interes, aşi putea spune cu emoţie. Predau Mecanica de 34 de ani, dintre care nouă ani la Şcoala Politehnică din Timişoara, restul la Universitatea din Iaşi şi Bucureşti; am avut deci tot timpul să intru în multe ascunzişuri ale acestei discipline minunate şi să chibzuesc asupra metodei. Cartea lui IOACHIMESCU mi-a dat satisfacţia să constat că fără a ne fi consultat vre-o dată, ne potrivim la gânduri.

Intrarea în inima disciplinei prin calea pe care ne-o deschide *Statica* este foarte potrivită, mai ales pentru studenţii dela politehnică. Acest procedeu are două avantagii pe care IOACHIMESCU le foloseşte minunat: întâi, o Mecanică începând cu capitole de Statică are aparenţa unei prelungiri a Geometriei în cât nu sperie pe începători; al doilea, Statica este disciplina cea mai indicată să ne familiarizeze cu noţiunea aşa de enigmatică a *forţei*, dându-i acesteia aspectul ei cel mai concret în producerea echilibrului. La aceste două motive aşi mai adăoga unul mai puţin important poate, dar care a jucat, gândesc, un rol în distribuirea materialului: Statica este primul capitol al Mecanicei de care are ingineria nevoie — şi anume într'o foarte largă măsură; este natural să i sea oarecare preferinţă.

Se înţelege că începe cu *forţele concurente* — echilibrul lor — pentru a trece apoi prin noţiunea de *momente* la forţe situate într'un plan (e vorba de sisteme nedeformabile) şi la condiţiile de echilibru relativ la un sistem de forţe aplicate unui solid rigid oarecare.

Chestiunea *legăturilor* este desvoltată între timp cu foarte multă dibăcie şi claritate. In special capitolul V relativ la un punct cuprinde în esenţă tot ce trebuia spus relativ la legăturile *uni* — şi *bilaterale*, pentru ca apoi înţelegerea cazurilor mai complicate dela capitolul VII să fie mult înlesnită.

Mai departe, în capitolul XIII, la echilibrul forţelor aplicate corpurilor solide, ajunge în mod natural la poligonul lui CREMONA şi metoda lui RITTER aşa de mult folosite în Mecanica tehnică, în *Rezistenţa materialelor*, fără a neglija totuşi metoda teoretică de tratare a firului flexibil şi inextensibil. Urmează un frumos capitol (XV) asupra *frecărilor* şi altul (XVI) asupra *maşinilor simple* care îmbogăţeşte disciplina cu aplicaţii practice de mare utilitate pentru cultura inginerului.

Trece relativ repede asupra *Cinematicei*, cum se şi cuvine, limitându-se la noţiunile strict necesare Dinamicei.

In *Dinamică* însă autorul ne arată măsura minunatului său simţ pedagogic, dând atenţia ce se cuvine tuturor chestiunilor esenţiale în inginerie şi

schiţând numai, sau înlăturând complect problemele ce au mai puţină legătură cu scopul urmărit.

In fruntea Dinamicei găsim postulatele ei reduse la cele esenţiale: postulatul inerţiei, postulatul proporţionalităţii forţei cu acceleraţia, postulatul independenţei acţiunii forţelor şi postulatul acţiunii şi reacţiunii. Ele sunt ilustrate cu exemble intuitive care le înlesnesc înţelegerea şi acceptarea.

Trece apoi la *unităţi de măsură*, oprindu-se atât cât trebue asupra similitudinii şi continuând cu noţiunea de lucru mecanic, respectiv putere. Numeroase exemple potrivite lămuresc noţiunile acestea aşa de importante în Mecanică.

După o sumară schiţă a noţiunii de *vector* intră în Dinamica propriu zisă prin forţa care i-a dat naştere: *forţa gravitaţiei universale.* Aici autorul are prilejul să introducă noţiunea de *câmp* şi să schiţeze o teorie a *potencialului.*

Energia cinetică îi reţine atenţia în mod deosebit, pe drept cuvânt. Relaţia dintre *energia cinetică* şi *lucrul mecanic* este comentată în lumina unor exemple practice foarte bine alese. Trecând apoi la *energia potenţială* ajunge astfel în mod natural la *principiul conservării energiei.*

In capitotul VIII, IX, X şi XI autorul se ocupă de principiul lui D'ALEMBERT precum şi de aplicaţiile acestuia la calculul *volanului* şi a *regulatorilor;* tot aici deduce teorema *impulsului* şi aceea a *momentelor* presupunând transformată problema dinamică din punct de vedere formal, la una de Statică.

Capitolul următor, al *deplasărilor virtuale* (autorul le spune *« strămutări virtuale »*) este plin de aplicaţii practice pentru Statică — se înţelege cu ajutorul noţiunii de *lucru mecanic virtual.*

După această desvoltare de metode generale de lucru, autorul intră în tratarea câtorva probleme speciale, importante: mişcarea punctului greu, mişcarea planetară, mişcarea pendulului simplu. La mişcarea solidului, *pendulul fizic* (compus) ocupă un loc important. Schiţează şi mişcarea solidului cu un punct fix, iar ecuaţiile lui LAGRANGE le întrebuinţează pentru a studia mai de aproape stabilitatea echilibrului unui sistem de puncte.

Cursul este complectat cu principiul lui GAUSS şi acela al lui HAMILTON precum şi cu un capitol asupra *percusiunilor.*

Cum se vede, într'un spaţiu restrâns, autorul reuşeşte să ne dea un bogat material. Desfăşurarea lui de-a-lungul cursului nu se poate spune că reprezintă ultimul cuvânt în ştiinţă, reprezintă însă desigur tot ceea ce ar fi necesar unui student inginer, cu claritate şi cu metodă. Numeroase figuri executate cu intenţii didactice pronunţate înlesnesc considerabil înţelegerea teoremelor.

Intr'un cuvânt, cursul profesorului IOACHIMESCU este o bună carte pentru asimilarea Mecanicei, mai ales pentru studenţii şcoalelor superioare tehnice.

Cred că *Gazeta Matematică* a făcut bine că a fixat pe filmul vremii, prin tipărirea cursului, acest aspect al personalităţii marelui dascăl, poate cel mai important al său.

Se cuvine câte un cuvânt de mulţumire d-şoarei GABRIELA ŢIŢEICA şi d-lui Ing. AL. STOENESCU, sub îngrijirea cărora manuscrisul a obţinut forma sa definitivă; de asemeni d-lui Ing. G. A. IOACHIMESCU, fiul autorului, care nu numai că a avansat sumele necesare imprimărei dar a supraveghiat operaţi tipărirei, desfăşurând o muncă de sacrificiu şi o energie cu adevărat pilduitoare.

V. VÂLCOVICI.

D. I. MANGÉRON: Opera ştiinţifică a „Şcolii" Galileene. (Extras din Revista Ştiinţifică „V. Adamachi").

ING. AL. STOENESCU: Extinderea unei metode întrebuinţate la studiul fenomenelor mecanice. (Extras din *Gazeta Matematică*, Vol. LI).

ING. AL. STOENESCU: Generalizarea formulei lui BINET. (Extras din *Gazeta Matematică*, Vol. LI).

ING. AL. STOENESCU: Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant. (Ext. din Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Bucarest).

ING. AL. STOENESCU: Sur les systèmes de forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donnée. (Extr. din Bulletin de l'Ecole polytechnique de Bucarest).

C. C. TEODORESCU: Probleme de rezistenţa materialelor. Caietul 2. Încovoierea grinzilor drepte. Imprimeria C. F. R. Bucureşti.

T. VESCAN: Une correction de la loi de la force de VAN der WAALS appliquée au calcul des tensions superficielles. (Extras din Revista Ştiinţifică „V. Adamachi").

DIVERSE

a) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

ING. G. S. GEORGESCU. Călăuza atelierului mecanic. Vol. I.

Două exemplare donate de autor.

C. C. TEODORESCU. Probleme de rezistenţa materialelor. Caietul 2. Încovoierea grinzilor drepte.

Donată de autor.

b) Personale

1. D-l AL. V. NICULESCU, membru al Societăţii *Gazeta Matematică* a obţinut titlul de doctor în matematici al Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti în ziua de 22 Aprilie 1947 cu teza de *Geometrie diferenţială centroaxială parabolică a curbelor plane şi strâmbe*, în faţa comisiei compusă din d-nii Prof. G. VRÂNCEANU preşedinte şi Profesori AL. PANTAZI şi N. TEODORESCU membri.

2. D-l Prof. P. SERGESCU, membru al Societăţii *Gazeta Matematică* a primit direcţiunea revistei « *Traveaux sur l'histoire des Mathématiques* » din Paris şi a fost numit preşedintele secţiei Istoria Ştiinţelor din Asociaţia Franceză din Paris pentru înaintarea ştiinţelor.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2820. *Dacă* N *este un întreg divizibil cu* 9^4 *şi prim cu* A, *să se demonstreze că fracţiunea periodică* $\frac{A}{N}$ *are o perioadă de cel puţin 729 cifre.*

VICTOR ŞERBĂNESCU.

Problema este o aplicaţie imediată a următoarei teoreme cunoscute [1]

Dacă $\frac{A}{N}$ *este o funcţie periodică în care* $N = KN'$ *k fiind produsul tuturor factorilor 2 şi 5 ai lui* N, *numărul cifrelor perioadei este egal cu exponentul celei mai mici puteri a lui 10, care divizată prin* N' *dă restul 1.*

In cazul problemei de faţă avem $N = K.M.9^4$, k fiind produsul tuturor factorilor 2 şi 5, iar M un număr prim cu 2 şi 5. Perioada are p cifre, numărul p fiind dat de valoarea lui p pentru care

$$10^p - 1 = (1+9)^p - 1 = Q.M.9^4$$

Desvoltând pe $(1+9)^p$ după binomul lui NEWTON avem

$$C_p^1 \times 9 + C_p^2 \times 9^2 + C_p^3 \times 9^3 + C_p^4 \times 9^4 + \ldots = Q.M.9^4$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc în numere întregi, trebue ca întâi

$$C_p^1 \times 9 + C_p^2 \times 9^2 + C_p^3 \times 9^3 = 9\,[C_p^1 + C_p^2 \times 9 + C_p^3 \times 9^2]$$

să se dividă cu 9^4. Dar

$$9\,(C_p^1 + 9\,C_p^2 + 9^2\,C_p^3) = 9p\left[1 + 9\,\frac{p-1}{2} + 27\,\frac{(p-1)\,(p-2)}{2}\right]$$

nu se divide prin 9^4 de cât dacă p se divide prin 9^3. Cum $p \neq 0$ urmează $p \geqslant 9^3 = 729$, ceeace demonstrează problema.

V. Ş.

S'au primit soluţii bune dela d-nii: AL. FINŢESCU, I. B. FLORESCU, AL. NICULESCU, AL. TAUBER şi M. VASILIU.

---

1) E. COMBETTE, *Cours d'Arithmétique*, 11-e édition. Paris 1902, pag. 192.

PROBLEMA 3308. *Să se calculeze determinantul*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \dots u_n^2 \\ u_n^2 & u_1^2 & u_2^2 \dots u_{n-1}^2 \\ u_{n-1}^2 & u_n^2 & u_1^2 \dots u_{n-2}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 \dots u_1^2 \end{vmatrix},$$

$u_1, u_2, u_3, \dots$ *fiind termenii şirului lui* FIBONACCI ($u_1 = 1, u_2 = 2$).

N. KAUFMANN.

Vom stabili întâi câteva relaţiuni şi formule preliminare.

1°. Expresia termenului de rang n al şirului lui FIBONACCI este

$$u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b},$$

unde a şi b sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Se verifică în adevăr uşor că $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Vom ţine seama în calculele ce urmează de următoarele relaţiuni

$$a + b = 1 \; ; \; (a - b)^2 = 5 \; ; \; ab = -1 \; ; \; a^2 + b^2 = 3.$$

2°. Avem

$$a^n + b^n = u_n + u_{n-2}.$$

In adevăr

$$a^n + b^n = \frac{(a^n + b^n)(a - b)}{a - b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1} - ab(a^{n-1} - b^{n-1})}{a - b}$$

$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} = u_n + u_{n-2}.$$

3°. Avem relaţiunea

$$u_{2n+2} + u_{2n} = 5u_n^2 - 2(-1)^n.$$

In adevăr din

$$u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

deducem

$$u_n^2 = \frac{a^{2n+2} + b^{2n+2} - 2(-1)^{n+1}}{(a-b)^2}$$

sau, ţinând seama de 2^0:

$$u_n^2 = \frac{u_{2n+2} + u_{2n} + 2(-1)^n}{5}.$$

4^0. Avem

$$u_{n-2} + u_{n+2} = 3u_n,$$

căci

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1}$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = (u_n + u_{n-1}) + u_n = 2u_n + u_{n-1},$$

de unde prin adunare

$$u_{n-2} + u_{n+2} = 3u_n.$$

5^0. Avem

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+2}$$

Inlocuind în 3^0 pe n prin $n+1$ şi adunând u_n^2 cu u_{n+1}^2 găsim

$$u_n^2 + u_{n+1}^2 = \frac{u_{2n+4} + 2u_{2n+2} + u_{2n}}{5} = \frac{(u_{2n+3} + u_{2n+2}) + 2u_{2n+2} + (u_{2n+2} - u_{2n+1})}{5}$$

$$= \frac{u_{2n+3} + 4u_{2n+2} - u_{2n+1}}{5} = \frac{(u_{2n+2} + u_{2n+1}) + 4u_{2n+2} - u_{2n+1}}{5} = u_{2n+2}.$$

6^0. Avem

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n u_{n+1} - (-1)^n$$

care se poate scrie şi

$$u_n^2 = u_{n-1} u_{n+1} + (-1)^n.$$

In adevăr din 3^0 şi din

$$u_{n+1} u_{n-1} = \frac{(a^{n+2} - b^{n+2})(a^n - b^n)}{(a-b)^2} = \frac{a^{2n+2} + b^{2n+2} - (ab)^n (a^2 + b^2)}{5}$$

$$= \frac{u_{2n+2} + u_{2n} - 3(-1)^n}{5}$$

prin scădere se obţine relaţiunea arătată.

7°. Să găsim expresia sumei

$$S = \sum_1^n u_{2i} x^i = u_2 x + u_4 x^2 + u_6 x^3 + \ldots + u_{2n} x^n .$$

Putem scrie

$$S = \sum_1^n u_{2i} x^i = \sum_1^n \frac{a^{2i+1} - b^{2i+1}}{a-b} x^i = \frac{1}{a-b} \sum_1^n a^{2i+1} x^i$$

$$- \frac{1}{a-b} \sum_1^n b^{2i+1} x^i = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{a^{2n+3} x^{n+1} - a^3 x}{a^2 x - 1}$$

$$- \frac{1}{a-b} \cdot \frac{b^{2n+3} x^{n+1} - b^3 x}{b^2 x - 1} .$$

Efectuând calculele găsim

$$S = \frac{a^2 b^2 (a^{2n+1} - b^{2n+1}) x^{n+2} - a^2 b^2 (a-b) x^2 - (a^{2n+3} - b^{2n+3}) x^{n+1} + (a^3 - b^3) x}{(a-b) a^2 b^2 \left(x - \frac{1}{a^2}\right)\left(x - \frac{1}{b^2}\right)}$$

$$= \frac{u_{2n} x^{2+n} - x^2 - u_{2n+2} x^{n+1} + 2x}{(x - a^2)(x - b^2)} ,$$

adică

$$S = \sum_1^n u_{2i} x^i = \frac{u_{2n} x^{n+2} - u_{2n+2} x^{n+1} - x^2 + 2x}{x^2 - 3x + 1}$$

8°. Să găsim suma

$$f(x) = \sum_1^n u_i^2 x^{i-1} = u_1^2 + u_2^2 x + u_3^2 x^2 + \ldots + u_n^2 x^{n-1}$$

Conform celor stabilite la 3° avem

$$f(x) = \sum_1^n u_i^2 x^{i-1} = \sum_1^n \frac{u_{2i+2} + u_{2i} + 2(-1)^i}{5} x^{i-1}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_1^n u_{2i+2} x^{i-1} + \frac{1}{5} \sum_1^n u_{2i} x^{i-1} - \frac{2}{5} \sum_1^n (-x)^{i-1}$$

Dar, conform formulei dela 7° avem

$$\sum_1^n u_{2i+2} x^{i-1} = \frac{1}{x^2} \sum_1^n u_{2i+2} x^{i+1} = \frac{1}{x^2} \left[\sum_1^n u_{2i} x^i - u_2 x + u_{2n+2} x^{n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} (S - u_2 x + u_{2n+2} x^{n+1}).$$

Apoi

$$\sum_1^n u_{2i}\, x^{i-1} = \frac{1}{x}\sum_1^n u_{2i}\, x^i = \frac{1}{x}\,S$$

şi

$$\sum_1^n (-x)^{i-1} = \frac{(-x)^n - 1}{-x-1}$$

Inlocuind şi efectuând calculele găsim:

$$f(x) = \frac{[u_{2n}+u_{2n+2}+2(-1)^n]\,x^{n+4}+[2u_{2n}-3u_{2n+2}-6(-1)^n]x^{n+3}+[u_{2n}-4u_{2n+2}+2(-1)^n]\,x^{n+2}-5x^2(x^2-2x-1}{5x^2\,(x+1)\,(x^2-3x+1)}$$

Din formula dela 4⁰ deducem înlocuind n cu $2n+2$

$$u_{2n} + u_{2n+4} = 3\,u_{2n+2}.$$

Putem scrie:

$$u_{2n} - 4\,u_{2n+2} + 2(-1)^n = (u_{2n} - 3\,u_{2n+2}) - u_{2n+2} + 2(-1)^n$$
$$= -u_{2n+4} - u_{2n+2} - 2(-1)^{n+1} = -5\,u_{n+1}^2$$

Apoi

$$2\,u_{2n} - 3\,u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2}) + (u_{2n} - 4\,u_{2n+2}) = [5\,u_n^2 - 2(-1)^n]$$
$$- [5\,u_{n+1}^2 + 2(-1)^n] = 5\,u_n^2 - 5\,u_{n+1}^2 - 4(-1)^n.$$

Inlocuind şi simplificând obţinem:

$$f(x) = \frac{u_n^2 x^{n+2} - (u_{n+1}^2 - u_n^2 + 2(-1)^n]\,x^{n+1} - u_{n+1}^2\,x^n - x^2 + 2x + 1}{(x+1)\,(x^2-3x+1)}$$

9⁰. Să calculăm valoarea $f(-1)$. Se observă că pentru această valoare numărătorul şi numitorul expresiei lui $f(x)$ devin nuli. Aplicând regula lui HÔPITAL se găseşte.

$$f(-1) = \frac{-(u_{n+1}^2 + u_n^2)(-1)^n - 2(n-1)}{5} = -\frac{(-1)^n\,u_{2n+2} + 2(n-1)}{5}$$

10⁰. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ rădăcinile ecuaţiei $x^n - 1 = 0$. Să calculăm produsul

$$P = (A\alpha_1 + B)(A\alpha_2 + B) \ldots (A\alpha_n = B).$$

Putem scrie

$$P = \prod_1^n (A\alpha_i + B) = A^n \cdot \prod_1^n \left(\alpha_i + \frac{B}{A}\right) = (-A)^n \cdot \prod_1^n \left(-\alpha_i - \frac{B}{A}\right).$$

Dar

$$x^n - 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Deci

$$P = (-A)^n \cdot \left[\left(-\frac{B}{A}\right)^n - 1\right] = B^n - (-A)^n.$$

In particular pentru $A = B = 1$ avem

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1) = 1 - (-1)^n.$$

11°. Să calculăm produsul

$$P' = (\alpha_1^2 + p\alpha_1 + q)(\alpha_2^2 + p\alpha_2 + q) \ldots (\alpha_n^2 + p\alpha_n + q).$$

Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ avem

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Deci

$$P' = (\alpha_1 - x_1)(\alpha_2 - x_1) \ldots (\alpha_n - x_1) \times (\alpha_1 - x_2)(\alpha_2 - x_2) \ldots (\alpha_n - x_2)$$

și după formula precedentă

$$P' = [(-x_1)^n - (-1)^n] \times [(-x_2)^n - (-1)^n] = (x_1^n - 1)(x_2^n - 1)$$
$$= (x_1 x_2)^n - x_1^n - x_2^n + 1$$

adică

$$P' = 1 + q^n - (x_1^n + x_2^n).$$

Fie în particular $x^2 - 3x + 1 = 0$, adică $p = 3$, $q = 1$. Rădăcinile sunt $x_1 = a^2$, $x_2 = b^2$, a și b fiind rădăcinile trinomului $x^2 - x - 1$.

Avem deci

$$x_1^n + x_2^n = a^{2n} + b^{2n} = u_{2n} + u_{2n-2}$$

Prin urmare

$$(\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)(\alpha_2^2 - 3\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n^2 - 3\alpha_n + 1) = -u_{2n} - u_{2n-2} + 2$$
$$= -5u_{n-1}^2 + 2 - 2(-1)^n.$$

12°. Fie ecuația

$$x^2 - Ax - B^2 = 0$$

și x_1, x_2 rădăcinile sale.

Să ne propunem să găsim valoarea lui

$$v_n = x_1^n + x_2^n.$$

Să înmulțim ecuația cu x^n:

$$x^{n+2} - Ax^{n+1} - B^2 x^n = 0.$$

Avem deci

$$x_1^{n+2} = Ax_1^{n+1} + B^2 x_1^n \;\therefore\; x_2^{n+2} = Ax_2^{n+1} + B^2 x_2^n$$

şi adunând

$$v_{n+2} = Av_{n+1} = B^2 v_n .$$

Am găsit deci o formulă de recurenţă între cantităţile $v_1, v_2, v_3, \ldots$

Considerăm acum determinantul.

$$\delta_n = \begin{vmatrix} A & B & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -B & A & B \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -B & A \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots\ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & A & B \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -B & A \end{vmatrix}$$

Desvoltând după elementele primei linii avem

$$\delta_n = A\,\delta_{n+1} + B^2\,\delta_{n+2},$$

adică aceiaşi formulă de recurenţă care leagă pe v_1, v_2, v_3.

Putem pune deci

$$\delta_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n,$$

λ, μ fiind coeficienţi pe cari trebue să-i determinăm:

Scriind că $\delta_1 = A$ şi $\delta_2 = A^2 + B^2$, avem

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = A = x_1 + x_2$$
$$\lambda x_1^2 + \mu x_2^2 = A^2 + B^2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 .$$

Deducem uşor

$$\lambda = \frac{x_1}{x_1 - x_2}, \mu = -\frac{x_2}{x_1 - x_2} .$$

Deci

$$\delta_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} .$$

Putem scrie acum

$$v_n = x_1^n + x_2^n = \frac{(x_1^n + x_2^n)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$
$$- x_1 x_2 \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$$

adică

$$v_n = \delta_n + B^2\,\delta_{n-2} .$$

Valoarea *explicită* a lui δ_n este [1]

$$\delta_n = A^n + C^1_{n-1} A^{n-2} B^2 + C^2_{n-2} A^{n-4} B^4 + C^3_{n-3} A^{n-6} B^6 + \ldots$$

Inlocuind în expresia lui v_n şi observând că

$$C^i_{n-i} + C^{i-1}_{n-i-1} = \frac{n}{i} C^{i-1}_{n-i-1}$$

obţinem

$$v_n = x_1^n + x_2^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-2} B^2 + \frac{n(n-3)}{1.2} A^{n-4} B^4$$

$$+ \frac{n(n-4)\,n-5)}{1.2.3} A^{n-6} B^6 + \ldots$$

Să trecem acum la calculul determinantului propus. Acesta e un *determinant circular* sau un *circulant* a cărui valoare se calculează astfel [2].

Punem

$$f(x) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 x^2 + \ldots + u_n^2 x^{n-1}$$

şi fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ rădăcinile ecuaţiei $x^n - 1 = 0$.

Valoarea determinantului este

$$\Delta_n = f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_2) \cdot f(\alpha_3) \ldots f(\alpha_n).$$

Făcând $x = \alpha$ în valoarea lui $f(x)$ găsită la 8° şi seama că $\alpha^n = 1$ obţinem

$$f(\alpha) = \frac{u_n^2 \alpha^2 - [u_{n+1}^2 - u_n^2 + 2(-1)^n]\alpha - u_{n+1}^2 - \alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha+1)(\alpha^2 - 3\alpha + 1)}$$

Vom deosebi 2 cazuri, după cum n este par sau

Cazul I. n *este par.* In acest caz avem

$$f(\alpha) = \frac{(u_n^2 - 1)\alpha^2 - (u_{n+1}^2 - u_n^2)\alpha - u_{n+1}^2 + 1}{(\alpha+1)(\alpha^2 - 3\alpha + 1)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)u_n^2 - (\alpha+1)u_{n+1}^2 - (\alpha^2-1)}{(\alpha+1)(\alpha^2 - 3\alpha + 1)}$$

$$= \frac{\alpha u_n^2 - u_{n+1}^2 - \alpha + 1}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = \frac{(u_n^2 - 1)\alpha - (u_{n+}^2}{\alpha^2 - 3\alpha +}$$

---

1) CESÀRO, *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analy*

2) CESÀRO, uvrajul citat sau studiul d-lui Prof. TH. ANGHELUŢ cat în G. M., XXXV, pag. 412).

Trebue să dăm acum lui α valorile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi să calculăm produsul $f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_n)$. Printre aceste valori figurează şi $\alpha_1 = -1$. Calculele de mai sus nu sunt însă valabile pentru $\alpha = -1$.

Pentru $f(-1)$ va trebui să luăm valoarea calculată la 9°; adică:

$$-\frac{u_{2n+2}+2n-2}{5} \text{ şi nu } -\frac{u_n^2+u_{u+1}^2-2}{5} = -\frac{u_{2n+2}-2}{5},$$

care rezultă din expresia lui $f(\alpha)$ de mai sus.

In baza celor stabilite la 10° şi 11° putem scrie

$$\prod_1^n f(\alpha_i) = \prod_1^n \frac{(u_n^2-1)\alpha_i - (u_{n+1}^2-1)}{\alpha_i^2 - 3\alpha_i + 1} = \frac{(u_{n+1}^2-1)^n - (u_n^2-1)^n}{-5u_{n-1}^2}.$$

Prin urmare

$$\Delta_n = -\frac{u_{2n+2}+2n-2}{u_{2n+2}-2} \cdot \frac{(u_{n+1}^2-1)^n - (u_n^2-1)^n}{5u_{n-1}^2}. \quad (n = \text{par})$$

Cazul II. — n *este impar.* — In acest caz

$$f(\alpha) = \frac{(u_n^2-1)\alpha^2 - (u_{n+1}^2 - u_n^2 - 4)\alpha - (u_{n+1}^2-1)}{(\alpha+1)(\alpha^2-3\alpha+1)}.$$

Aci -1 ne mai fiind rădăcină a ecuaţiei binome $x^n - 1 = 0$ l $\alpha + 1$ nu se mai poate anula.

Putem scrie

$$\prod_1^n f(\alpha_i) = \prod_1^n \frac{(u_n^2-1)\alpha_i^2 - (u_{n+1}^2 - u_n^2 - 4)\alpha_i - (u_{n+1}^2-1)}{(\alpha_i+1)(\alpha_i^2-3\alpha_i+1)}.$$

x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei

$$(u_n^2-1)x^2 - (u_{n+1}^2 - u_n^2 - 4)x - (u_{n+1}^2-1) = 0.$$

n avea, în baza formulelor dela 10° şi 11°:

$$\Delta_n = \frac{(u_{n+1}^2-1) - (u_n^2-1)^n + (u_n^2-1)^n (x_1^n + x_2^n)}{2(5u_{n-1}^2 - 4)}.$$

punem

$$\xi = (u_n^2-1)x.$$

este dat de ecuaţia

$$\xi^2 - (u_{n+1}^2 - u_n^2 - 4)\xi - (u_n^2-1)(u_{n+1}^2-1) = 0$$

sau, observând conform celor dela 6° că $u_{n+1}^2 - u_n^2 - 4 = u_n u_{n+1} - 3$ pentru n impar,

$$\xi^2 - (u_n u_{n+1} - 3)\xi - (u_n^2 - 1)(u_{n+1}^2 - 1) = 0.$$

Expresia lui Δ_n devine

$$\Delta_n = \frac{(u_{n+1}^2 - 1)^n - (u_n^2 - 1)^n + \xi_1^n + \xi_n^2}{2(5u_{n-1}^2 - 4)} \qquad (n = \text{impar})$$

unde conform formulei dela 12°

$$\xi_1^n + \xi_2^n = (u_{n+1} u_n - 3)^n + \frac{n}{1}(u_{n+1} u_n - 3)^{n-2}(u_{n+1}^2 - 1)(u_n^2 - 1) +$$

$$+ \frac{n(n-3)}{1.2}(u_{n+1} u_n - 3)^{n-4}(u_{n+1}^2 - 1)^2 (u_n^2 - 1)^2$$

$$+ \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(u_{+1} u_n - 3)^{n-6}(u_{n+1}^2 - 1)^4 (u_n^2 - 1)^4 + \ldots$$

S'a primit o bună soluţiune dela d-l I. B. FLORESCU bazată pe articolul citat al d-lui prof. TH. ANGHELUŢĂ.

N. K.

PROBLEMA 4067. *Să se găsească condiţia pentru ca rădăcinile ecuaţiei*

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

să aibă acelaşi modul. Să se verifice condiţia găsită: 1°) *când* p *şi* q *sunt reali;* 2°) *pentru ecuaţia*

$$x^2 - 2ix - 2 = 0.$$

Să se deducă condiţiile ca rădăcinile ecuaţiei (1) *să aibă modulul 1.*

TH. ANGHELUŢĂ.

Pentru scurtarea exprimării vom folosi notaţia

$$\cos a + i \sin a = e^{ia}.$$

Corespondenţii, care nu sunt obişnuiţi cu această notaţie, pentru verificare, pot să înlocuiască, în cele ce urmează, partea a doua a egalităţii cu prima parte şi să facă operaţiile indicate de semne.

Presupunând că rădăcinile x_1, x_2, ale ecuației date, au același modul ρ, punem

$$x_1 = \rho e^{i\alpha} \quad , \quad x_2 = \rho e^{i\beta}$$

unde α și β înseamnă argumentele. Avem atunci egalitățile

$$\rho(e^{i\alpha} + e^{i\beta}) = -p \quad , \quad \rho^2 e^{i(\alpha+\beta)} = q,$$

de unde rezultă

$$\frac{p^2}{q} = \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^2.$$

Presupunem $q \neq 0$, căci în caz contrar, avem $\rho = 0$, deci $p = 0$ și ecuația are amândouă rădăcinile nule. Ținând seama de egalitatea

$$\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

urmează

$$p^2 = 4q\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Cu alte cuvinte $\frac{p^2}{4q}$ *se află cuprins în intervalul (0, 1).*

Aceasta este condiția necesară ca rădăcinile ecuației (1) să aibă același modul. Condiția este și suficientă, căci fiind îndeplinită, punem

$$p^2 = 4q\cos^2\omega$$

unde ω este în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Deducem

$$p = 2\sqrt{q}\cos\omega$$

unde $\sqrt{q}$ are valoarea așa ca partea a doua a egalității să fie egală cu p. Scriind ecuația propusă sub forma

$$(x + \sqrt{q}\cos\omega)^2 = -q\sin^2\omega,$$

obținem rădăcinile $-\sqrt{q}\,e^{\pm i\omega}$, care au modulele egale cu $\sqrt{|q|}$.

1°. Condiția fiind satisfăcută, avem $q > 0$, $p^2 - 4q < 0$. Rădăcinile ecuației au modulele egale, fiind imaginar conjugate.

2°. Avem $\omega = \frac{\pi}{4}$, $p = -2i\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$ și rădăcinile $i \pm 1$.

Rădăcinile ecuației vor avea modulul egal cu 1, dacă pe lângă condiția găsită avem modulul lui q egal cu 1.

Au rezolvat problema d-nii: MIRCEA LEONTE NEGREA (student București), Sublt. IOAN C. SAVIN (student Iași), G. G. VRÂNCEANU (Clasa a VII-a liceul militar „Mihai Viteazul", Timișoara).

PROBLEMA 5142. *Să se calculeze suma*

$$\sum_{p=1}^{2n+1}\left[\sum_{i=0}^{2k}\sin(2pk+2i+2p+1)t+\sum_{i=0}^{2k}\sin(2(p+1)k+2i+2p+1)t\right]$$

GH. VASILIU.

Soluție dată de d-l MIRCEA D. POPA (student inginer Politehnica din București).

Suma S din enunț se poate scrie mai concentrat sub forma:

$$S=\sum_{p=1}^{2n+1}\sum_{i=0}^{2k}[\sin(2pk+2i+2p+1)t+\sin(2(p+1)k+2i+2p+1)t].$$

Se știe că

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad (1)$$

$$\sin a+\sin(a+b)+\ldots+\sin[a+(s-1)b]=\frac{\sin\left[a+\frac{s-1}{2}\right]\sin\frac{s}{2}b}{\sin\frac{b}{2}} \qquad (2)$$

In baza formulei (1) suma S devine succesiv

$$S=\sum_{p=1}^{2n+1}\sum_{i=0}^{2k}2\sin[(2p+1)k+2i+2p+1]t\cos kt$$

$$=2\cos kt\sum_{p=1}^{2n+1}\sum_{i=0}^{2k}\sin[(2p+1)k+2i+2p+1]t$$

$$=2\cos kt\sum_{p=1}^{2n+1}\sum_{i=0}^{2k}\sin[[(2p+1)k+2p+1]t+2it].$$

In baza formulei (2) avem succesiv

$$S=2\cos kt\sum_{p=1}^{2n+1}\frac{\sin[[(2p+1)k+2p+1]t+2kt]\sin(2k+1)t}{\sin t}$$

$$=\frac{2\cos kt\sin(2k+1)t}{\sin t}\sum_{p=1}^{2n+1}\sin[[(2p+1)k+2p+1]t+2kt].$$

Noua sumă se scrie succesiv

$$\sum_{p=1}^{2n+1} \sin [2pk + k + 2p + 1 + 2k]\, t = \sum_{p=1}^{2n+1} [(3k+1)\, t + 2p\,(k+1)\, t]$$

$$= \frac{\sin[(3k+1)t + (2n+1)\,(k+1)t] \sin 2\,(2n+1)\,(k+1)t}{\sin\,(k+1)\, t} - \sin(3k+1)t$$

Cu aceasta suma S devine

$$S = 2\,\frac{\cos kt \sin\,(2k+1)\, t}{\sin t}$$

$$\left[\frac{\sin\,[3k+1+(2n+1)\,(k+1)]\, t \sin 2\,(n+1)\,(k+1)\, t}{\sin\,(k+1)\, t} - \sin(3k+1)t\right].$$

Dacă s'ar fi cerut să se calculeze S pentru p de la 0 la $2n+1$ atunci am avea.

$$S_1 = 2\,\frac{\cos kt \sin\,(2k+1)\, t \sin\,[3k+1+(2n+1)\,(k+1)]\, t \sin 2\,(n+1)\,(k+1)\, t}{\sin t \sin\,(k+1)\, t}$$

Au rezolvat problema şi d-nii: D. D. BUZNEA, ŞT. CETĂŢEANU, I. IANCU, H. REISCHER, MIREL D. STOENESCU şi ŞT. C. TILICĂ.

PROBLEMA 5912. *Fie triunghiul* ABC *dat,* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său ortic şi* $A_2B_2C_2$ *picioarele bisectoarelor triunghiului ortic. Dreapta* BA_2 *taie pe* A_1C_1 *în* B_a, A_2C *pe* A_1B_1 *în* C_a *şi* B_1C_1 *pe* BC *în* A'.

Să se arate că punctele A', Ba, Ca, H *sunt colineare.*

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluţie şi generalizare. Fie ABC un triunghiu oarecare, A_1, B_1, C_1 trei puncte oarecare pe laturile sale şi A_2 un punct oarecare pe dreapta AA_1.

1°. Triunghiurile AB_1C_1 şi $A_2C_aB_a$ sunt omologice, având pe A_1 ca centru de omologie şi pe $A'B_aC_a$ ca axă de omologie.

2°. Pentru cazul particular când A_2 este chiar intersecţia (AA_1, B_1C_1), punctele A', B_a, C_a definesc polara lui A faţă de unghiul $C_1A'A_1$ şi deci intersecţia H (B_aC_a, AA_1) este conjugatul armonic al lui A, faţă de A_2A_1. Intersecţia H' (BB_1 şi CC_1) şi A' definesc deasemenea aceeaşi polară.

Rezultă că punctele A', C_a, H', H, B_a sunt colineare.

3°. Pentru cazul şi mai particular, când triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt omologice, H se confundă cu H'.

4°. Enunţul problemei este un caz cu totul particular, cuprins în 3°.

Cea mai bună soluţie şi generalizare a fost dată de D-l LOCOT. MIRCEA D. POPA.

Generalizări ca la 3° au dat d-nii: SLT C. PANTELIMON (Artileria Antiaeriană, Ploeşti), SLT. MIRCEA AL. VASILESCU-STABU, P. P. DRĂGHICESCU (student inginer Bucureşti), GH. A. GRIGORE (elev particular clasa 8-a), AL. GH. MORAITE (elev particular clasa 8-a Liceul Sf. Sava, Bucureşti).

Soluţii diverse au dat d-nii: I. A. BARBU (elev particular clasa 8-a), CRISTU I. CANTUNIAR (Liceul Titu Maiorescu), I. S. CHIRALEU (Polit. Bucureşti), M. R. CONSTANTINESCU (Liceul Sf. Petru şi Pavel Ploeşti), AL. IEŞAN (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), EMIL MARINESCU (Liceul Aurel Vlaicu, Bucureşti), M. F. VĂDUVA (student-Ing. Polit. Bucureşti) şi M. MIHĂESCU (Liceul Militar Craiova).

D-l P. P. TEODORESCU (Licenl Matei Basarab, Bucureşti), a dat o foarte bună soluţie cu ajutorul coordonatelor baricentrice.

I. GH. Z.

PROBLEMA 6066. *Care este cel mai mic număr de* trei *cifre al cărui indicator este un cub* perfect?

C-DOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de d-nii: C. BERDAN, G. G. VRÂNCEANU şi STELIAN MARINESCU.

Fie N numărul căutat şi $\varphi(N)$ indicatorul său. Conform enunţului, avem:

$$N < 10^3 \quad \therefore \quad \varphi(N) < 10^3.$$

De oarece $\varphi(N)$ este cub perfect el trebue căutat între cuburile perechi mai mici ca 10^3 şi anume

$$2^3 = 8; \quad 2^6 = 64 \quad \text{şi} \quad 6^3 = 216$$

căci în afară de 1 şi 2 toate celelalte numere au indicatorii perechi.

Vom avea

$$\varphi(N) = 2^3 \quad \therefore \quad N = 2^4 = 16$$
$$\varphi(N) = 2^6 \quad \therefore \quad N = 2^7 = 128$$
$$\varphi(P) = 6^3 \quad \therefore \quad N = 2^3 \cdot 3^4 = 648.$$

Soluţia problemei este deci numărul 128.

Au dat soluţia exactă pe căi apropiate cu precedenta d-nii GH. A. GRIGORE, BARBU I. POPESCU, C. C. DIACONU, GH. D. BRAŞOVEANU, E. N. WEGENER, MARIN D. CĂRSTEA, M. R. CONSTANTINESCU, GH. M. VLASIE.

Singurele numere de 3 cifre ale căror indicatori sunt cuburi perfecte sunt 128 şi 648.

G-L GH. B.

EXERCIŢII

29. *Să se găsească un multiplu de 101 al cărui patrat de 9 cifre să fie de forma abc bdb cba.*

M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

R. Dacă N^2 este patratul căutat atunci

$$N^2 = 101\,[990099\,a + 100010\,b + 9902\,c + 99d] + (2a + d - 2c) = 101^2\,M^2$$

Intâi trebue determinate cifrele a, d, c aşa că

$$2a + d - 2c = 0$$

căci $2a + d - 2c$ fiind < 101 nu poate fi multiplu de 101.

Se găseşte următorul tabel de valori

a	0	1	2	3	4
c	0, 1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5	2, 3, 4, 5, 6	3, 4, 5, 6, 7	4, 5, 6, 7, 8
d	1, 2, 4, 6, 8	0, 2, 4, 6, 8	0, 2, 4, 6, 8	0, 2, 4, 6, 8	0, 2, 4, 6, 8

a	5	6	7	8	9
c	5, 6, 7, 8, 9	6, 7, 8, 9	7, 8, 9	8, 9	9
d	0, 2, 4, 6, 8	0, 2, 4, 6	0, 2, 4	0, 2	0

Ducând aceste valori în N^2 se determină valori pentru b pentru ca paranteza mare să fie multiplu de 101. Se găseşte că singura soluţie este

$$10201^2 = 104060401 = 101^4$$

30. *Fie $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ toate numerile prime cu* N *şi mai mici de cât* N. *Să se arate că p_{n-1} este totdeauna nepereche.*

I. B. FLORESCU

R. 1°. N *pereche*, atunci toate numerele prime cu N deci inclusiv p_{n-} sunt neperechi.

2°. N *nepereche*. In acest caz

$$p_n = N - 1 \quad \therefore \quad p_{n-1} = N - 2$$

care este deasemeni nepereche.

In acelaşi fel se arată că dacă N se divide cu trei, atunci p_{n-2} este nepereche, etc.

31. *Să se arate că*

$$\sum_{i=0}^{n} \left(C_{2n+1}^{2i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(C_{2n+1}^{2i+1}\right)^2 = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{2n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(C_{2n}^{2i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(C_{2n}^{2i-1}\right)^2 + (-1)^n C_{2n}^{n} = \frac{1}{2}\left[C_{4n}^{2n} + (-1)^n C_{2n}^{n}\right]$$

C_n^2 *fiind simbolul combinărilor.*

P. P. TEODORESCU.

R. Pentru primele egalităţi se ţine seamă de

$$C_m^p = C_m^{m-p} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{m} \left(C_m^i\right)^2 = C_{2m}^{m}.$$

Pentru ultimele 3 egalităţi se egalează coeficienţii lui x^{2n} al identităţii

$$(x+i)^{2n}(x-i)^{2n} = (x^2+1)^{2n}.$$

32. *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 + (x+5)^3 = 0,$$

LT-COL. E ST. IACOB.

R. Desvoltând şi reducând termenii asemeni avem

$$6x^3 + 4x^2 + 125x + 225 = 0 \quad \therefore \quad (6x+15)(x^2+5x+15) = 0.$$

care se rezolvă imediat.

33. *Să se demonstreze că pentru orice triunghiu, raportul*

$$E = \frac{2R \sin A \sum a^2 \operatorname{cotg} A}{r r_b r_c (r_a - r) \sum \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right)}$$

este constant.

I. I. NOVAC.

R. Ţinând seamă de relaţiile cunoscute

$$\frac{r_a - r}{4R} = \sin^2 \frac{A}{2} \quad ; \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c} \quad ; \quad r_b r_c = p(p-a) = bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

expresia dată devine

$$E = \frac{\sin A \ \Sigma a^2 \operatorname{cotg} A}{2rbc \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \Sigma \frac{2}{hc}} = \frac{\Sigma a^2 \operatorname{cotg} A}{rbc \sin A \Sigma \frac{1}{hc}}.$$

Dar $\Sigma \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$; $bc \sin A = 2S$; $\Sigma a^2 \operatorname{cotg} A = 4S$

pe care ducându-le în E obţinem

$$E = \frac{4S}{2rS\frac{1}{r}} = 2.$$

PROBLEME PROPUSE

6360. Să se găsească un patrat perfect de 4 cifre, format prin alăturarea a două numere din care unul este indicatorul celuilalt.

P. P. THEODORESCU.

6361. Se cere un număr întreg, care înmulţit cu numărul cifrelor lui, dă ca produs numărul cerut, după ce numărul format de jumătatea dela dreapta cifrelor lui a fost mutat la stânga.

LT. M. AL. VASILESCU-STABU.

6362. Se dau în plan punctele fixe A, B şi dreptele Δ_1, Δ_2 care se întâlnesc în O. O dreaptă care trece prin A întâlneşte pe Δ_1, Δ_2 respectiv în C şi D. Fie H, DE, CF ortocentrul şi înălţimile triunghiului CDO. Când AD se roteşte în jurul lui A, se cere:

1°. Locul lui H;

2°. Locul intersecţiilor lui AD cu BE şi BF.

G-L GH. BUICLIU.

6363. Să se găsească locul punctelor M din planul triunghiului ABC, astfel ca polurile dreptelor AM, BM, CM în raport cu cercurile I_a, I_b, I_c să fie 3 puncte situate pe o dreaptă Δ.

Ce devine Δ, când M este complimentarul lui I?

EM. E. MARINESCU.

6364. Două plane M şi N taie muchiile 1, 2,... n ale unei prime în punctele M_1, M_2,... M_n şi N_1, N_2,... N_n. Dreptele (M_1M_2, N_1N_2), (M_2M_3, N_2N_3),... (M_nM_1, N_nN_1) se întâlnesc respectiv în punctele P_{12}, P_{23},... P_{n1}.

Să se arate că avem relaţia:

$$\frac{\overline{P_{12}M_1^2}+\overline{P_{1n}N_1^2}}{\overline{M_1N_1}}+\frac{\overline{P_{23}M_2^2}+\overline{P_{21}N_2^2}}{\overline{M_2N_2}}+\ldots+\frac{\overline{P_{n1}M_n^2}+\overline{P_{n(n-1)}N_n^2}}{\overline{M_nN_n}}$$

$$=\frac{\overline{P_{1n}M_1^2}+\overline{P_{12}N_1^2}}{\overline{M_1N_1}}+\frac{\overline{P_{21}M_2^2}+\overline{P_{23}N_2^2}}{\overline{M_2N_2}}+\ldots+\frac{\overline{P_{n(n-1)}M_n^2}+\overline{P_nM_n^2}}{\overline{M_nN_n}}.$$

Discuţie. Cazul unor segmente paralele M_1N_1, M_2N_2,... M_nN_n situate toate în acelaşi plan.

MARIANA F. NEDELCU.

6365. Să se arate că dacă avem:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \quad , \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0,$$

atunci vom avea şi relaţiile

$$\text{I. } \sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

$$\text{II. } \sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 5\sin(\alpha + \beta + 3\gamma) - 5\sin(2\alpha + 2\beta + \gamma).$$

$$\text{III. } \sin 7\alpha + \sin 7\beta + \sin 7\gamma = 7\sin(\alpha + \beta + 5\gamma) - 14\sin(2\alpha + 2\beta + 3\gamma) + 7\sin(3\alpha + 3\beta + \gamma).$$

$$\text{IV. } \sin 9\alpha + \sin 9\beta + \sin 9\gamma = 9\sin(\alpha + \beta + 7\gamma) - 27\sin(2\alpha + 2\beta + 5\gamma) + 30\sin 3(\alpha + \beta + \gamma) - 9\sin(4\alpha + 4\beta + \gamma).$$

$$\text{V. } \sin 11\alpha + \sin 11\beta + \sin 11\gamma = 11\sin(\alpha + \beta + 9\gamma) - 44\sin(2\alpha + 2\beta + 7\gamma) + 77\sin(3\alpha + 3\beta + 5\gamma) - 55\sin(4\alpha + 4\beta + 3\gamma) + 11\sin(5\alpha + 5\beta + \gamma).$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6366. Se consideră două drepte perpendiculare OX şi OY, un punct A şi o dreaptă δ. Fie M şi N punctele unde dreapta δ taie perpendicularele OX şi OY.

1°. Să se determine dreapta δ astfel ca perpendiculara pe mijlocul segmentului MN să treacă prin punctul A.

OX, OY şi rămânând fixe, iar dreapta δ variind astfel ca această condiţiunc să fie verificată, să se arate că:

2°. Locul geometric al mijlocului segmentului MN este o hiperbolă echilateră (H) ce trece prin O şi A. Pe această hiperbolă punctele O şi A sunt diametral opuse.

3°. Cercul circumscris triunghiului determinat de perpendicularele OX şi OX şi de diametrul hiperbolei (H) conjugat direcţiei normalei în O sau A, la aceeaşi curbă, trece prin A.

4°. Printr'un punct M din plan, trec trei drepte δ. Ortocentrul triunghiului ce are ca vârfuri mijloacele celor trei segmente MN corespunzătoare, coincide cu punctul O.

5°. Dacă punctul P se găseşte pe hiperbola (H), două din mijloacele segmentelor MN relative acestui punct, sunt diametral opuse pe (H).

6°. Două din dreptele δ corespunzătoare unui punct situat pe perpendiculara în O la dreapta OA, sunt perpendiculare.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6367. Să se rezolve sistemul

$$yz + bz + cy = Ax \quad ; \quad zx + cx + az = By ;$$
$$xy + ay + bx = Cz.$$

N. GEORGESCU-ROEGEN.

6368. Să se arate că ori care ar fi n, sumele

$S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$; $\sigma_k = 1^k - 2^k + \ldots + (-1)^{n-1} n^k$

sunt divizibile respectiv s_2, σ_2 sau s_1^2, σ_1^2 după cum k este cu sau fără soţ.

Există alte progresii aritmetice care să se bucure de aceeaşi proprietate?

MIRCEA ADAM.

6369. Să se găsească traiectoriile ortogonale ale cercurilor de rază constantă ce trec printr'un punct fix.

CEZAR COŞNIŢĂ.

6370. O greutate este suspendată într'un punct A prin trei bare AA_1, AA_2, AA_3, articulate la ambele capete, de secţiuni respectiv Ω_1, Ω_2, Ω_3, astfel încât AA_2 este orizontală, iar AA_1 şi AA_3 înclinate cu unghiul α pe orizontală.

Ştiind că extremităţile A_1, A_2, A_3 sunt fixe şi se găsesc pe o aceeaşi verticală, să se determine pentru poziţia de echilibru:

1. Deplasarea pe verticală şi pe orizontală a capătului comun A.
2. Deformaţiile barelor.
3. Rezistenţele în bare.

Barele vor fi considerate confecţionate dintr'un material având coeficientul de elasticitate E şi de greutate neglijabilă.

Rezultatele obţinute vor fi aplicate numeric alegându-se pentru datele problemei valori convenabile.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. Numitorul ultimului raport din enunţul exerciţiului 27, publicat la pag. 325 a numărului trecut este $\Sigma \cos A$, iar nu $\Sigma \sin A$.

2°. La exerciţiul 28 pag. 326 sub radicalul din membrul al doilea se înlocueşte

$$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{prin} \quad \sin 2\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Andonie St. I. (6350); *Băghină V. V.* (4435, 5129, 6039, 101, 201, 54, 62, 70, 82, 331, N); *Bal André* (P); *Birănaş T. I.* (6300, 05, 14, 31, 40, 49); *Bodnărescu H.* (A); *Boerescu I. N. Cezar* (1398, 4045, 685, 6272, 94, 319, 23, 35, 36, 38, 47); *Constantinescu Valeriu* (5517, 21, 6331, 46); *Constantinescu G. Virgil* (6315, 31, 36, P); *Crăcea I. D.* (6036, 39, 74, 88, 105, 11, 20, 243, 52, 350, E, P); *Cursaru C. Radu* (6296, 331); *Dodu A. E.* (6280, 82, 85, 86, E); *Eftode M. Ad.* (6016, 99); *Firescu Gr. Şt.* (6155, 213, 85, E); *Georgescu Răducanu* (P); *Haret Sp. R.* (6343); *Marinescu E. Em.* (P); *Moraite Gh. Al.* (6325); *Moroianu D. Marcel* (6331); *Nedelcu Fl.* Ing. (P); *Nedelcu F. Mariana* (6331, 46, P); *Nemeth E.* (5129, 6330); *Pantea N. Al.* (6162, 68, 75, 233, 80, 330, 40, E); *Popa D. Marcel* (2038, 6325, 53, 55); *Soare V. M.* (6134, 347, E, P); *Stăncescu N. Virgiliu* (5129, 6099); *Stănilă D. G.* (6263); *Ştefănescu I. Sofronie* (6199, 200); *Teodorescu St. I.* (5435); *Teodorescu P. P.* (5822, 6315, 46, 50, 54, 57, E); *Udrea C. I.* (4445, 49, 6016); *Vargă I. Anton* (6344, P); *Vărzaru I. Em.* (6331); *Vasiliu E. Dan* (6270, 87, 331, 50).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cincisute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 500.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 400.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 100.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 150.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 400.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 300.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100.000

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.200.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 100.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 150.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 120.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 50.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 150.000

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII, N-rele 1—8 inclusiv fiind epuizate, abonamentul pentru ultimile patru numere este de 84.000 lei.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV este de 27.000 lei.

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 41.572.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 11 — IULIE 1947

SUMARUL

1. Pe marginea unei note . . . . . *P. P. Drăghicescu.*
2. O problemă de mecanică . . . . . *Alexandru Stoenescu.*
3. Raport pentru decernarea premiului „G. Ţiţeica . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 23—24.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 3677, 4245, 5296, 5450, 6070, 6139.
10. Exerciţii : 34.
11. Probleme propuse: 6371—6380.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa „*Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. „*Gazeta Matematică*":
Marţi 22 Iulie ora 18: Adunarea materiei pentru Nr. 12.
Marţi 5 August ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 12.
Marţi 26 August ora 17: A doua Adunare generală şi adunarea materiei pentru Nr. 1.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — **Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).**

La «*Gazeta Matematică*» se găsesc:

— ***Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică*** Lei 10.000
— ***Lecţiuni de calcul diferenţial*** de A. ANGELESCU . . . . . „ 100.000
— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a «*Gazetei Matematice*» . . . . . „ 500.000

PE MARGINEA UNEI NOTE

N. AGRONOMOF stabileşte în *Gazeta Matematică* Vol. XXXII, pag. 214 o proprietate a dreptei OI ce uneşte centrul cercului circumscris cu centrul cercului înscris într'un triunghiu. La finele pag. 215 acelaşi volum, V. CRISTESCU extinde proprietatea şi pentru dreptele ce unesc centrul cercului circumscris cu unul din centrele cercurilor exînscrise.

Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile ortogonale ale unui punct M, definit prin cordonatele sale baricentrice α, β, γ, pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC. Se ştie că

$$\overline{BA_1} = \frac{a\gamma + c\alpha \cos B}{\alpha+\beta+\gamma}, \overline{CB_1} = \frac{b\alpha + a\beta \cos C}{\alpha+\beta+\gamma}, \overline{AC_1} = \frac{c\beta + b\gamma \cos A}{\alpha+\beta+\gamma}. \quad (1)$$

In nota amintită se demonstrează că dacă

$$\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1}$$

punctul M descrie dreapta OI, iar dacă

$$\overline{CA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{BA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1}$$

punctul M descrie dreapta OI_n.

In cele ce urmează, vom extinde aceste rezultate.

1°. Ne propunem să găsim locul lui M, astfel încât:

$$\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{CA_1} = \overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1} + d \quad (2)$$

d fiind o lungime oarecare.

Relaţia (2) dă:

$$2\left(\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}\right) = a + b + c + d \quad (3)$$

Valorile (1) duse în relaţia (3) dau:

$$2(a\gamma + c\alpha \cos B + b\alpha + a\beta \cos C + c\beta + b\gamma \cos A) =$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c+d)$$

$$\therefore \left[\frac{(b-c)(p-a)}{a} + \frac{d}{2}\right]\alpha + \left[\frac{(c-a)(p-b)}{b} + \frac{d}{2}\right]\beta$$
$$+ \left[\frac{(a-b)(p-c)}{c} + \frac{d}{2}\right]\gamma = 0,$$

adică M descrie o dreaptă Δ paralelă cu OI.

2°. Să calculăm distanţa punctului I la dreapta Δ.

Pentru aceasta folosim formula [1]

$$\lambda = \frac{2S\,(u\alpha' + v\beta' + w\gamma')}{Q} \tag{4}$$

ce dă distanţa punctului de coordonate baricentrice absolute α', β', γ' la dreapta

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \tag{5}$$

unde $$Q^2 = \Sigma a^2\,(u - v)\,(u - w)$$

Coeficientul Q este aşa dar acelaşi pentru orice dreaptă paralelă cu (5).

Deci dreapta Δ şi diametrul OI au acelaşi coeficient Q, care se poate calcula direct, însă preferăm un artificiu care uşurează calculul.

Aria GIO se calculează imediat:

$$S' = \frac{R}{6}\sum\frac{(p-a)\,(b-c)}{a}.$$

Apoi

$$\overline{OI} = \sqrt{R\,(R-2r)}$$

şi deci, δ_g fiind distanţa lui G la dreapta OI avem

$$\delta_g = \frac{2S'}{\overline{OI}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{R}{R-2r}}\sum\frac{(p-a)\,(b-c)}{a}.$$

Pe de altă parte calculând pe δ_g dupa formula (4) avem:

$$\delta_g = \frac{2S}{3Q}\sum\frac{(p-a)\,(b-c)}{a}.$$

Egalând cele două valori ale lui δ_g obţinem coeficientul Q al dreptelor paralele cu OI:

$$Q = 2S\sqrt{\frac{R-2r}{R}}.$$

Deci distanţa punctului I $(a/2p,\ b/2p,\ c/2p)$ la dreapta Δ este

$$\delta = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{R}{R-2r}}.$$

---

1) C. COSNIŢĂ — *Coordonnées barycentriques* — p. 46.

Deci dacă

$$\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BB_1} \pm d \qquad (5')$$

punctul M se găseşte pe una din cele două drepte Δ, Δ' paralele cu diametrul OI la distanţa δ.

3°. Să căutăm locul punctelor M (α, β, γ) ce satisfac condiţiei

$$\overline{CA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{BA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1} + d \qquad (6)$$

Din relaţia (6) deducem

$$2\left(\overline{CB_1} + \overline{AC_1} - \overline{BA_1}\right) = b + c - a + d$$

şi ţinând seama de (1):

$$\alpha\left[\frac{(b-c)\,p}{a} - \frac{d}{2}\right] + \beta\left[\frac{(a+c)\,(p-c)}{b} - \frac{d}{2}\right] - \gamma\left[\frac{(a+b)\,(p-b)}{c} + \frac{d}{2}\right] = 0$$

adică M descrie o dreaptă Δ_a paralelă cu OI_a.

Distanţa dintre Δ_a şi OI_a se calculează la fel şi este:

$$\delta_a = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}}.$$

Deci dacă

$$\overline{CA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{BA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1} \pm d \qquad (6')$$

punctul M se găseşte pe una din cele două drepte Δ_a, Δ_a' paralele cu OI_a la distanţa δ_a.

4°. Dacă $d \neq 0$ dreptele Δ, Δ', Δ_a, Δ_a' formează un paralelogram P ale cărui vârfuri satisfac simultan uneia din relaţiile (5') şi uneia din relaţiile (6').

Se vede imediat că pentru două din vârfurile paralelogramului P, avem

$$\overline{BA_1} = \overline{CA_1},$$

adică ele se găsesc pe mediatoarea laturei BC, iar pentru celelalte două vârfuri avem:

$$\overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{AB_1} + \overline{BC_1},$$

adică ele se găsesc pe dreapta:

$$\alpha bc\,(b-c) + \beta c\,(a^2 - c^2 + bc) - \gamma b\,(a^2 - b^2 + bc) = 0 \qquad (7)$$

Deci când d variază paralelogramele P au acelaş centru O. Intradevăr se verifică imediat că şi dreapta (7) trece prin O.

5°. In mod analog se demonstrează că locul lui M (α, β, γ) pentru care avem

$$l\overline{BA_1} + m\overline{CB_1} + n\overline{AC_1} = l\overline{CA_1} + m\overline{AB_1} + n\overline{BC_1} + d$$

este dreapta

$$\sum \alpha \left[\frac{l(b^2 - c^2)}{a} - mb + nc + d\right] = 0.$$

Se observă că nu putem avea relaţia

$$a\overline{BA_1} + b\overline{CB_1} + c\overline{AC_1} = a\overline{CA_1} + b\overline{AB_1} + c\overline{BC_1} + d,$$

căci în acest caz punctul M se găseşte pe dreapta dela infinit.

6°. Problema se poate generaliza în felul următor.

Fie P $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ *un punct fix în planul triunghiului* ABC, *iar* M (α, β, γ) *un punct mobil. Paralelele din* M *la* PA, PB, PC *taie respectiv laturile* BC, CA, AB *în* A_1, B_1, C_1.

Se calculează imediat:

$$\overline{BA_1} = a\frac{\alpha\frac{\gamma_0}{\beta_0+\gamma_0} + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \overline{CB_1} = b\frac{\beta\frac{\gamma_0}{\gamma_0+\alpha_0} + \alpha}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \overline{AB_1} = c\frac{\gamma\frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0} + \beta}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Dacă

$$\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{CA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1},$$

punctul M descrie dreapta

$$\sum \alpha \frac{\beta_0(p-b) - \gamma_0(p-c)}{\beta_0 + \gamma_0} = 0. \tag{8}$$

Două puncte ale acestei drepte se văd imediat: complimentul lui P, adică $(\beta_0 + \gamma_0, \gamma_0 + \alpha_0, \alpha_0 + \beta_0)$ şi punctul

$$[\gamma_0(\beta_0 + \gamma_0)(p-a), \beta_0(\gamma_0 + \alpha_0)(p-b), \gamma_0(\alpha_0 + \beta_0)(p-c)].$$

Dacă

$$\overline{CA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1} = \overline{BA_1} + \overline{AB_1} + \overline{BC_1},$$

M descrie dreapta

$$\alpha\frac{\beta_0(p-c) - \gamma_0(p-b)}{\beta_0 + \gamma_0} + \beta\frac{p\alpha_0 + \gamma_0(p-b)}{\gamma_0 + \alpha_0} - \gamma\frac{p\alpha_0 + \beta_0(p-c)}{\alpha_0 + \beta_0} = 0 \tag{9}$$

care trece prin

$$(\beta_0+\gamma_0,\ \gamma_0+\alpha_0,\ \alpha_0+\beta_0) \quad \text{şi}$$

$$[-p\alpha_0(\beta_0+\gamma_0)\ ,\ \beta_0(\gamma_0+\alpha_0)(p-c)\ ,\ \gamma_0(\alpha_0+\beta_0)(p-b)]$$

Când $P \equiv H$ punctului O îi corespunde complimentarul lui P adică punctul $(\beta_0+\gamma_0,\ \gamma_0+\alpha_0,\ \alpha_0+\beta_0)$ care se găseşte la intersecţia dreptelor (8) şi (9). Ne întrebăm, cum este firesc, ce puncte corespund lui I şi I_a. Putem căuta punctul (x, y, z) de pe dreapta (8) astfel încât punctul $(-x, y, z)$ să se găsească pe dreapta (9), însă rezultatele nu sunt simetrice: punctul (x, y, z) nu este acelaşi pentru toate dreptele analoage cu (9).

7°. In fine, locul lui M pentru care

$$l\,\overline{BA_1}+m\,\overline{CB_1}+n\,\overline{AC_1}=l\,\overline{CA_1}+m\,\overline{AB_1}+n\,\overline{BC_1}+d$$

este dreapta

$$\sum\alpha\left[la\,\frac{\beta_0-\gamma_0}{\beta_0+\gamma_0}-mb+nc+d\right]=0.$$

Făcând $l=-l'$ în relaţiile de mai sus obţinem ca locul lui M pentru care

$$l'\overline{CA_1}+m\,\overline{CB_1}+n\,\overline{AC_1}=l'\overline{BA_1}+m\,\overline{AB_1}+n\,\overline{BC_1}+d,$$

este dreapta

$$\alpha\left[-l'a\,\frac{\beta_0-\gamma_0}{\beta_0+\gamma_0}-mb+nc+d\right]+\beta\left[-l'a+mb\,\frac{\gamma_0-\alpha_0}{\gamma_0+\alpha_0}-nc+d\right]$$

$$+\gamma\left[l'a+mb+nc\,\frac{\alpha_0-\beta_0}{\alpha^0+\beta_0}+d\right]=0.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

O PROBLEMĂ DE MECANICĂ

Cu ocazia unui *Symposium*[1] *asupra forţelor de inerţie* ţinut sub auspiciile *Academiei de Ştiinţe* din *Bucureşti*, *d-l Profesor* D. GHERMANI a comunicat rezultatele obţinute din studiul următoarei probleme:

„*Un cursor greu* M, *lunecă fără frecare în lungul unei vergele* OA, *care este rotită într'un plan orizontal în jurul punctului*

1) Conferinţele ţinute în cadrul acestui Symposium au apărut tipărite de Academia Română de Ştiinţe.

fix O *cu viteza unghiulară constantă w. La momentul inițial, cursorul se găsește în poziția* M_0 ($OM_0 = r_0$) *și are o viteză inițială de componente egale* $r_0\omega$ *după direcția* OM_0 *și o perpendiculară pe* OM_0.

Să se studieze mișcarea cursorului (fig. 1).

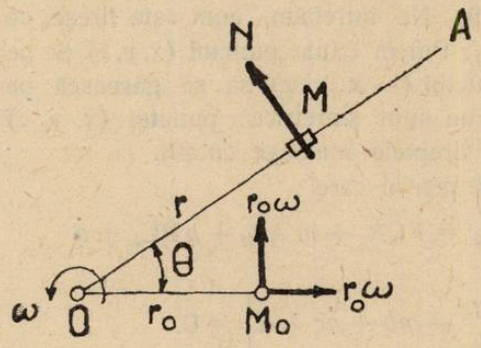


Fig. 1.

Rezultatele obținute de *d-l Profesor* D. GHERMANI sunt:

1. Mișcarea *relativă* a cursorului M în lungul barei OA, este dată de relația $r = r_0 e^{\omega t}$ ($OM = r$).

2. Mișcarea *absolută* a cursorului este dată de ecuațiile:

$$r = r_0 e^{\omega t} \; ; \; \theta = \omega t$$

în care

$$r = OM \; ; \; \theta = \sphericalangle(OM, OM_0).$$

Rezultă că în mișcarea absolută cursorul descrie *spirala logaritmică* $r = r_0 e^{\theta}$.

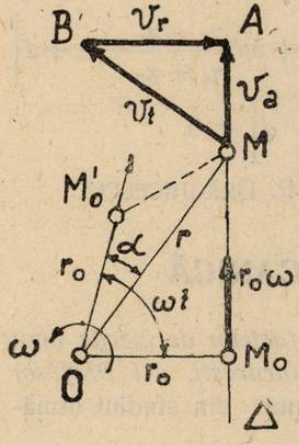


Fig. 2.

3. Mișcarea *relativă* se produce sub acțiunea *forței de inerție centrifuge* $mr\omega^2$ (m = masa cursorului).

In mișcarea *absolută*, această *forță de inerție dispare*, asupra *cursorului neacționând decât reacțiunea* N *a barei asupra cursorului*, reacțiune perpendiculară pe OM și de mărime:

$$N = 2r\omega^2 = 2r_0\omega^2 e^{\omega t}.$$

In cele de mai jos îmi propun a rezolva următoarea problemă asemănătoare:

„Un punct material M, *de masă m este așezat pe o suprafață lucioasă orizontală care se rotește cu viteza unghiulară constantă* ω *în jurul punctului fix* O. *La momentul inițial poziția punctului este în* M_0 ($OM_0 = r_0$) *iar viteza sa inițială este* $v_0 = r_0\omega$ *perpendiculară pe* OM_0) *fig. 2). Să se studieze mișcarea".*

In mişcarea *absolută* a punctului, întrucât asupra lui *nu lucrează nicio forţă orizontală*, el va descrie *o dreaptă* Δ perpendiculară pe OM_0 cu viteza absolută *constantă* $v_a = v_0 = r_0 \omega$ şi cu *acceleraţia absolută* $w_a = 0$.

Mişcarea punctului M pe suprafaţa dată se face deci *independent* de mişcarea suprafeţii ca şi cum această suprafaţă ar fi *fixă*.

Să determinăm acum elementele mişcării relative a punctului M în raport cu suprafaţa mobilă şi anume *viteza relativă* v_r şi *acceleraţia relativă* w_r.

Fie M_0 şi M poziţiile punctului pe dreapta Δ la momentul $t = 0$ şi la momentul oarecare t, avem:

$$OM_0 = r_0 \; ; \; OM = r \; ; \; M_0M = v_a t = r_0 \omega t \; ; \; v_a = MA = r_0 \omega.$$

Viteza de *târâre* v_t a punctului M este:

$$v_t = MB = \omega r$$

şi este perpendiculară pe OM.

Rezultă pentru *viteza relativă* v_r:

$$\vec{v_r} = \vec{BA} = \vec{v_a} - \vec{v_t}$$

Se observă uşor că triunghiurile OM_0M şi MAB sunt asemenea (fig. 2).

Rezultă că v_r este paralel cu OM_0 iar:

$$\frac{v_a}{OM_0} = \frac{v_t}{OM} = \frac{v_r}{M_0M} = \omega \quad ; \quad v_r = \omega . M_0M = r_0 \omega^2 t \qquad (1)$$

Pentru determinarea *acceleraţiei relative* w_r vom aplica formula:

$$\vec{w_a} = \vec{w_r} + \vec{w_t} + \vec{w_c} \qquad (2)$$

în care w_a este *acceleraţia absolută*, w_t *acceleraţia de târâre* şi w_c *acceleraţia lui* CORIOLIS.

Dar:

$$w_a = 0 \quad ; \quad w_t = r\omega^2$$

şi este îndreptat după MO,

$$w_c = 2\omega v_r = 2r_0\,\omega^3 t$$

şi este îndreptat după $M_0 M$. (fig. 3-a).

Din (2) rezultă:

$$\vec{w}_r + \vec{w}_t + \vec{w}_c = 0. \qquad (2')$$

Notând

$$\sphericalangle OMM_0 = \varphi_1 \quad \text{şi} \quad \sphericalangle O'MM_0 = \varphi_2$$

avem:

$$\sin\varphi_1 = \frac{r_0}{r} \;;\quad \cos\varphi_1 = \frac{r_0\,\omega t}{r} \;;\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\omega t}.$$

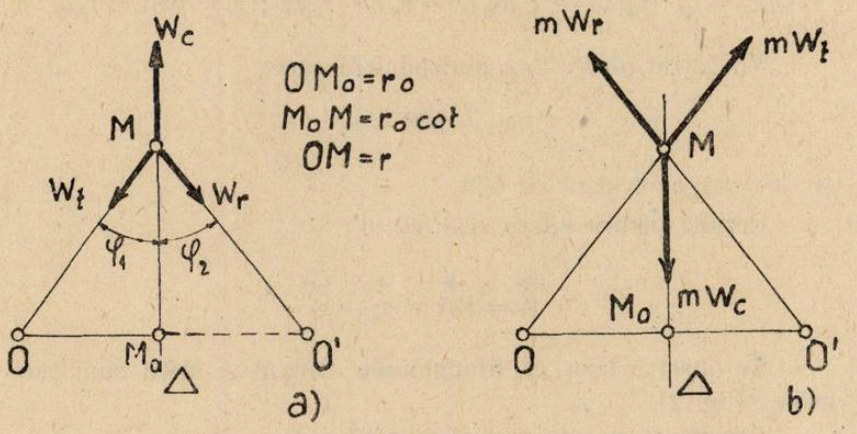


Fig. 3.

Prin proiecţii pe direcţia $M_0 M$ şi pe o perpendiculară pe această direcţie obţinem:

$$w_r \cos\varphi_2 = w_c - w_t \cos\varphi_1 = r_0\,\omega^3 t,$$

$$\omega_r \sin\varphi_2 = \omega_t \sin\varphi_1 = r_0\,\omega^2.$$

Rezultă:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{\omega t} = \operatorname{tg}\varphi_1 \quad \therefore \quad \varphi_2 = \varphi_2 \quad \therefore \quad w_r = r_0\,\omega^2. \qquad (3)$$

Corespunzător acestor trei acceleraţii w_r, w_t şi w_c în mişcarea relativă apar în planul orizontal al suprafeţii date *trei forţe de inerţie* respective care îşi fac echilibru (fig. 3 b); menţionăm că

în mişcarea *absolută* rectilinie uniformă *nu acţionează nicio forţă orizontală.*

Pentru determinarea *traectoriei* în mişcarea relativă să considerăm că la momentul t când punctul se află în M, urma M_0 a poziţiei iniţiale ajunge în M_0'. ($OM_0' = OM_0 = r_0$).

Fie $\alpha = \sphericalangle MOM_0'$; $r = OM$. Din triunghiul OMM_0 (fig. 2) avem:

$$\sphericalangle MOM_0 = \omega t - \alpha \; ; \; \overline{OM}^2 = \overline{OM_0^2} + \overline{M_0M}^2 \; ; \; \operatorname{tg} \sphericalangle (MOM_0) = \frac{MM_0}{OM_0}$$

sau: $$r^2 = r_0^2 + r_0^2 \omega^2 t^2 \; ; \; r = r_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2} \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg} (\omega t - \alpha) = \frac{r_0 \omega t}{r_0} = \omega t \; ; \; \alpha = \omega t - \operatorname{arc\,tg}\, \omega t \qquad (5)$$

Ecuaţia traiectoriei relative în coordonatele polare (α, r) va fi:

$$\alpha = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}\right). \qquad (6)$$

Din relaţiile (4) şi (5) putem obţine imediat *viteza relativă* şi *acceleraţia relativă.*

In adevăr prin derivări în raport cu timpul avem:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r_0 \omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \; ; \; \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{r_0 \omega^2}{(1 + \omega^2 t^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega^3 t^2}{1 + \omega^2 t^2} \; ; \; \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{2\omega^3 t}{(1 + \omega^2 t^2)^2}$$

$$v_r^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = r_0^2 \omega^4 t^2 \; ; \; v_r = r_0 \omega^2 t$$

$$w_r^2 = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]^2 + \left[r\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt}\right]^2 = r^2 w^4$$

$$w_r = r\omega^2.$$

Căpătăm astfel rezultatele (1) şi (3) obţinute direct pe altă cale.

ALEXANDRU STOENESCU.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „G. ȚIȚEICA"

Cercetând conținutul volumului LI al *Gazetei Matematice* am constatat că dintre corespondenții elevi de liceu, la data colaborării, se desprinde în primul rând d-l EM. E. MARINESCU, dela Liceul „Aurel Vlaicu", București, prin activitatea d-sale în domeniul geometriei, care constă în: problema propusă 6191; exercițiul propus 24; soluția problemei 5987, la care este unic rezolvitor; soluțiile problemelor 6535, 5973, 6067, 6015, 6183.

Menționăm de asemenea faptul că d-l E. MARINESCU este trecut pe copertele volumelor L, LI ale *Gazetei Matematice*, ca rezolvitor a numeroase probleme, majoritatea de geometrie, multe din ele dificile, a căror soluție încă nu s'a publicat.

Pentru aceste considerații, propunem ca premiul de geometrie „G. ȚIȚEICA" să se acorde în acest an d-lui EM. E. MARINESCU.

Valoarea premiului din acest an a fost majorată cu suma de 100.000 lei donată de d-l N. GEORGESCU ROEGEN.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „G. ȚIȚEICA"

ȘERBAN GHEORGHIU, N. N. MIHĂILEANU, O. N. ȚINO.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 24 Februarie 1947.

NOTE MATEMATICE

23. *Soluția problemei 2731* [1]. Vom rezolva problema pe o cale diferită de cea dată la pag. 321 din acest volum. Să însemnăm numărul căutat cu $P = 10N + a$, a fiind cifra unităților, iar N un număr întreg pozitiv. Conform enunțului problemei, avem

$$(10N + a)^2 - (N + 10a) = x^2, \qquad (1)$$

x fiind un număr întreg pozitiv.

1) In soluția dată la pag. 321 din acest volum s'a greșit la examinarea cazului $a = 7$ ceea ce a condus la concluzia că problema nu are soluție.

Pentru probleme de asemenea natură a se vedea articolele d-lui O. ȚINO, din *Gazeta Matematică*, Vol. LI, pag. 729 și 762.

Egalitatea (1) poate fi scrisă sub forma

$$10(P-x)(P+x) = P + 99a \qquad (1')$$

sau încă

$$10P^2 - P - (10x^2 + 99a) = 0. \qquad (2)$$

O primă condiție pentru ca P să fie întreg este ca

$$1 + 400x^2 + 40.99.a = y^2, \qquad (3)$$

y fiind un întreg pozitiv.

Observăm din egalitatea (3) că $(y^2 - 1)$ trebue să fie divizibil cu 40, deci produsul $(y-1)(y+1)$ să fie pe deoparte divizibil cu 8 (deci y impar), iar pe de altă parte cu 5; cum însă 5 este număr prim, el trebue să dividă pe unul din factori $(y-1)$ și $(y+1)$.

1. Dacă punem $y = 5v + 1$, atunci avem pentru $P > 0$, valoarea

$$P = \frac{1}{20}(2+5v), \qquad (4)$$

deci $v = 2t$, dar atunci $P = \frac{1}{10}(5t+1)$, care nu poate fi întreg $(5t+1)$ fiind prim cu 5.

2. Dacă punem $y = 5v - 1$ (5) avem $P = \frac{v}{4}$, deci v trebue să fie divizibil cu 4, adică $v = 4u$, pentru care avem $P = u$ (6), iar $y = 20u - 1$ (7), unde $u > 0$ evident. Egalitatea (3) devine în acest caz

$$(20u-1)^2 - 400x^2 = 1 + 40.99.a$$

sau încă

$$10(u^2 - x^2) - (u - a) = 100a, \qquad (8)$$

de unde se vede că, $(u-a)$ este neapărat divizibil cu 10, adică

$$u = 10z + a \quad (9) \quad , \quad z > 0 \text{ căci } u > 0;$$

avem ca urmare următoarea egalitate

$$(10z - x + a)(10z + x + a) = 10a + z; \qquad (10)$$

care conduce la sistemul în numere întregi

$$10z - x + a = \theta_1 \; ; \; 10z + x + a = \theta_2 \; ; \; 10a + z = \theta_1\theta_2 \quad (11)$$

sau încă

$$2x = \theta_2 - \theta \; ; \; 20z + 2a = \theta + \theta_2 \; ; \; z + 10a = \theta_1\theta_2, \quad (11')$$

θ_1, θ_2 fiind numere întregi de aceeaşi paritate, $\theta_2 > \theta_1$ şi care urmează să satisfacă egalităţii de condiţie

$$20(\theta_1\theta_2 - 10a) + 2a = \theta_1 + \theta_2. \qquad (12)$$

Din ultima egalitate a sistemului (11') se deduce $\theta_1\theta_2 > 0$, deoarece $a > 0$ şi $z > 0$ şi cum $\theta_2 > 0$, urmează că $\theta_1 > 0$; deci $x < 10z + a$ (13). Din egalitatea (12) avem

$$\theta_2 = \frac{198a + \theta_1}{20\theta_1 - 1}, \qquad (14)$$

şi scriind acum condiţia $\theta_2 > \theta_1$, găsim pentru θ_1 condiţia

$$\theta_2 < \frac{1 + \sqrt{1 + 40.99.a}}{20} \qquad (15)$$

şi dând lui a valorile posibile, găsim că cea mai mare valoare a lui θ_1 este 9, adică $0 < \theta_1 \leqq 9$.

Pentru $\theta_1 = 1$ avem $\theta_2 = 10a + \frac{8a+1}{19}$, iar $(8a+1)$ este divizibil cu 19 numai pentru $a = 7$, pentru care avem:

$$\theta_2 = 73 \; ; \; z = 3 \; ; \; x = 36 \; ; \; u = 37 \; \therefore \; P = 37.$$

Pentru $\theta_1 = 2$, avem $\theta_2 = \frac{198a+2}{39}$, care nu e întreg, deoarece numărătorul este prim cu 3 divizorul numitorului.

Pentru $\theta_1 = 3$, avem $\theta_2 = 3a + 3.\frac{7a+1}{59}$, dar $57 < 59 < 64$.

Pentru $\theta_1 = 4$, avem $\theta_2 = 2a + 4.\frac{10a+1}{79}$, dar $71 < 79 < 81$.

Pentru $\theta_1 = 5$, avem $\theta_2 = 2a + \frac{5}{99}$.

Pentru $\theta_1 = 6$, avem $\theta_2 = 6.\frac{33a+1}{119}$, dar egalităţile

$$33a + 1 = 119 \quad \text{şi} \quad 33a + 1 = 238$$

n'au nici una soluţie întreagă.

Pentru $\theta_1 = 7$, avem $\theta_2 = a + \frac{59a+7}{139}$, dar egalităţile

$$59a = 132 \; ; \; 59a = 271 \; ; \; 59a = 410$$

n'au nici una soluţie întreagă.

Pentru $\theta_1 = 8$, avem $\theta_2 = \frac{198a+8}{159}$ imposibil întreg, deoarece numărătorul este prim cu 3 divizorul numitorului.

Pentru $\theta_1 = 9$, avem $\theta_2 = 9 . \frac{22a+1}{179}$, dar

$$(22 \times 8) + 1 < 179 < (22 \times 9) + 1).$$

Aşa dar, singura soluţie a problemii este numărul 37, pentru care avem:

$$37^2 - 73 = 36^2 \quad \text{sau} \quad 1369 - 73 = 1296.$$

O. N. Ţ.

24. *Nota asupra unei clase de ecuaţii diferenţiale de ordin superior.* Revin, în cele ce urmează asupra problemei ce formează obiectul articolului cu acelaşi titlu, publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. LII, pag. 207.

Pentru a facilita expunerea consider un caz particular. Se va constata însă cu uşurinţă, că metoda întrebuinţată rămâne aceeaşi şi în cazul general.

Fiind dată ecuaţia diferenţială lineară

$$y''' + f_1(x)\, y'' + f_2(x)\, y' + f_3(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

se cere să se determine coeficienţii f_1, f_2, f_3 *astfel ca să existe o funcţie* $\varphi(x)$ *în aşa fel ca ecuaţia diferenţială ce se obţine din* (1) *prin schimbarea de variabilă* $t = \varphi(x)$ *să aibă coeficienţii constanţi.*

Imi propun să arăt că această problemă poate fi rezolvată *direct*, fără a fi nevoie să se formeze explicit ecuaţia diferenţială ce se obţine din (1) prin schimbarea de variabilă indicată.

Astfel, presupunând că funcţiile f_1, f_2, f_3 satisfac condiţiunilor căutate şi că $t = \varphi(x)$ este transformarea ce rezolvă problema noastră, rezultă că ecuaţia (1) admite următorul sistem de soluţii fundamentale:

$$y_1 = e^{\alpha_1 t} = e^{\alpha_1 \varphi(x)} \quad , \quad y_2 = e^{\alpha_2 \varphi(x)} \quad , \quad y_3 = e^{\alpha_3 \varphi(x)}$$

α_1, α_2, α_3 fiind trei constante *distincte.*

Formând derivatele acestor funcţii obţinem:

$$y_i' = \alpha_i \varphi'(x)\, e^{\alpha_i \varphi(x)} \quad , \quad y_i'' = [\alpha_i^2 \varphi'^2(x) + \alpha_i \varphi''(x)]\, e^{\alpha_i \varphi(x)}$$

$$y_i''' = [\alpha_i^3 \varphi'^3(x) + 3\alpha_i^2 \varphi'(x) \varphi''(x) + \alpha_i \varphi'''(x)]\, e^{\alpha_i \varphi(x)}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Se deduce de aci că ecuaţia diferenţială căreia satisfac funcţiile y_1, y_2, y_3 este:

$$D(y) \equiv \begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ 1 & y_1' & y_1'' & y_1''' \\ 1 & y_2' & y_2'' & y_2''' \\ 1 & y_3' & y_3'' & y_3''' \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Insă coeficienţii lui y, y', y'', y''' din ecuaţia (2) sunt proporţionali cu cei din ecuaţiunea (1). Rezultă

$$[\alpha_i^3 \varphi'^3 + 3\alpha_i^2 \varphi'\varphi'' + \alpha_i \varphi'''] + [\alpha_i^2 \varphi'^2 + \alpha_i \varphi''] f_1 + \alpha_i \varphi' f_2 + f_3 = 0$$

$$\varphi'^3 \alpha_i^3 + [3\varphi'\varphi'' + f_1 \varphi'^2] \alpha_i^2 + [\varphi''' + f_1 \varphi'' + f_2 \varphi'] \alpha_i + f_3 = 0 \qquad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

Cu aceasta, problema propusă devine imediată. Fie

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \qquad (4)$$

ecuaţia ce admite ca rădăcini pe α_1, α_2, α_3. Coeficienţii lui α_i^3, α_i^2, α_i, 1 din sistemul (3) sunt — la rândul lor — proporţionali cu aceia din ecuaţia (4). Rezultă:

$$\frac{\varphi'^3}{1} = \frac{3\varphi'\varphi'' + f_1 \varphi'^2}{a_1} = \frac{\varphi''' + f_1 \varphi'' + f_2 \varphi'}{a_2} = \frac{f_3}{a_3}. \qquad (5)$$

Din aceste egalităţi deducem mai întâi pe $\varphi'(x)$ şi apoi pe f_1 şi f_2 în funcţie de f_3. Regăsim pe această cale egalităţile (3') şi (3_2) din articolul publicat la pag. 207 din acest volum.

Funcţiile f_1 şi f_2 fiind determinate prin relaţiile (5), iar $\varphi(x)$ fiind acum funcţia definită de aceleaşi relaţii, sau

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt[3]{\frac{f_3(t)}{a_3}}\, dt + \varphi(x_0)$$

$\varphi(x_0)$ arbitrar, prin transformarea $t = \varphi(x)$ ecuaţia (1) devine:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0. \qquad (1')$$

Aceasta fiindcă ecuaţia (1) admite soluţiile y_1, y_2, y_3. Şi este evident că pentru orice valori ale coeficienţilor a_1, a_2, a_3 (1) se transformă în (1'). Acest rezultat subsistă deci şi în cazul când ecuaţia caracteristică relativă la (1') are rădăcini multiple. Cu alte cuvinte, deşi mai sus, noi am presupus că α_1, α_2, α_3 sunt distincte, rezultatul obţinut rămâne valabil şi în cazul particular, când două din aceste constante sau chiar toate trei sunt egale.

Ş. G.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI. FACULTATEA DE ARHITECTURĂ

Examenul de admitere Octombrie-Noembrie 1946

Algebra. I. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}=\frac{a^2}{b^2}.$$

II. Se dă progresia aritmetică:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \text{etc.}$$

Se ştie că valoarea lui $a_{p+q}=m$ şi că $a_{p-q}=n$.

Presupunând că cunoaştem numai pe m, n, p şi q, se cere valoarea lui a_p şi a lui a_q.

Să se trateze aceeaşi problemă şi în cazul când progresia dată ar fi geometrică.

Trigonometrie. I. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$3\sin(a+b)\cos(a-b)+6\sin(b+c)\cos(b-c)+7\sin(c+a)\cos(c-a)$$

ştiind că:

$$\sin 2a=\frac{1}{3}\ ;\ \sin 2b=\frac{3}{4}\ ;\ \sin 2c=\frac{4}{5}.$$

II. Să se rezolve ecuaţia:

$$3\,\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}3x+1=0.$$

Geometria plană. Fie pentagonul ABCDE şi F, G, H, I, J respectiv mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE şi EA.

1. Să se arate că paralelele duse din F la IJ, din G la CD şi din H la BC sunt concurente.

2. Să se deducă o metodă de construcţie a pentagonului când se cunosc mijloacele laturilor sale.

Geometria în spaţiu. Se consideră un plan P şi o dreaptă paralelă la acest plan. Fie A un punct pe dreapta D şi a piciorul perpendicularei duse din A pe planul P. Din punctul A se duce o perpendiculară pe o dreaptă D' din planul P, neconcurentă cu D. Fie M piciorul acestei perpendiculare.

1. Să se demonstreze că $aM \perp D'$.

2. Să se găsească locul geometric al punctului a când punctul A descrie dreapta D şi să se calculeze minimul distanţei AM.

3. Fie B un alt punct pe dreapta D, b piciorul perpendicularei duse din B pe planul P şi N piciorul perpendicularei coborîte din b pe dreapta D'. Notăm:

$$AM=d\ ,\ BN=\delta\ ,\ Aa=Bb=h\ ,\ Ma=x\ ,\ Nb=y.$$

Presupunând că avem $x+y=\frac{d+\delta}{2}$, să se calculeze x, y şi h în funcţie de d şi δ.

4. Ce condiţii trebue să îndeplinească d şi δ pentru ca problema să fie posibilă.

Geometria analitică. Fie A şi B, punctele unde un cerc de centru I şi trecând prin origina O a axelor de cordonate rectangulare xOy, taie respectiv pe Ox şi Oy.

1. Să se scrie ecuaţia cercului J cu centrul pe Ox, trecând prin B şi tăind ortogonal cercul I şi ecuaţia cercului K cu centrul pe Oy, trecând prin A şi ortogonal cercului I.

2. Să se determine locul centrului radical al acestor trei cercuri, când dreapta AB se roteşte în jurul punctului B. (Facultativ, când dreapta AB se roteşte în jurul unui punct oarecare).

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXVII. Nr. 4. Iunie 1947. REDACŢIA: Inştiinţare. E. VIŞA: Asupra unei metode pentru rezolvarea ecuaţiilor de gradul al patrulea. Ing. GH. V. NICULESCU: Proprietăţi la patrulater. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

A. GLODEN. Formes linéaires des nombres dont la 8e puissance se termine dans le système décimal par un nombre donné de 1, 2 ou 3 chiffres (2 pagini scrise la maşină).

MAX MORAND. Introduction mathématique aux théories physiques modernes. Paris. Librairie Vuibert 1947.

Teoria relativităţii de AL. I. STOENESCU. Ed. III. Edit. Gorjanu (63 pag.). Cartea are menirea de a iniţia pe începători la punctul de vedere al Mecanicei relativiste, de aceea începe prin a studia pe scurt mişcarea relativă din punct de vedere clasic şi trece apoi prin experienţa lui MICHELSON-MORLEY la legile lui LORENTZ. In capitolul II se studiază postulatele relativităţii restrânse şi formulele de transformare LORENTZ-EINSTEIN. Capitolul III studiind *spaţiul-timp* al lui EINSTEIN, arată Mecanica newtoniană ca un caz limită al Mecanicei relativiste. In celelalte capitole, autorul introduce universul cu 4 dimensiuni precum şi variaţia massei şi identitatea acesteia cu energia. Ultimul capitol dă o expresie sumară a teoriei relativităţii generale.

Cartea, expusă în mod clar şi analizând treptat noţiunile noui introduse de relativitate, este la îndemâna oricui este familiarizat cu rezultatele Mecanicei clasice, şi se recomandă în special elevilor care doresc o complectare a noţiunilor de Mecanică. Cartea se termină cu câteva interesante probleme propuse.

GABRIELA ŢIŢEICA.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 143 (Gazeta Matematică, XXXII, 102). Se întreba: *până când s'a păstrat la noi Anul nou la 1 Septembrie?*

Anul nou se serbează la 1 Septembrie probabil din timpul lui CONSTANTIN CEL MARE cu începere din anul 312 în occident sau poate din timpul fiilor săi CONSTANT şi CONSTANTIE cu începere dela 1 Septembrie 342.

La noi, anul nou la 1 Septembrie s'a păstrat până la începutul secolului XIX, dar numai în biserică. Incolo, tot timpul, anul nou începe la 1 Ianuarie, după zeul IANUS care priveşte cu o faţă spre trecut şi cu una spre viitor.

LT.-COL. E. ST. IACOB.

DIVERSE

a) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

Prescutare de Aritmetica practică îndreptată şi adăugită spre întrebuinţarea şcoalelor începătoare, de G. POPP, Profesor de aritmetică şi geometrie în colegiulŭ Sf. Sava şi şcóla militară de cadeţi. Preţulŭ 36 Parale. Bucuresci. Typographia Naţionalĕ Str. Germană, Nr. 2. 1866.

Donată de d-l I. BĂDILĂ învăţător din Comuna Arsachi, jud. Vlaşca.

b) Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"

In Adunarea generală extraordinară dela 10 Iunie 1947 au fost aleşi ca membri ai Societăţii *Gazeta Matematică* d-nii: Maior ALMĂJANU PETRE, Lt.-Col. BENEŞ ION, Ing. CRISTEA D. EFTIMIE, G-l DIACONESCU V. CONST., Ing. GALL ST. TRAIAN, Dr.-Ing. IONESCU C. ION, Lt.-Col.-Ing. LEOVEANU CONST., Ing. NEDELCU FLOREA, Ing. STRATILESCU GR. ION, Maior-Ing. TEODORU ŞERBAN, Ing. VOINEA RADU şi Ing. VASILIU MIRCEA.

c) Premii pentru Concursul „Gazetei Matematice" din 1947

După ce numărul 9 a fost imprimat s'au mai primit din partea d-lui Ing. AL. STOENESCU şi s'au distribuit ca premiu următoarele cărţi de AL. STOENESCU: *Probleme de calcul vectorial* d-lor C. C. CORDUNEANU şi R. SP. HARET şi *Probleme de dinamică* d-lor P. A. CERNESCU şi I. T. MUNTEANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3677. *Se consideră desvoltarea*

$$(1+ax)(1+a^2x)\dots(1+a^mx)=\sum_{p=1}^{m}x^p\,\Gamma_m^p(a) \qquad (1)$$

Să se stabilească proprietăţile coeficienţilor $\Gamma_m^n(a)$, *analoage proprietăţilor coeficienţilor binominali.*

ROD. NECULAI RACLIŞ.

Soluție. Pentru ușurința scrisului vom înlocui notația $\Gamma_m^p(a)$ prin Γ_m^p. Să stabilim mai întâi formula care dă acești coeficienți. In acest scop, înlocuim în (1) pe x prin ax, și ținând seamă iarăși de (1), avem relația

$$(1+a^{m+1}x)\sum_{p=1}^{m} x^p \Gamma_m^p = (1+ax)\sum_{p=1}^{m} a^p x^p \Gamma_m^p$$

unde egalând coeficienții lui x^p din ambele părți, obținem relația de recurență

$$\Gamma_m^p = a^p \frac{a^{m-p+1}-1}{a^p-1}\Gamma_m^{p-1}.$$

Făcând aci p egal cu $p-1$, $p-2,\ldots,1$, cum se vede direct că $p_m^0 = 1$, prin înmulțirea relațiilor obținute, avem în definitiv

$$\Gamma_m^p = a^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(a^m-1)(a^{m-1}-1)\ldots(a^{m-p+1}-1)}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^p-1)}. \qquad (2)$$

In particular, $\Gamma_m^m = a^{\frac{m(m+1)}{2}}$. Această formulă ne dă posibilitatea să calculăm pe Γ_m^p când $p > m$. Dacă $p > m$ se vede din (1) că $\Gamma_m^p = 0$. Vom da mai jos două relații între acești coeficienți și care sunt analoage relațiilor mai importante ce există între coeficienții binominali.

1. Să demonstrăm relația

$$\Gamma_m^{m-p} = a^{\frac{(m+1)(m-2p)}{2}} \Gamma_m^p. \qquad (3)$$

In acest scop scriem formula (2) sub forma

$$\Gamma_m^p = a^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(a^m-1)(a^{m-1}-1)..(a-1)}{(a-1)(a^2-1)..(a^p-1)(a-1)(a^2-1)..(a^{m-p}-1)}, \qquad (2')$$

care comparată cu

$$\Gamma_m^{m-p} = a^{\frac{(m-p)(m-p+1)}{2}} \frac{(a^m-1)(a^{m-1}-1)..(a-1)}{(a-1)(a^2-1)..(a^{m-p}-1)(a-1)(a^2-1)..(a^p-1)},$$

ne dă tocmai relația (3).

2. Să demonstrăm relația

$$\Gamma_m^p = a^p(\Gamma_{m-1}^p + \Gamma_{m-1}^{p-1}). \qquad (4)$$

Avem succesiv, în baza lui (2),

$$a^p\left(\Gamma_{m-1}^p+\Gamma_{m-1}^{p-1}\right)=a^p\left[a^{\frac{p(p+1)}{2}}\frac{(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-2)\ldots(a^{m-p}-1)}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^p-1)}\right.$$

$$\left.+a^{\frac{p(p-1)}{2}}\right]\frac{(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)\ldots(a^{m-p+1}-1)}{(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{p-1}-1)}$$

$$=a^{\frac{p(p+1)}{2}}\frac{(a^{m-1}-1)(a^{m-2}-1)\ldots(a^{m-p+1}-1)}{(a-1)(a^2-1)\ldots a^{p-1}-1)}\left(\frac{a^m-a^p}{a^p-1}+1\right)=\Gamma_m^p.$$

Observaţii: 1. Pe lângă relaţiile stabilite evident că mai sunt şi altele care însă se demonstrează analog cu formulele cunoscute dela coeficienţii binominali, In felul acesta dau relaţiile

$$\Gamma_m^n=a^{pn-\frac{p(p+1)}{2}}\sum_{i=0}^{p}a^i\Gamma_p^{p-i}\Gamma_{m-p}^{n-i}, \tag{5}$$

$$\Gamma_{n+p}^n=a^n\sum_{i=0}^{p}a^{n(p-i)}\Gamma_{n+i-1}^{n-1}, \tag{6}$$

$$\Gamma_{m+n}^p=\sum_{i=0}^{p}a^{in}\Gamma_m^{p-i}\Gamma_n^i, \tag{7}$$

$$\Gamma_{2n}^n=a^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{i=0}^{n}a^{n-i}\left(\Gamma_n^i\right)^2 \tag{8}$$

(caz particular al lui (7)).

2. Folosind faptul că ecuaţia ce se capătă anulând partea dreaptă din (1) are ca rădăcini pe $-a^{-i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$, cu ajutorul formulelor lui NEWTON care dau suma puterilor asemeni ale rădăcinilor unei ecuaţii, se mai pot stabili şi alte relaţii.

3. D-l M. R. TAMBS LYCHE s'a ocupat incidental cu coeficienţii

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=\frac{(a^n-1)(a^{n-1}-1)\ldots(a^{n-r+1}-1)}{(a-1)(a^2-1\ldots(a^r-1)}$$

într'un articol asupra unei *formule de iterare* în „*Bulletin de la Société Mathémetique de France*", t. 55, 1927, pag. 102. D-sa stabileşte cu acea ocazie formulele

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}a^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\n-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-r\\n-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix}\qquad(r\leqslant n)$$

$$\sum_{i=1}^{p-r-1}(-1)^i a^{-(n-r)+\frac{(i-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\r+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r+i\\r\end{bmatrix}$$

$$=(-1)^{p-r-1}a^{-(p-r-1)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-r-1\\p-r-1\end{bmatrix}\qquad(r<p).$$

4. D-l l. I. STAMATE a stabilit formula (2).

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4245. *Dacă însemnăm cu* A', B', C' *picioarele bisectoarelor unghiurilor unui triunghiu oarecare* ABC, *să se arate relaţia*

$$\frac{\overline{B'C'}^2}{(b+c)^2}+\frac{\overline{C'A'}^2}{(c+a)^2}+\frac{\overline{A'B'}^2}{(a+b)}=\frac{4\,S\,abc\,(2r+11\,R)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de d-nii: V. F. CEAUŞESCU, P. P. DRĂGHICESCU, C. IVĂNESCU, D. D. MAVRODIN, N. N. MIHĂILEANU [1], MIRCEA-LEONTE A. NEGREA, I. C. PAREPEANU, MIRCEA D. POPA, I. N. SAGER şi J. SEGAL.

In *Gazeta Matematică*, Vol. XL, pag. 145 s'a stabilit relaţia

$$\overline{B'C'}^2=\frac{16\,S^2R\,(R+2r_a)}{(c+a)^2\,(a+b)^2}.$$

Folosind relaţia cunoscută $\Sigma r_a = 4R + r$, avem succesiv

$$\sum\frac{\overline{B'C'}^2}{(b+c)^2}=\frac{16\,S^2\,R\,(3R+2\Sigma r_a)}{(a+b)^2\,(b+c)^2\,(c+a)^2}$$

$$=\frac{16\,S^2R\,(11\,R+2r)}{(a+b)^2\,(b+c)^2\,(c+a)^2}$$

care este altă formă al membrului al douilea al egalităţii din enunţ, ţinând seama că $4RS = abc$.

Observaţiuni. 1°. Problema 4245 a fost propusă în vol. XXXVIII, pag. 319, deci este anterioară articolului citat mai sus.

2°. D-l EUG. N. WEGENER ne-a trimes două soluţii în care se dovedeşte că relaţia din enunţ este greşită. Mai mult, verifică acest lucru pe un triunghiu dreptunghiu particular.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5296. *Să se formeze ecuaţiile de gradul al treilea ireductibile, ale căror rădăcini* x_1, x_2, x_3 *să satisfacă relaţiile*

$$x_1 = x_2^2 - 8\ ,\quad x_2 = x_3^2 - 8\ ,\quad x_3 = x_1^2 - 8.$$

Să se verifice că aceste ecuaţii rămân neschimbate prin transformarea $y = x^2 - 8$. *Să se cerceteze realitatea rădăcinilor* x_1, x_2, x_3.

TH. ANGHELUŢĂ.

---

1) In 1933 când era elev la Liceul din Constanţa.

Considerăm transformarea mai generală $y = x^2 + \alpha$ şi ne propunem să găsim ecuaţia de gradul al treilea

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

cu următoarele două condiţii. 1° Ecuaţia să fie ireductibilă în corpul de numere C, din care fac parte coeficienţii ecuaţiei şi α. 2° Două din rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale acestei ecuaţii de exemplu x_1 şi x_2 să verifice relaţia $x_2 = x_1^2 + \alpha$.

Pentru înlesnirea raţionamentului notăm [1]

$$\theta(x) = x^2 + \alpha \ , \ \theta^2(x) = \theta[\theta(x)] \ , \ \theta^3(x) = \theta^2[\theta(x)]$$

x_2 fiind rădăcină a ecuaţiei (1) avem $f[\theta(x_1)] = 0$. Deci ecuaţiile (1) şi $f[\theta(x)] = 0$ au rădăcina comună x_1. Rezultă [2] că x_2 şi x_3 sunt deasemenea rădăcini comune acestor ecuaţii. Prin urmare $\theta(x_2)$ şi $\theta(x_3)$ sunt una x_1 şi cealaltă x_3. Nu poate fi $x_3 = \theta(x_3)$, fiindcă ecuaţiile (1) şi $x = \theta(x)$ ar avea rădăcina comună x_3. Ecuaţia din urmă fiind de gradul al 2-lea, s'ar descompune în ecuaţii de grad mai mic. Insă ecuaţia (1) este ireductibilă. Aşa dar rădăcinile acestei ecuaţii verifică relaţiile

$$x_2 = \theta(x_1) \ , \ x_3 = \theta(x_2) \ , \ x_1 = \theta(x_3). \qquad (2)$$

Eliminând din aceste relaţii rădăcinile x_2 şi x_3, găsim că x_1 este rădăcină a ecuaţiei $\theta^3(x) - x = 0$, adică

$$x^8 + 4\alpha x^6 + 2\alpha(3\alpha+1)x^4 + 4\alpha^2(\alpha+1)x^2 - x + \alpha(\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \qquad (3)$$

La fel se arată pentru x_2 şi x_3.

Observăm că această ecuaţie este verificată şi de rădăcinile ecuaţiei $\theta(\theta) - x = 0$. In adevăr, γ fiind o rădăcină a acestei ecuaţii, avem

$$\theta^3(\gamma) = \theta^2[\theta(\gamma)] = \theta^2(\gamma) = \theta(\gamma) = \gamma.$$

Impărţind primul membru al ecuaţiei (3) cu $x^2 - x + \alpha$, obţinem ecuaţia

$$P_1(x) \equiv x^6 + x^5 + (3\alpha+1)x^4 + (3\alpha^2+3\alpha+1)x^3 + (3\alpha^2+3\alpha+1)x^2 + (\alpha+1)^2 x + \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0. \qquad (4)$$

---

1) TH. ANGHELUŢĂ, *Curs de Algebră Superioară* vol. II p. 258.
2) Idem p. 229, 2°.

Această ecuație este satisfăcută de rădăcinile ecuației (1). Suma acestor rădăcini

$$m = x_1 + \theta(x_1) + \theta^2(x_1)$$

aparține corpului de numere C. De aici, deducem că ecuația

$$P_1(x) \equiv \theta^2(x) + \theta(x) + x - m = x^4 + (2\alpha + 1)x^2 + x + \alpha^2 + 2\alpha - m = 0$$

este verificată de rădăcinile ecuației (1). Așa dar polinoamele $P(x)$ și $P_1(x)$ au *c. m. m. d. c* pe $f(x)$. Impărțind $P(x)$ cu $P_1(x)$ găsim restul

$$-R(x) = x^3 - mx^2 + (\alpha - 1 - m)x - \alpha - \alpha m - 1.$$

Apoi avem

$$P_1(x) + xR(x) = mx^3 + (\alpha + 2 + m)x^2 + (\alpha + \alpha m + 2)x + \alpha^2 + 2\alpha - m.$$

Scriind că ultimele două polinoame au aceleași zerori, găsim ecuația

$$m^2 + m + \alpha + 2 = 0 \quad , \quad m = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4\alpha - 7})$$

Inlocuind pe m cu rădăcinile m_1 și m_2, ale acestei ecuații în $R(x)$ avem ecuațiile de gradul al 3-lea, care rezolvă problema

$$x^3 - m_1 x^2 + (\alpha - 1 - m_1)x - \alpha - \alpha m_1 - 1 = 0$$

$$x^3 - m_2 x^2 + (\alpha - 1 - m_2)x - \alpha - \alpha m_2 - 1 = 0.$$

Aceste ecuații rămân neschimbate prin transformarea dată. Căci dacă x_1 este rădăcină, de ex., a primei ecuații, atunci și $\theta(x)$ verifică această ecuație.

Dacă α și m_1 sunt numere reale prima ecuație are rădăcinile reale. In adevăr această ecuație are o rădăcină, fie x_1. Celelalte două rădăcini fiind $\theta(x_1)$ și $\theta^2(x_1)$ sunt deasemenea reale.

Pentru $\alpha = -8$, avem $m_1 = 2$, $m_2 = -3$ și ecuațiile cerute de problemă

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 23 = 0 \quad , \quad x^3 + 3x^2 - 6x - 17 = 0.$$

Problema pentru relația, mai generală de cât aceea din 2°,

$$x_2 = \alpha x_1^2 + bx_1 + c$$

se reduce la cazul studiat. In adevăr, prin transformarea $u = x + \frac{b}{2a}$, relația devine

$$u_2 = au_1^2 + \frac{4ac - b^2 + 2b}{4a}$$

Punând apoi $v = au$, ajungem la relaţia

$$v_2 = v_1^2 + \alpha \quad , \quad \alpha = \frac{4ac - b^2 + 2b}{4}.$$

Corpului de numere C aparţine acuma, pe lângă coeficienţii ecuaţiei de format, *a, b, c.*

Au dat soluţii bune d-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar Iaşi); C. D. EFTIMIE (student inginer Bucureşti) şi D. RIPIANU (Cluj).

PROBLEMA 5450. *O bară de secţiune constantă e alcătuită în lungimea ei din trei porţiuni făcute din metale diferite. Bara este nichelată (greutatea stratului de nichel neglijabilă). Cunoscând ordinea în care sunt dispuse metalele, să se determine secţiunile de separaţie între ele, fără a înlătura stratul de nichel, printr'un procedeu de fizică şi printr'un procedeu de mecanică.*

GH. D. SIMIONESCU.

Fie $\overline{BA} = l$ lungimea barei, redusă la un segment de dreaptă, apoi M şi N punctele de separaţie între barele compunătoare (dela A către B). Notăm:

$$\overline{AM} = x \quad ; \quad \overline{MN} = y \quad ; \quad \overline{NB} = z.$$

Fie apoi s secţiunea constantă a barei şi a, b, c greutăţile specifice ale metalelor din porţiunile AM, MN, NB. Notând cu G greutatea barei, obţinută prin cântărire precisă, putem scrie imediat următoarele relaţii:

$$x + y + z = l \quad ; \quad s(ax + by + cz) = G.$$

Să punem $\frac{G}{s} = m$. Avem deci două ecuaţii:

$$x + y + z = l \quad ; \quad ax + by + cz = m. \qquad (1)$$

Problema va fi rezolvată dacă mai găsim o ecuaţie. Vom recurge la următoarele procedee:

I. *Procedeu fizic.* Încălzim uniform bara dela temperatura t_1 la t_2 (t_1 este temperatura la care lungimea barei este l) şi însemnăm cu $\Delta t = t_2 - t_1$ diferenţa de temperatură. Măsurăm

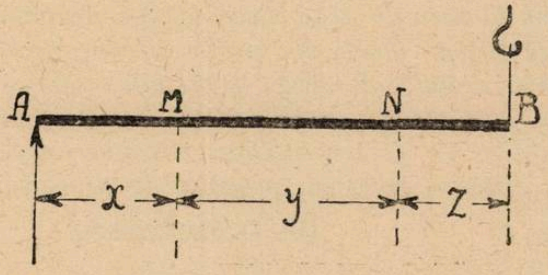
alungirea barei $\Delta l = l' - l$ datorită încălzirii. Dacă α, β, γ sunt coeficienții de dilatare corespunzători celor trei metale, avem:

$$\Delta t\,(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \Delta l \quad \text{sau punând} \quad \frac{\Delta l}{\Delta t} = k:$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = k. \qquad (2)$$

Relațiile (1) și (2) formează un sistem de *trei* ecuații lineare cu *trei* necunoscute, compatibil prin însăși natura problemei, deci se poate calcula x, y, z și problema e rezolvată.

II. *Procedeu mecanic.* Sprijinim capătul A, cu ajutorul unei crestături foarte fine, pe un cuțit. La capătul B legăm un fir pe care îl prindem la un dinamometru și ne arajăm așa ca firul să fie vertical (direcția firului cu plumb), iar bara AB orizontală.



Luând momentele în raport cu A avem:

$$G_1 \frac{x}{2} + G_2\left(x + \frac{y}{2}\right) + G_3\left(x + y + \frac{z}{2}\right) = R \cdot l$$

G_1, G_2, G_3 fiind greutățile barelor AM, MN, NB.

Aceasta însă se mai poate scrie

$$s\left[\frac{x^2}{2} + by\left(x + \frac{y}{2}\right) + cz\left(x + y + \frac{z}{2}\right)\right] = Rl.$$

Dacă împărțim cu s și punem $\frac{Rl}{s} = n$, căpătăm a treia ecuație de care avem nevoie, în afară de (1).

Sistemul devine:

$$\left.\begin{aligned} &x + y + z = l \\ &ax + by + cz = m \\ &ax^2 + by^2 + cz^2 + 2bxy + 2cz\,(x + y) = n \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Inmulțim prima ecuație cu by, pe a doua cu x și le scădem din ultima, în care înlocuim $x + y = l - z$. Avem:

$$2clz - cz^2 - byz - cxz = n - mx - bly.$$

O grupare convenabilă de termeni ne dă

$$clz - cxz + mx + l(by + cz) - z(by + cz) = n.$$

Insă $by + cz = m - ax$, deci

$$x[(a - c)z + m - al] + z(cl - m) + lm - n = 0. \quad (5)$$

Eliminând pe y între primele două ecuaţii din (4) căpătăm o ecuaţie în x şi z din care deducem

$$x = \frac{m - bl - (c - b)z}{a - b}. \quad (5')$$

Această valoare dusă în (5) ne dă ecuaţia:

$$\begin{aligned}(a - c)(b - c)z^2 + 2(b - c)(m - al)z \\ + (a - b)(lm - n) + (m - al)(m - bl) = 0\end{aligned} \quad (6)$$

din care scoatem pe z. Acesta dus în (5') ne dă pe x, şi apoi din (4), prima ecuaţie scoatem pe y.

Se observă că (6) este o ecuaţie de gradul II, deci are două rădăcini, dintre care desigur că o rădăcină trebue să convină, căci forţa R indicată de dinamometru corespunde unei situaţii reale. Intrebarea este dacă uneori nu convine şi a două rădăcină, adică nu există două serii de valori x, y, z care să satifacă problema. La această întrebare nu se poate da un răspuns sigur din cauză că intervin mulţi parametri. Notând cu $f(z)$ membrul I al ecuaţiei (6), condiţiile ce trebuesc satisfăcute sunt:

1. $f(o) = (m - bl)^2 - (a - b)(n - bl^2)$ şi

$$f(l) = (m - cl)^2 - (a - b)(n - cl^2)$$

să fie de semne contrare dacă ecuaţia are o singură rădăcină între o şi l, şi de aceleaşi semne dacă ambele rădăcini sunt valabile;

2. Expresiile

$$x = \frac{m - bl + (b - c)z}{a - b} \quad \text{şi} \quad y = \frac{-(m - al) + (c - a)z}{a - b}$$

să fie *pozitive* când înlocuim pe z cu z_1 şi z_2.

S'a primit o soluţie prin ambele procedee dela d-l EMIL S. MODÂLCĂ (student-inginer). D-sa nu încearcă să vadă până unde se poate împinge rezolvarea sistemului (4), adică nu ajunge la ecuaţia (6).

D-l C. D. EFTIMIE a trimes o soluţie numai printr'un procedeu mecanic, asemănător celui din soluţie. Nici d-sa nu ajunge la ecuaţia (6), adică nu arată că problema e rezolvabilă practic.

PROBLEMA 6070. *Să se rezolve un patrulater sferic* ABCD, *când se cunosc laturile* AB=a, BC=b, CD=c *şi unghiurile* A *şi* D. *Discuţie.*

M. GHERMĂNESCU

Fie B_1, C_1 picioarele perpendicularelor duse din B şi C pe latura AD. Vom deosebi trei cazuri principale, după cum unghiurile A şi D sunt ambele ascuţite, ambele obtuze, unul ascuţit şi altul obtuz, având ca subcazuri când unul sau ambele sunt drepte.

I. A şi D *ascuţite.* In acest caz, B_1 şi C_1 se află între A şi D. Dacă notăm $B_1 = \sphericalangle ABB_1$, $C_1 = \sphericalangle DCC_1$, aplicând în triunghiurile sferice dreptunghice AB_1B, DC_1C formulele cunoscute [1], avem

$$\begin{aligned} \sin BB_1 &= \sin a \sin A \quad , \quad \operatorname{tg} AB_1 = \operatorname{tg} a \cos A, \\ \sin CC_1 &= \sin c \sin D \quad , \quad \operatorname{tg} DC_1 = \operatorname{tg} c \cos D, \\ \cot B_1 &= \cos a \operatorname{tg} A \quad , \quad \cot C_1 = \cos c \operatorname{tg} D, \end{aligned} \tag{1}$$

care dau pe BB_1, CC_1, AB_1, DC_1, B_1, C_1 în funcţie de elementele cunoscute a, b, c, A, D.

Dacă $$\sin a \sin A > \sin c \sin D, \tag{2}$$

atunci $BB_1 > CC_1$. Fie atunci CE perpendiculara dusă din C pe BB_1, iar $B_2 = \sphericalangle CBE$, $C_2 = \sphericalangle BCE$. In triunghiul sferic dreptunghic BEC, cunoaştem $BE = BB_1 - CC_1$ căci $EB_1 = CC_1$, apoi $BC = b$, deci

$$\cos CE = \frac{\cos b}{\cos BE} \quad , \quad \sin C_2 = \frac{\sin BE}{\sin b} \quad , \quad \cos B_2 = \operatorname{tg} BE \cot b, \tag{3}$$

care dau pe CE, B_2, C_2 *în funcţie de elemente cunoscute.*

Deducem astfel

$$B = B_1 + B_2 \ , \ C = 90^0 + C_1 + C_2 \ , \ AD = AB_1 + CE + C_1D \tag{4}$$

şi patrulaterul este astfel rezolvat.

In cazul când unul din unghiurile A sau D este drept, B_1 coincide cu A în primul caz, iar C_1 coincide cu D în al doilea, $AB_1 = 0$, $BB_1 = a_1$ în primul caz, $C_1D = 0$, $CC_1 = c$ în al doilea, iar formulele (1) — (4), care nu se reduc la identităţi dau elementele necunoscute ale patrulaterului sferic ABCD.

Dacă inegalitatea contrară lui (2) are loc atunci $BB_1 < CC_1$ şi dăcă ducem perpendiculara BF pe CC_1, notând cu $B_2' = \sphericalangle CBF$

1) M. GHERMĂNESCU, *Trigonometria plană şi sferică*, p. 281—289.

$C_2' = \sphericalangle BCF$, iar triunghiul sferic dreptunghic BFC ne dă $CF = CC_1 - BB_1$, apoi

$$\cos BF = \frac{\cos b}{\cos CF} \quad , \quad \sin B_2' = \frac{\sin CF}{\sin b} \quad , \quad \cos C_2' = \operatorname{tg} CF \cot b \quad (5)$$

şi, finalmente,

$$B = 90^0 + B_1 + B_2' \quad , \quad C = C_1 + C_2' \quad , \quad AD = AB_1 + BF + C_1 D, \quad (6)$$

cu particularizările corespunzătoare cazurilor când unul din unghiurile A sau D sunt drepte.

Dacă inegalitatea (2) se reduce la o egalitate, atunci $BB_1 = CC_1$, patrulaterul ABCD este un trapez sferic, iar formulele de rezolvare devin în acest caz

$$B = 90^0 + B_1 \quad , \quad C = 90^0 + C_1 \quad , \quad AC = AB_1 + b + C_1 D. \quad (7)$$

II. A şi D *obtuze.* In acest caz, B_1 şi C_1 cad pe prelungirile laturii AD. Păstrând aceleaşi notaţii, formulele (1) se înlocuesc prin

$$\begin{aligned} \sin BB_1 &= \sin a \sin A \quad , \quad \operatorname{tg} AB_1 = \operatorname{tg} a \cos(\pi - A), \\ \sin CC_1 &= \sin c \sin D \quad , \quad \operatorname{tg} DC_1 = \operatorname{tg} c \cos(\pi - D), \\ \cot B_1 &= \cos a \operatorname{tg}(\pi - A) \quad , \quad \cot C_1 = \cos c \operatorname{tg}(\pi - D), \end{aligned} \quad (8)$$

inegalitatea (2) şi celelalte trebuesc şi aci luate în consideraţie şi obţinem formulele de rezolvare

$$B = B_2 - B_1 \quad , \quad C = 90^0 + C_2 \quad , \quad AD = CE - B_1 A - DC_1, \quad (9)$$

în cazul neegalităţii (2), apoi

$$B = 90^0 + B_2' \quad , \quad C = C_2' - C_1 \quad , \quad AD = BF - B_1 A - DC_1, \quad (10)$$

în cazul inegalităţii contrarii lui (2) şi în fine

$$B = 90^0 - B_1 \quad , \quad C = 90^0 - C_1 \quad , \quad AD = b - B_1 A - DC_1, \quad (11)$$

în cazul când (2) se transformă în egalitate, patrulaterul devenind trapez sferic.

Dacă unul din unghiurile A sau D este drept, rezultatele se reduc ca în primul caz.

III. A *ascuţit şi* D *obtuz.* In acest caz B_1 vine între A şi D sau dincolo de D, iar C_1 dincolo de D. Formulele (1) devin aci

$$\begin{aligned} \sin BB_1 &= \sin a \sin A \quad , \quad \operatorname{tg} AB_1 = \operatorname{tg} a \cos A, \\ \sin CC_1 &= \sin c \sin D \quad , \quad \operatorname{tg} DC_1 = \operatorname{tg} c \cos(\pi - D), \\ \cot B_1 &= \cos a \operatorname{tg} A \quad , \quad \cot C_1 = c \operatorname{tg}(\pi - D). \end{aligned} \quad (12)$$

In cazul inegalității (2), formulele (3) rămân valabile însă, dacă $CE > DC_1$, B_1 vine între A și D, dacă $CE < DC_1$, B_1 vine dincolo de D, iar dacă $BE = DC_1$, B_1 vine în D. Exprimarea acestor condiții se face cu prima relație (3) și a cincea relație (12), obținând relații de condiție între datele problemei.

Dacă $CE \gtrless DC_1$, avem

$$B = B_1 + B_2 \quad , \quad C = 90^0 - C + C_2' \quad , \quad AD = AB_1 + CE - DC_1 ,$$

dacă $CE = DC_1$, avem

$$B = B_1 + B_2 \quad , \quad C = 90^0 - C_1 + C_2' \quad , \quad AD = AB_1$$

La fel se tratează cazul inegalității inversă lui (2) sau al egalității. De asemeni cazul A obtuz și D ascuțit.

IV. $A = D = 90^0$. In acest caz, patrulaterul este un trapez sferic. Dacă $a > c$, rezolvăm triunghiul sferic dreptunghic BEC, în care $CE = AD$, $BE = a - c$, astfel că avem (3) sub forma

$$\cos d = \frac{\cos b}{\cos (a - c)} \quad , \quad \sin C_2 = \frac{\sin (a - c)}{\sin b} \quad , \quad \cos B_2 = \operatorname{tg}(a - c) \cot b ,$$

apoi $$B = 90^0 + B_2 \quad , \quad C = C_2 .$$

La fel celelalte cazuri.

NOTĂ. 1°. La această problemă, s'a primit o singură soluție bună, dela D-l. C. BERDAN, care examinează numai cazurile I și II, fără însă o discuție completă.

2°. Problema figurează și la pag. 313 a *Tratatului meu de Trigonometrie*, pag. 313, unde am dat schița unei alte soluții.

M. G.

PROBLEMA 6139. *Să se găsească forma generală a numerelor întregi, care nu se divid nici prin 3 nici prin 5.*

G-L GH. BUICLIU.

Numărul căutat, fiind prim cu 3 și cu 5, prime între ele, este prim și cu produsul 3×5. Deci dacă $a < 15$ atunci forma generală a numărului căutat este $15m \pm a$, în care a este prim cu 3 și cu 5, așa în cât numerele cerute au următoarele 4 forme generale

$$15m \pm 1 \ , \ 15m \pm 2 \ , \ 15m \pm 4 \quad \text{și} \quad 15m \pm 8.$$

Au rezolvat foarte bine problema d-nii: G. G. VRĂNCEANU (Predeal), MIRCEA V. MIŞICU (Student, Politehnica Bucureşti), M V. SOARE (Bacalaureat), V. GH. DIACONU, I. T. MUNTEANU, C. CORDUNEANU (Colegiul Naţional „N. Filipescu"), V. D. PĂLĂCEANU (Şcoala Ofiţeri de Geniu), A. E. DONEAUD, D. I. CRĂCEA, VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Liceul „R. Greceanu").

D-nii CEZAR BOERESCU (Student Politehnica, Bucureşti), P. P. TEODORESCU (Liceul „Matei Basarab", Bucureşti), au rezolvat foarte bine problema dând soluţia generală sub forma

$$15m \pm 2^i \quad \text{cu} \quad i = 0,\ 1,\ 2 \text{ sau } 3.$$

Soluţie puţin riguroasă a dat d-ra SANDA M. HANGAN (Liceul „I. H. Rădulescu", Bucureşti).

EXERCIŢII

34. *Dacă* $a < b < c < d$ *sunt numere întregi pozitive, iar* p *este un număr prim absolut şi prim cu* a, b, c, d, *atunci*

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a^{p-1} & a^{2(p-1)} & a^{3(p-1)} \\ 1 & b^{p-1} & b^{2(p-1)} & b^{3(p-1)} \\ 1 & c^{p-1} & c^{2(p-1)} & c^{3(p-1)} \\ 1 & d^{p-1} & d^{2(p-1)} & d^{3(p-1)} \end{vmatrix} = \mathrm{M}_{p^6}$$

generalizare.

M. R. CONSTANTINESCU.

R. Avem imediat

$$\Delta_4 = (b^{p-1} - a^{p-1})\,(c^{p-1} - a^{p-1})\,(c^{p-1} - b^{p-1})\,(d^{p-1} - a^{p-1})$$
$$(d^{p-1} - b^{p-1})\,(d^{p-1} - c^{p-1}),$$

iar în virtutea teoremei lui FERMAT:

$$b^{p-1} - a^{p-1} = (b^{p-1} - 1) - (a^{p-1} - 1) = \mathrm{M}_p$$

de unde rezultă proprietatea din enunţ.

La fel se găseşte pentru cazul general

$$\Delta_n = \mathrm{M} \cdot p^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

PROBLEME PROPUSE

6371. Să se rezolve ecuațiile

$$u_x = x^2 \quad \text{și} \quad u_x = \sqrt{x}$$

știind că u_x este unul din termenii

$$u_0 = 0\ ,\ u_1 = 0\ ,\ u_2 = 1\ ,\ u_3 = 2\ ,\ u_4 = 3, \ldots$$

ai șirului lui FIBONACCI.

G-L GH. BUICLIU.

6372. Fiind date trei cercuri în același plan, să se găsească locul geometric al centrului lor radical când razele cercurilor variază proporțional cu lungimile lor.

D. V. STOICA.

6373. Dacă $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt două triunghiuri omologice și asemenea, intersecțiile laturilor omoloage fiind α, β, γ, să se arate că:

1°. Cercurile de forma $A_1A_2\beta\gamma$ concură într'un punct M;

2°. Centrele lor A_3, B_3, C_3 formează un triunghiu asemenea celor date și sunt situate pe același cerc cu M;

3°. Înălțimile omoloage ale triunghiurilor date concură pe cercurile (A_3), (B_3), (C_3);

4°. Paralelele din M la laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ taie laturile lui $A_2B_2C_2$ în trei puncte coliniare și viceversa;

5°. Cercurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ trec prin centrul de omologie.

CEZAR N. I. BOERESCU.

6374. Să numim *sferă adjunctă* a unui tetraedru, sfera ce trece printr'un vârf și e tangentă planului feței opuse într'unul din vârfurile tetraedrului.

Să se demonstreze că, dacă perpendicularele comune perechilor de muchii opuse ale unui tetraedru sunt egale, atunci cele douăsprezece sfere adjuncte au un punct comun.

EMIL E. MARINESCU.

6375. Se dă sistemul

$$(O) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = a_j \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

compatibil şi determinat, având rădăcini diferite de zero.

Se consideră cele n sisteme (k) de forma

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_{ij} x_i + a_j x_k + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} x_i = a_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots n).$$

1°. Să se exprime rădăcinile sistemelor (k) în funcţie de rădăcinile sistemului (O).

2°. Câte relaţii distincte există între rădăcinile sistemelor (k)? Să se stabilească aceste relaţii.

3°. Să se calculeze în funcţie de rădăcinile sistemului (O) determinantul

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

unde x_{ik} $(i = 1, 2, \ldots n)$ sunt rădăcinile sistemului (k).

C. IONESCU-BUJOR.

6376. Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & -\frac{1}{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & -\frac{2}{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \ldots & \frac{1}{2!} & -\frac{n-2}{2} \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \ldots & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = \frac{1}{n}.$$

VASILE VASU.

6377. Să se găsească ecuaţiile de forma

$$x^5 + px^3 + qx + r = 0,$$

în care atât coeficienţii cât şi rădăcinile sunt întregi.

Să se cerceteze aceeaşi problemă pentru ecuaţii de forma

$$x^7 + px^5 + qx^3 + rx + s = 0.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6378. Notaţiile fiind cele obişnuite, să se arate că în orice triunghiu există relaţia

$$\cos(B - C)(a - b\cos C) = h_a \sin(C - B) + c\cos C.$$

STELIAN C. PANTAZOPOL.

6379. La două conice omofocale se duc două tangente paralele. Dreapta care uneşte punctele lor de contact întâlneşte perpendiculara pe direcţia lor, dusă din centrul O al conicelor, în punctul M.

1°. Să se arate că OM este egală cu suma sau cu diferenţa depărtărilor tangentelor de centrul O.

2°. Să se afle locul geometric al punctului M, când direcţia tangentelor variază.

3°. Dreapta care uneşte punctele de contact ale tangentelor este normală la acest loc.

RĂDUCANU GEORGESCU.

6380. O persoană traversează o stradă. In lungul străzii trece o maşină. La ce distanţă trebue să se afle maşina de persoană, ca:

1°. Persoana să treacă strada perpendicular.

2°. Distanţa între maşină şi persoană să nu fie mai mică decât o distanţă dată m.

Se presupune strada dreaptă, iar viteza maşinii şi a persoanei constantă.

LT.-C-DOR C. V. COSTĂCHESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii:

Athanasiu C. Luciliu (6312); *Coces Gh.* (6354); *Cornea Damian* (6331); *Diaconescu Ion* (6354); *Dumitrescu D. N.* (6215); *Enescu G.* (6043); *Florescu B. I.* (3134, C, N, P); *Gherasim P. I.* (6330); *Herscovici D. Dan* (6343, 54); *Kinsky I.* (6323, 24); *Olteanu N. Gh.* (6343, 46); *Opriş G. David* (6343, 54); *Popa D. M.* (4791, 997, 6268, 78, 86, 98, 324, 66, 69, P); *Ristea Gh. Gh.* (6354); *Soare V. M.* (P); *Ştefănescu I. Sofronie* (5129, 6242, 330, 31, E); *Ţârlie Ioachim* (6354); *Teodorescu P. P.* (6315); *Tudor C. Emil* (6346); *Vasiliu E. Dan* (5988, 6288, E, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 500 (cinci sute) lei.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 500.000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40.000 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 100.000

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei 400.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei 100.000

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei 150.000

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 400.000

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . Lei 300.000

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei 100.000

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei 1.200.000

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 100.000

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 150.000

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 120.000

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 50.000

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 150.000

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LII, N-rele 1—8 inclusiv fiind epuizate, abonamentul pentru ultimile patru numere este de 84.000 lei.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV se va anunţa în Nr. 1 dela 15 Septembrie.

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimet pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 42.063

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. R.7.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL LII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1947

LICEUL „GHEORGHE LAZĂR" * SIBIU * BIBLIOTECA PROFESORILOR

SUMARUL

1. Relaţiuni între câteva funcţiuni simetrice . . *Mircea Adam.*
2. Raport asupra decernării premiului de mecanică „Spiru Haret" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
3. Note matematice: 25—26.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 343.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 1823, 2056, 2822, 3659, 6109, 6155, 6203.
8. Exerciţii: 35—41.
9. Probleme propuse: 6381—6390.
10. Tabla de materii.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1947

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, (Casa *„Gazeta Matematică"*, Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie compusă în prezent din d-nii: **Ion S. Antoniu**, Inginer; **N. Georgescu-Roegen**, Licenţiat în Matematici; **Al. D. Bunescu**, Inginer (Casier) şi Ing. **D. Stan** (Locţiitor de casier).

Următoarele şedinţe ale Soc. *„Gazeta Matematică"*:

Marţi 26 August ora 17: A doua Adunare generală şi adunarea materiei pentru Nr. 1, Vol. LIII.

Marţi 9 Septembrie ora 18: Facerea copertei pentru Nr. 1, Vol. LIII.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, clasa şi Şcoala din care face parte.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1946 sunt indicate în tabla de materii a volumului LI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **62**71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **3**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban-Vodă, 133 (telefon 3-8010).

La *« Gazeta Matematică »* se găsesc:

— *Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii Gazeta Matematică* Lei —

— *Lecţiuni de calcul diferenţial* de A. ANGELESCU . „ —

— **Medalia comemorativă**, bătută cu ocazia împlinirii a 50 ani de apariţie a *« Gazetei Matematice »* . . . . . „ —

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. R.7.

RELAȚIUNI INTRE CÂTEVA FUNCȚIUNI SIMETRICE

I. Dintre funcțiile simetrice a n cantități oarecare $x_1, x_2, \ldots x_n$, trei sunt cele cari se întâlnesc curent și anume:

Funcțiile simetrice fundamentale, pe care le notăm cu p_i și cari exprimă că $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt rădăcinile ecuației:

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} \ldots + (-1)^n p_n = 0$$

cu convenția $p_0 = 1$ și $p_i = 0$ pentru $0 > i > n$.

2. Suma combinațiilor cu repetiție luate câte i, pe care o notăm cu P_i, cu convenția $P_0 = 1$ și $P_i = 0$ pentru $i < 0$.

3. Suma puterilor asemenea a acelorași cantități:

$$s_i = x_1^i + x_2^i \ldots + x_n^i.$$

Aceste trei funcțiuni simetrice sunt legate între ele, atât două câte două, cât și toate trei, prin relațiuni interesante, a căror simetrie se evidențiază mai ales când sunt puse sub formă de determinanți.

I. Relațiunea dintre funcțiile simetrice p și P este cunoscută și se poate obține făcând produsul egalităților următoare și identificând coeficienții acelorași puteri ale lui x:

$$\frac{f(x)}{x^n} = 1 - \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} - \ldots + \frac{(-1)^k pk}{x^k} + \ldots \qquad (1)$$

$$\frac{x^n}{f(x)} = 1 + \frac{P_1}{x^2} + \frac{P_2}{x^2} + \ldots + \frac{P_k}{x^k} + \ldots \qquad (2)$$

de unde rezultă [1]

$$P_k - p_1 P_{k-1} + p_2 P_{k-2} - \ldots + (-1)^k p_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

care pusă sub formă de determinant ne conduce la:

$$p_k = \begin{vmatrix} P_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ P_2 & P_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_k & P_{k-1} & P_{k-2} & \ldots & P_1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

și

$$P_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & & p_1 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

1) TH. ANGHELUȚĂ. *Algebră superioară.* Vol. I. pag. 95.

Amândouă aceste egalităţi sunt cazuri particulare, pentru respectiv $i = 1$ şi $k = 1$, ale relaţiei generale:

$$\begin{vmatrix} p_k & p_{k-1} & \dots p_{k-i+1} \\ p_{k+1} & p_k & \dots p_{k-i+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{k+i-1} & p_{k+i-2} & \dots p_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_i & P_{i-1} & \dots P_{i-k+1} \\ P_{i+1} & P_i & \dots P_{i-k+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{i+k-1} & P_{i+k-2} & \dots P_i \end{vmatrix} \quad (6)$$

care se poate stabili fără greutate folosind relaţiunea (3) şi ţinând seamă de convenţiunile stabilite la început.

Relaţia (3) poate fi considerată la rândul ei ca un caz particular al relaţiilor:

$$\begin{aligned} P_k - p_1' P_{k-1} + p_2' P_{k-2} - \dots + (-1)^k p_k' &= P_k'' \\ p_k - P_1' p_{k-1} + P_2' p_{k-2} - \dots + (-1)^k P_1' &= p_k'' \end{aligned} \quad (7)$$

în care p_i', P_i' şi p_i'', P_i'' se referă respectiv la cantităţile $x_1, x_2, \dots x_m$ şi $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$, a căror demonstrare se poate face pe aceiaşi cale ca pentru relaţia (3).

II. Legătura dintre funcţiile simetrice p şi s este reprezentată prin formula lui NEWTON, care se stabileşte pe aceiaşi cale ca relaţia (3), folosind egalitatea (1) şi

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x_2} + \dots + \frac{s_k}{x^k} + \dots \quad (8)$$

De altfel la formula lui NEWTON putem uşor ajunge şi pe altă cale. Fie $p_k^{x_i}$ suma combinaţiilor simple a cantităţilor $x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$ luate câte k, rezultă:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^{x_i} + x_i \\ p_2 &= p_2^{x_i} + x_i p_1^{x_i} \\ &\dots\dots\dots \\ p_k &= p_k^{x_i} + x_i p_{k-1}^{x_i}, \end{aligned}$$

din care se deduce imediat:

$$p_k^{x_i} = p_k - x_i p_{k-1} + x_i^2 p_{k-2} - \dots + (-1)^k x_i^k, \quad (9)$$

care nu este altceva decât cazul $m = 1$ al relaţiei a doua din (7).

In relaţiunea (9) făcând $i = 1, 2, \dots n$ şi adunând membru cu membru relaţiile rezultate, dacă ţinem seama că:

$$\sum_{i=1}^{n} p_k^{x_i} = \frac{n C_{n-1}^k}{C_n^k} p_k = (n-k) p_k \qquad \text{rezultă}$$

$$s_k - p_1 s_{k-1} + p_2 s_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} p_{k-1} s_1 + (-1)^k k p_k = 0. \quad (10)$$

Din formula lui NEWTON deducem:

$$\begin{aligned} s_1 - p_1 &= 0 \\ s_2 - p_1 s_1 + 2p_2 &= 0 \\ s_3 - p_1 s_2 + p_2 s_1 - 3p_3 &= 0 \qquad (11) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ s_k - p_1 s_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} p_{k-1} s_1 + (-1)^k k p_k &= 0 \end{aligned}$$

care poate fi privit ca un sistem de k ecuații în raport cu necunoscutele s_i $(i = 1, 2, \dots k)$, compatibil căci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ -p_1 & 1 & \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ (-1)^{k-1} p_{k-1} & (-1)^{k-2} p_{k-2} \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Rezolvând sistemul de ecuații (11), găsim [1]:

$$s_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \dots 0 \\ 2p_2 & p_1 & 1 \dots 0 \\ 3p_3 & p_2 & p_1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & 0 \\ kp_k & p_{k-1} & p_{k-2} \dots p_1 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Ca și în cazul relației (6), se verifică ușor că egalitatea precedentă este un caz particular al relației:

$$\begin{vmatrix} s_k & P_{k-1} & \dots & P_{k-i+1} \\ s_{k+1} & P_k & \dots & P_{k-i+2} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ s_{k+i-1} & P_{k+i-2} & \dots & P_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ip_i & p_{i-1} & \dots p_{i-k+1} \\ (i+1)p_{i+1} & p_i & \dots p_{i-k+2} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ (i+k-1)p_{i+k-1} & p_{i+k-2} & \dots p_i \end{vmatrix} \qquad (13)$$

și anume cazul $i = 1$. Alt caz interesant se obține pentru $k = 1$.

Sistemul (11) de ecuații poate fi privit și în raport cu necunoscutele p_i $(i = 1, 2, \dots k)$ tot ca un sistem compatibil, care rezolvat conduce la egalitatea:

$$k!\, p_k = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & & & & \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

1) TH. ANGHELUȚĂ. *Algebră superioară.* Vol. II.

III. Legătura dintre funcţiile simetrice s şi P se poate obţine făcând produsul relaţiilor (2) şi (8):

$$x^{n+1}\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k + s_{k-1}P_1 + \ldots + s_0 P_k}{x^k},$$

iar din relaţia (2), scoţând valoarea funcţiei $\frac{1}{f(x)}$ şi derivând obţinem:

$$x^{n+1}\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)\,P_k}{x^k},$$

egalităţi cari, comparate între ele, conduc la relaţia:

$$s_k + P_1 s_{k-1} + P_2 s_{k-2} + \ldots + P_{k-1} s_1 - k P_k = 0, \qquad (15)$$

analoagă formulei lui NEWTON.

Din relaţia (15), ca şi în cazul precedent, putem deduce un sistem de k ecuaţii în raport cu necunoscutele s_i sau $P_i\,(i=1,2,\ldots k)$, sistem care rezolvat prin determinanţi, ne conduce la relaţia:

$$(-1)^{k-1}s_k = \begin{vmatrix} P_1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 2P_2 & P_1 & 1 & \ldots 0 \\ 3P_3 & P_2 & P_1 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ kP_k & P_{k-1} & P_{k-2} & \ldots P_1 \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

şi

$$k!\,P_k = \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ldots & 1-k \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

De asemeni se poate arăta că egalitatea (16) este un caz particular al unei relaţiuni analoage cu (6) şi (13).

IV. Determinantul (12) dezvoltat după prima coloană, ne conduce la o relaţiune în care intră toate cele trei funcţiuni simetrice:

$$s_k = p_1 P_{k-1} - 2p_2 P_{k-2} + 3p_3 P_{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} k p_k, \qquad (18)$$

iar din egalitatea (16) în acelaşi mod deducem:

$$(-1)^{k-1}s_k = P_1 p_{k-1} - 2P_2 p_{k-2} + 3P_3 p_{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} k P_k. \qquad (19)$$

Această ultimă relaţie poate fi privită ca o relaţie complimentară a relaţiei (18), de oarece înmulţită cu $(-1)^k$ şi adunată cu relaţia (18), ne conduce la relaţia (3).

Relaţiile (19) şi (20) se pot deduce şi din egalităţile (1), (2) şi (8).

V. Relaţiile (12) şi (14) corespund relaţiilor lui WARING, care exprimă direct pe s_k în funcţie de p_i ($i = 1, 2, \ldots k$) şi pe p_k în funcţie de s_i ($i = 1, 2, \ldots k$).

Conform acestor formule putem scrie [1]:

$$s_k = \Sigma (-1)^{\mu+k} A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_i^{\lambda_i} \tag{20}$$

şi

$$p_k = \Sigma (-1)^{\mu+k} B_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \ldots s_i^{\lambda_i} \tag{21}$$

în care $$\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i$$

iar sumele sunt extinse la toate valorile întregi pozitive sau nule ale exponenţilor λ_1, $\lambda_2 + \ldots + \lambda_i$ cari satisfac condiţia.

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = k$$

adică la toţi termenii de aceiaşi greutate k.

Coeficienţii A şi B sunt daţi de expresiile

$$A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} = \frac{k(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_i!},$$

$$B_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} = \frac{1}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \ldots i^{\lambda_i} \cdot \lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_i!}. \tag{22}$$

Folosind asemănarea dintre determinantul (12) cu (16) şi (14) cu (17) putem imediat exprima funcţiile s_k în funcţie de P_i ($i = 1, 2, \ldots k$) şi P_k în funcţie de s_i ($i = 1, 2, \ldots k$), prin relaţiuni analoage cu relaţiile WARING:

$$s_k = \Sigma (-1)^{\mu-1} A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_i^{\lambda_i}, \tag{23}$$

$$P_k = \Sigma B_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \ldots s_i^{\lambda_i}, \tag{24}$$

coeficienţii A şi B fiind aceiaşi definiţi prin relaţiile (22).

Relaţiuni analoage celor ale lui WARING se pot stabili şi pentru funcţiile p_k şi P_k şi anume:

$$P_k = \Sigma (-1)^{\mu+k} C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_i^{\lambda_i}, \tag{25}$$

$$p_k = \Sigma (-1)^{\mu+k} C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots k_i} P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_i^{\lambda_i}, \tag{26}$$

μ şi λ_i având aceiaşi semnificaţie ca mai sus, iar:

$$C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_i!}. \tag{27}$$

---

1) SEVRET. *Algèbre Supérieure*. Vol. I, pag. 449 şi 460.

Pentru cazurile $k = 1, 2, 3$ relaţiunea (25) se verifică imediat prin dezvoltarea determinantului (5), iar cazul general se poate demonstra uşor prin inducţie, admiţând că relaţia este adevărată pentru $P_1, P_2, \ldots P_{k-1}$.

In adevăr, dacă ţinem seama de relaţia (3), valoarea coeficientului $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i}$ în cazul P_k va fi:

$$(-1)^{\mu+k} C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i} = \sum_{m=1}^{i} (-1)^{m-1} (-1)^{\mu-1+k-m} C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots (\lambda_m - 1)\, \lambda_{m+1} \ldots \lambda_i}$$

însă conform relaţiei (27)

$$C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots (\lambda_m - 1)\, \lambda_{m+1} \ldots \lambda_i} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i-1)!}{\lambda_1! \ldots (\lambda_m-1)!\, \lambda_{m+1}! \ldots \lambda_i!} = \frac{\lambda_m\, C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i}}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}$$

Relaţia (26) se deduce imediat prin simetrie din relaţia (3).

Relaţiile (25) şi (18) ne permit să ajungem mult mai uşor la prima relaţie WARING, decât folosind formula lui LAGRANGE [1].

VI. Parte din determinanţii găsiţi au un aspect comun, explicabil prin faptul că aceşti determinanţi fac parte din o aceiaşi clasă, a determinanţilor ce se obţin punând câtul a două polinoame sub formă de determinant.

Să considerăm două polinoame oarecare ordonate după puterile crescătoare ale lui x:

$$F_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

$$F_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m,$$

şi notăm cu

$$Q_k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k, \qquad (28)$$

câtul ce se obţine împărţind pe F_1 la F_2, adică câtul definit de relaţia:

$$F_1 = Q_k \cdot F_2 + x^{k+1} R_k$$

şi în mod analog

$$Q'_k = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_k x^k$$

câtul lui F_2 prin F_1, definit prin relaţia:

$$F_2 = Q'_k \cdot F_1 + x^{k+1} R'_k.$$

---

1) SEVRET. *Algèbre Superieure.* Vol. I, pag. 445.

Pentru a pune sub formă de determinanți câturile Q_k și Q_k, vom folosi rezultatele obținute de d-l Profesor TH. ANGHELUȚĂ [1]. Putem scrie

$$Q_k = \frac{(-1)^k}{b_0^{k+1}} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_k & b_k & b_{k-1} & \ldots & b_0 \\ 0 & 1 & x & \ldots & x^k \end{vmatrix},$$

din care prin dezvoltarea determinantului după ultima linie și compararea rezultatului cu egalitatea (28) obținem

$$(-1)^k b_0^{k+1} c_k = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & b_{k-1} & b_{k-2} & \ldots & b_0 \\ a_k & b_k & b_{k-1} & \ldots & b_1 \end{vmatrix}, \qquad (29)$$

și în mod analog

$$(-1)^k c_0^{k+1} b_k = \begin{vmatrix} a_0 & c_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & c_1 & c & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & c_{k-1} & c_{k-2} & \ldots & c_0 \\ a_k & c_k & c_{k-1} & \ldots & c_1 \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Astfel dacă luăm:

$$F_1 = 1 \quad , \quad F_2 = 1 - \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x} - \ldots + (-1)^n \frac{p_n}{x^n},$$

conform relației (2) avem

$$Q_k = 1 + \frac{P_1}{x} + \frac{P_2}{x^2} + \ldots + \frac{P_k}{x^k}$$

din care prin aplicarea formulelor (29) și (30) ajungem imediat la egalitățile (5) și (4).

De asemeni pornind dela polinoamele

$$F_1 = \frac{f'(x)}{x^{n-1}} \quad \text{și} \quad F_2 = \frac{f(x)}{x^n}$$

din relația (8) prin aplicarea formulei (29) deducem egalitatea (12), iar prin aplicarea formulei (30) găsim un alt determinant interesant. In mod analog se poate ajunge la egalitatea (16).

---

1) TH. ANGHELUȚĂ. G. M., Vol. XXVIII, pag. 201.

Folosind relaţiunile dintre coeficenţii polinoamelor F_1, F_2, Q_k şi Q'_k, adică

$$b_0 c_k + b_1 c_{k-1} + \ldots + b_k c_0 = a_k$$

$$a_0 d_k + a_1 d_{k-1} + \ldots + a_k d_0 = b_k$$

$$c_0 d_k + c_1 d_{k-1} + \ldots + c_k d_0 = 0 \qquad (k > 1)$$

se poate arăta că avem şi o relaţie generală, corespunzătoare relaţiilor (6) şi (13) şi anume:

$$\frac{1}{a_0^m c_0^i} \begin{vmatrix} a_{r_1-i-m+1} \ldots a_{r_m-i-m+1} & c_k & \ldots & c_{k-i+1} \\ a_{r_1-i-m+2} \ldots a_{r_m-i-m+2} & c_{k+1} & \ldots & c_{k-i+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r_1} \ldots a_{r_m} & c_{k+i+m-1} & \ldots & c_{k+m} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(-1)^{ki+m(k+i)}}{b_0^m d_0^k} \begin{vmatrix} b_{r_1-k-m+1} \ldots b_{r_m-k-m+1} & d_i & \ldots & d_{i-k+1} \\ b_{r_1-k-m+2} \ldots b_{r_m-k-m+2} & d_{i+1} & \ldots & d_{i-k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r_1} \ldots b_{r_m} & d_{i+k+m-1} & \ldots & d_{i+m} \end{vmatrix} \qquad (31)$$

cu condiţiunea $r_m < r_{m-1} < \ldots r_1 \leqslant m + k + i - 1$.

In cazul $m = 0$ obţinem o relaţiune numai între coeficienţii polinoamelor Q şi Q', identică cu relaţiunea (61).

Pornind dela polinoamele

$$F_1 = \frac{f'(x)}{x^{n-1}} \quad , \quad F_2 = \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

când avem

$$Q = \frac{f(x)}{x^n} \quad \text{şi} \quad Q' = \frac{x^n}{f(x)}$$

prin aplicarea relaţiei (31) ajungem la egalitatea (13).

Ca încheiere putem trage concluzia că în afară de funcţiile p_k (k=1, 2, ... n) şi s_k (k= 1, 2, 3, ...), sumele combinaţiilor cu repetiţie a rădăcinilor unei ecuaţii P_k (k = 1, 2, 3, ...) formează de asemeni *un sistem fundamental de funcţiuni simetrice.*

MIRCEA ADAM.

RAPORT ASUPRA DECERNĂRII PREMIULUI DE MECANICĂ „SPIRU HARET"

Subsemnaţii membri în comisiunea premiului de Mecanică „Spiru Haret" cercetând ultimul volum apărut al *Gazetei Matematice* şi anume dela 15 Septembrie 1945 la 15 Septembrie 1946, în urma examinării activităţii în domeniul Mecanicei a corespondenţilor *Gazetei Matematice,* am constatat deosebita activitate a d-lui EUGEN V. CARAMANLĂU (Politehnica Bucureşti).

D-sa se prezintă cu o frumoasă rezolvare a problemei 6049 precum şi rezolvarea interesantelor probleme 5919, 6019 şi 6137.

In activitatea sa, d-l EUGEN V. CARAMANLĂU arată un spirit pătrunzător şi o clară înţelegere a fenomenelor mecanice.

Pentru aceasta propunem a i se acorda premiul de Mecanică „Spiru Haret" în valoare de 25.000 lei pe anul 1946—1947, la care se adaugă suma de 100.000 lei donată de d-l Ing. VAL. MANAFU.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU HARET"

ING. AL. BUNESCU, ING. ALEX. STOENESCU şi ING. GABRIELA ŢIŢEICA.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală de la 17 Februarie 1947.

NOTE MATEMATICE

24. *In loc de erată.* In exerciţiul 2, pag. 92, Vol. XLVIII, G. M. se înlocueşte

$a^2+b^2+c^2=p^2+r^2+4Rr$ prin $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$

$ab+bc+ca=2(p^2-r^2-4Rr)$ prin $ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$

iar membrul al doilea din enunţ prin

$$\frac{p^2-r^2-4Rr}{p^2+r^2+4Rr}.$$

M. D. POPA.

25. *O chestie de prioritate în legătură cu problema 5926.* Această problemă propusă de d-l N. N. MIHĂILEANU, a fost rezolvată în G. M., Vol. LI, pag. 215. In comentariile cari însoţesc rezolvarea problemei, se vorbeşte de o notă a mea apărută în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XXV, p. 55. Această notă apărută abia în 1944 fusese trimisă de mine cu mult înainte; ea este rezultatul unor cercetări în legătură cu studiul eliminanţilor. De altfel în „*Gazeta Matematică*", Vol. XLII, p. 280 am propus problema 4769, care s'a rezolvat în acelaşi volum la p. 553; determinantul de ordinul 6 care face obiectul acestei probleme, este asemănător cu determinantul dat ca exemplu de d-l N. N. MIHĂILEANU la p. 218, Vol. LI.

Problema 4769 ca şi problema apărută sub formă de notă în R. M. T. anul XXV, îşi au origina în rezultatele pe care le-am obţinut pe atunci în urma unor studii asupra eliminanţilor.

Voiu avea ocazia să revin şi asupra altor rezultate demne de luat în seamă, obţinute prin cercetările indicate mai sus.

VIRGIL CLAUDIAN.

26. *Asupra problemei 5857.* Prima cerinţă a acestei probleme, rezolvată în G. M., LI, 681, este determinarea funcţiunilor $f(x)$ şi $\varphi(x)$ astfel ca ecuaţiile algebrice în y

$$E_1(y) = y^2 + f'y + \varphi' = 0 \quad \text{şi} \quad E_2(y) = y^2 + f''y + \varphi'' = 0$$

în cari accentele indică ordinul de derivare în raport cu variabila x, să se bucure de proprietatea că rădăcinile uneia din ecuaţii să fie inversele celeilalte ecuaţii.

Observând că această condiţie revine la aceea ca ecuaţia

$$E_1(y)\, E_2(y) = 0$$

să fie o ecuaţie reciprocă, obţinem relaţiunile

$$f' + f'' = \varphi' f'' + f' \varphi'' \quad ; \quad \varphi' \varphi'' = 1$$

din care deducem în ordine

$$\varphi(x) = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} (x+a)^{3/2} + b$$

şi

$$f(x) = \pm \alpha \left[\sqrt{2}\sqrt{x+a} \mp 1\right] e^{\pm \sqrt{2}\sqrt{x+a}} + \beta$$

unde a, b, α, β sunt constante arbitrare introduse prin operaţia integrării.

Rezultă de aci, că soluția generală diferă de aceea obținută la locul citat, unde s'au particularizat constantele de integrare astfel ca să existe relația care formează punctul 2 al problemei, obținută din relația generală

$$f(x) - \beta = \alpha\left[\sqrt[3]{3\,[\varphi(x) - b]} - 1\right] e^{\sqrt[3]{3\,[\varphi(x)-b]}}$$

în care s'a făcut

$$\alpha = 1 \quad \text{și} \quad b = \beta = 0$$

In fine, pentru a termina, vom observa că răspunsul la ultima cerință a problemei, poate fi prezentat sub formă concisă, căci integrala generală a ecuației

$$\varphi^{(n)}(x)\,\varphi^{(n+1)}(x) = 1$$

adică a ecuației

$$\frac{d^n \varphi}{dx^n} = \pm \sqrt{2}\sqrt{x+a}$$

este $$\varphi(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-s)^{n-1}\sqrt{s+a}\,ds$$

în timp ce aceea a ecuației

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \alpha e^{\pm\sqrt{2}\sqrt{x+a}}$$

este $$f(x) = \frac{\alpha}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-s)^{n-1} e^{\pm\sqrt{2}\sqrt{s+a}}\,ds.$$

G. G. CONSTANTINESCU.

BIBLIOGRAFIE

Analele Româno-Sovietice. Nr. 5. Mai-Iunie 1947.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques. Tome 3. Fascicule 10, Avril 1947.

Idem. Fascicule 11, Juillet 1947.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXVII. Nr. 5, Iulie 1947. E. VIȘA : Cubice iperbolice unicursale. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate și propuse.

Ing. GEORGE S. GEORGESCU. *Călăuza Atelierului Mecanic,* Vol. I (408 pagini, 162 tablouri, 176 figuri). Progresul din ce în ce mai mare al industriei româneşti pe de o parte şi lipsa tot mai accentuată a cărţilor străine pe de alta, au arătat de mult necesitatea tipăririi în limba română a diferite manuale tehnice de specialitate.

In acest cadru, lucrarea d-lui ING. GEORGE S. GEORGESCU este de sigur de mult aşteptată şi bine venită.

Intocmită în genul cunoscutului *aide memoire* HÜTTE, lucrarea se adresează tuturor tehnicienilor, în special al celor ce activează în domeniul *Atelierelor Mecanice.*

Primul volum tipărit al lucrării cuprinde următoarele capitole mari: *Matematici, Măsuri şi unităţi de măsură, Rezistenţa Materialelor, Ajustări de precizie, toleranţe, calibre şi Filetul.*

Ca în orice lucrare mare, care apare în prima ediţie, s'au strecurat şi aici inevitabile mici scăpări de tipar, uşor observabile, ce trebuesc avute în vedere la tipărirea ediţiei a II-a (menţionez astfel: patratul numărului 107 pag. 5, relaţiile 6 şi 7 rădăcinii pag. 46, relaţia 5 exponenţi negativi şi fracţionari pag, 47, logaritmul numărului 508 pag. 48, formula integrală 15 pag. 57, ecuaţia de dimensii a lucrului mecanic pag. 88, relaţia dintre momentele de inerţie în raport cu două axe paralele pag. 133).

Sugerăm, tot pentru ediţia II, unele uşoare completări pentru câteva definiţii precum pentru unitatea de forţă, moment încovoetor, moment de răsucire.

Astfel în cazul forţii, la pag. 84, în definiţie: „*Unitatea de forţă se numeşte dină şi se defineşte prin forţa care acţionând asupra unui gram massă, îi imprimă în unitatea de timp o unitate de viteză*" propunem în locul ultimii părţi din frază: „*îi imprimă în unitatea de timp o creştere de viteză egală cu unitatea*" sau „îi imprimă o *unitate de acceleraţie*".

De asemenea, credem că întrebuinţarea aceleiaşi litere σ atât pentru rezistenţe *normale* (tensiune, compresiune, moment încovoetor) cât şi pentru rezistenţe *tangenţiale* (forfecare, torsiune) pag, 139 şi următoarele, nu este fericită, aceste rezistenţe cerând — din punct de vedere pedagogic — notaţii diferite spre a se arăta că sunt de natură diferită.
De altfel chiar autorul întrebuinţează câteodată litera τ pentru rezistenţele tangenţiale, pag. 137 D şi E.

Considerată în general, lucrarea d-lui ING. GEORGE S. GEORGESCU reprezintă pentru tehnica românească un important pas înainte şi o recomandăm cu toată căldura tuturor tehnicienilor din Atelierele Mecanice începând dela inginer şi până la elevii Şcolilor Industriale.

Rămânem în aşteptarea volumului II anunţat de autor, cuprinzând capitolele: *Elemente de maşini, Transmisiuni, Maşini unelte şi Scule.*

ALEXANDRU STOENESCU.

CERERI

343. Se cunosc multiple analogii între ecuaţiile algebrice şi cele diferenţiale.

1°. Se pot îngloba ecuaţiile diferenţiale în cele algebrice, ca fiind cazuri limită a sistemelor generale de ecuaţii algebrice cu mai multe necunoscute, deci cazuri particulare ale acestora?

2°. Aceasta este adevărat în mod general, parţial sau de loc?

3°. Dacă e adevărat măcar în parte se pot da câte-va exemple?

T. DĂNILĂ.

DIVERSE

Comemorarea lui Ion Ionescu

Miercuri 17 Septembrie 1947 la orele $11^1/_2$ dimineata se va comemora împlinirea unui an de la moartea profesorului inginer şi membru fondator al *Gazetei Matematice*, ION IONESCU.

Se va face o slujbă religioasă, se vor ţine vorbiri ocazionale şi se va inaugura „*Casa de citire* ION IONESCU" din str. Răsuri Nr. 25 care a fost lăsată moştenire *Gazetei Matematice* de regretatul dispărut.

Invităm pe această cale, pe d-nii membri ai Soc. „*Gazeta Matematică*", pe corespondenţii *Gazetei Matematice* şi pe toţi acei care doresc să ia parte la pioasa comemorare de Miercuri 17 Septembrie 1947, orele $11^1/_2$ în str. Răsuri Nr. 25, Bucureşti.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1823. *Se dau două cercuri concentrice* K *şi* K' *şi un arc* AB *pe* K *corespunzător unghiului la centru* α. — *Să considerăm un arc mobil* CD *situat pe* K' *şi al cărui unghiu la centru este tot* α *şi fie* I *punctul de întâlnire al dreptelor* AC *şi* BD. — *Se cere să se studieze variaţia ariilor triunghiurilor* ABI *şi* CDI *şi a perimetrelor lor.*

E. N. BARISIEN.

Soluţie dată de d-l M. R. CONSTANTINESCU (Lic. „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti).

Fie $R > r$ razele respective ale celor două cercuri. Prin construcție

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \alpha \quad \therefore \quad \sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$$

și cum $AO = BO = R$ și $CO = DO = r$

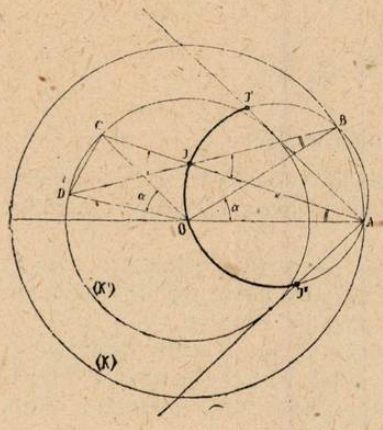
triunghiurile AOC și BOD sunt egale, deci

$$\sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO = \omega_1 \text{ și } \sphericalangle ACO = \sphericalangle BDO = \omega_2 \qquad (1)$$

Prima relație din (1) arată că patrulaterul AOIB este inscriptibil, deci

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AIB = \alpha \qquad (1)$$

Punctul I se mișcă pe cercul AOB și anume pe cercul I′OI″ cuprins între laturile unghiului format de tangentele AI′ și AI″ la cercul K′.



Fie S, S′ și p, p' suprafețele și perimetrele triunghiurilor AIB și CID.

Ținând seamă de (1) avem

$$S = AI \cdot BI \frac{\sin\alpha}{2};$$

$$S' = CI \cdot DI \cdot \frac{\sin\alpha}{2} \qquad (2)$$

și deoarece

$$AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2} \text{ și } CD = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

vom avea și

$$p = AI + BI + 2R\sin\frac{\alpha}{2} \; ; \; p' = CI + DI + 2r\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

Din triunghiurile AIB și CID se scoate

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{AI}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \omega_1\right)} = \frac{BI}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \omega_1\right)} \qquad (4)$$

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{CI}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \omega_2\right)} = \frac{BI}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \omega_2\right)} \qquad (5)$$

Din (5) și (6) se scoate

$$AI = R\left(\cos\omega_1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\omega_1\right) \; ; \; BI = R\left(\cos\omega_1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\omega_1\right)$$

$$CI = r\left(\cos\omega_2 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\omega_2\right) \; ; \; DI = r\left(\cos\omega_2 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\omega_2\right)$$

Ducând aceste valori în (2) și (3) găsim

$$S = \frac{R\sin\alpha}{2}\left[1 - \frac{\sin^2\omega_1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right] \; ; \; p = 2R\left[\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\omega_1\right]$$

$$S' = \frac{r^2\sin\alpha}{2}\left[1 - \frac{\sin^2\omega_2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right] \; ; \; p' = 2r\left[\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\omega_2\right]$$

Ținând seama de relațiunea $\sin\omega_2 = \frac{R}{r}\sin\omega_1$

scoasă din unul din triunghiurile AOC sau BOD, se vede că variația celor 2 suprafețe și perimetre depinde de variația lui $\sin\omega_1$ și $\cos\omega_1$.

Minimul lui ω_1 este O iar maximul lui este dat de

$$\sin\omega_1 = \frac{r}{R}$$

când AI devine tangenta AI'.

Cu aceste elemente se stabilește imediat următorul tabel de variație ale lui S, p, S' și p'.

ω_1	O		arc $\sin\frac{r}{R}$		π
S	$\frac{R^2\sin\alpha}{2}$	↘	$\frac{R^2\sin\alpha}{2} - r^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$	↗	$\frac{R^2\sin\alpha}{2}$
p	$2R\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$	↘	$2R\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{R^2 - r^2}$	↗	$2R\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$
S'	$\frac{r^2\sin\alpha}{2}$	↘	$-\frac{r^2\sin\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2}$	↗	$\frac{r^2\sin\alpha}{2}$
p'	$2r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$	↘	$2r\sin\frac{\alpha}{2}$	↗	$2r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Notă. Problema aceasta a fost propusă în Iunie 1912 în Vol. XVII şi nu a primit nici o soluţie până acum. Publicăm soluţia elementară a d-lui M. R. CONSTANTINESCU, aproape aşa cum a trimis-o, deşi problema ar cere şi examinarea cazului când se notează cu I intersecţia lui AD cu BC şi pentru un studiu şi mai complet, examinarea cazului când I *este una din intersecţiile diagonalelor patrupunctului* ABCD. Acest examen nu se poate face pe cale elementară. El cere calcule multe şi anevoioase care iau din frumuseţea problemei aşa cum a fost rezolvată de d-l M. R. CONSTANTINESCU şi cum a fost pusă de decedatul E. N. BARISIEN.

Dacă totuşi cineva ar întreprinde calculele greoaie pe care le cer celelalte cazuri de figură, îi vom publica rezultatele ca notă sau articol.

GH. B.

PROBLEMA 2056. *Coordonatele ecuatoriale ale stelei „α Aurigae" (Capela) erau la 1 Ianuarie 1851*

$$\alpha_0 = 5^h\,05^m\,42^s = 76^0\,25'\,30''$$

$$\delta_0 = 45^0\,50'\,22''.$$

Se cere să se calculeze pentru 1 Ianuarie 1915 coordonatele ecliptice L *şi l.*

CESAR D. ORĂŞANU.

Diviziunea problemei. Din enunţ se vede că problema are două părţi distincte.

1°. Calculul coordonatelor ecuatoriale: ascensiunea dreapta „α" şi declinaţiunea „δ" care s'au modificat în decursul timpului dela 1851, 0 la 1915, 0 ale stelei α Aurigae (Capela) datorit fenomenului precesiei şi nutaţiei, şi apoi

2°. Transformarea coordonatelor ecuatoriale „α" şi „δ" obţinute pentru anul 1915, 0 ale stelei α Aurigae în coordonate ecliptice „L" şi „*l*" pentru acelaşi an.

1°. *Consideraţiuni teoretice.* Aplicând la triunghiul de poziţie: pol ecliptică, pol ecuator şi astru, formulele trigonometriei sferice, obţinem formulele fundamentale cunoscute:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin l\,.\,\cos\omega + \cos l\,.\,\sin\omega\,.\,\sin L \\ \cos\delta\,.\,\sin\alpha &= -\sin l\,.\,\sin\omega + \cos l\,\cos\omega\,\sin L \qquad (1) \\ \cos\delta\,.\,\cos\alpha &= \cos l\,.\,\cos L. \end{aligned}$$

Deplasările planurilor fundamentale, ecuatorul şi ecliptica, la care sunt raportate coordonatele astrelor fiind infinitezimal de mici faţă de timpul în care ele se produc, vom putea, în rezolvarea problemei propuse, să utilizăm calculul infinitezimal.

Inainte de a trece la calcul avem de observat, că planul ecuatorului are deplasări mult mai importante decât cele ale eclipticei, şi deci în derivarea ecuaţiunilor (1) pentru un prim calcul aproximativ, putem să considerăm pe „l“ şi „ω“ ca nişte cantităţi constante, şi să luăm ca variabile numai: ascensiunea dreaptă „α“, declinaţiunea „δ“ şi longitudinea „L“.

In urma acestor consideraţiuni, prima ecuaţiune din (1) ne dă

$$\cos\delta \frac{d\delta}{dt} = \cos l \,.\, \sin\omega \,.\, \cos L \frac{dL}{dt} \,. \tag{2}$$

Ţinând seamă de ecuaţia a treia din (1) scriem:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\cos l \,.\, \sin\omega \,.\, \cos L \,.\, \cos\alpha}{\cos l \,.\, \cos L} \,.\, \frac{dL}{dt} = \sin\omega \,.\, \cos\alpha \frac{dL}{dt} \,. \tag{3}$$

A doua ecuaţiune din (1) ne dă:

$$\cos\delta \,.\, \cos\alpha \,.\, \frac{d\alpha}{dt} - \sin\delta \,.\, \sin\alpha \,.\, \frac{d\delta}{dt} = \cos l \,.\, \cos\omega \,.\, \cos L \frac{dL}{dt} \,. \tag{4}$$

Ţinând seamă de ecuaţia a treia din (1) scriem:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \cos\omega \frac{dL}{dt} + \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\delta \frac{d\delta}{dt} \tag{5}$$

Inlocuind valoarea lui $\frac{d\delta}{dt}$ din (3) în (5) obţinem:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \cos\omega \frac{dL}{dt} + \sin\omega \,.\, \sin\alpha \,.\, \operatorname{tg}\delta \frac{dL}{dt} \,. \tag{6}$$

Pentru prescurtare în formulele (3) şi (6) punând:

$$\sin\omega \frac{dL}{dt} = n \quad \text{şi} \quad \cos\omega \frac{dL}{dt} = m \tag{7}$$

obţinem:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \,.\, \sin\alpha \,.\, \operatorname{tg}\delta \quad , \quad \frac{d\delta}{dt} = n \cos\alpha. \tag{8}$$

Reamintim acum că atât obliquitatea „ω“ cât şi retrogradarea nodului „$\frac{dL}{dt}$“ nu sunt cantităţi constante, ele variază în raport cu timpul, de asemeni şi cantităţile „m“ şi „n“, care sunt legate de primele prin formulele (7) sunt şi ele variabile cu timpul.

LAPLACE a dat în 1750 pentru „m“ şi „n“ următoarele valori:

$$\begin{aligned} m &= 46'',02824 + 0''.00030864\, t \\ n &= 20'',06442 - 0''.00009702\, t. \end{aligned} \tag{9}$$

Teoretic s'ar părea că integrând ecuaţiile diferenţiale (8) ţinând seama de (9) definite în intervalul dela $1750 + t$ la $1750 + t'$ ne-ar putea da pe „α“ şi „δ“. Calculul practic nu se face prin integrare, ci utilizându-se formulele de desvoltare a funcţiunilor „α“ şi „δ“, după TAYLOR, în raport cu puterile crescătoare ale variabilei timp.

Aceste formule sunt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \frac{(t'-t)}{1}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \dots \\ \delta &= \delta_0 + \frac{(t'-t)}{1}\frac{d\delta}{d\alpha} + \frac{(t'-t)^2}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \dots \end{aligned} \tag{10}$$

Calculul numeric aproximativ. Din cauză că în expresiunile (10) valorile lui „α“ şi „δ“ depind de „$\frac{d\alpha}{dt}$“ şi „$\frac{d\delta}{dt}$“ care la rândul lor sunt funcţie de „α“ şi „δ“ suntem obligaţi să facem un calcul preliminar pentru o epocă intermediară medie între anii indicaţi în enunţul problemei, adică pentru anul:

$$\frac{1851 + 1915}{2} = 1883.$$

Pentru anul 1883 vom calcula cu aproximaţiune valorile medii „α_m“ şi „δ_m“ ale ascensiunei drepte, declinaţiuni, mărginindu-ne la rezultat numai la minute.

In ceea ce priveşte termenul $t' - t$ el este

$$t' - t = 1883 - 1851 = 32 \text{ ani.}$$

Ascensiunea dreaptă în anul 1883. Voi considera formula întâia din (10) mărginindu-mă în membrul al doilea numai la doi termeni, adică la:

$$\alpha = \alpha_0 + (t' - t)\frac{d\alpha}{dt} \qquad (11)$$

de asemeni la formula întâia din (9)

$$m = 46''.02824.$$

In asemenea condițiuni avem:

$$(t' - t)\frac{d\alpha}{dt} = 32 \times m = 32 \times 46''.02824 = 1473'' = 24'.33 \cong 25'$$

$$\alpha_m = \alpha_0 + (t' - t)\frac{d\alpha}{dt} = 76^0.26' + 25' = 76^0.51'.$$

Declinațiunea în anul 1883. Voi considera formula a doua din (10) mărginindu-mă în membrul al doilea numai la doi termeni, adică la:

$$\delta = \delta_0 + (t' - t)\frac{d\delta}{dt}. \qquad (12)$$

Vom avea:

$$(t' - t)\frac{d\delta}{dt} = 32 \times n \times \cos 76^0.51 = 32 \times 20'',0644 \times 0.23458$$

$$= 151'' = 2'.31'' \cong 3'$$

$$\delta_m = \delta_0 + (t' - t)\frac{d\delta}{dt} = 45^0.50' + 3' = 45^0.53'.$$

Deci pentru epoca intermediară medie adică pentru anul 1883 avem coordonatele ecuatoriale aproximative ale stelei α Aurigae:

$$\alpha_m = 76^0.51' \quad ; \quad \delta_m = 45^0.53'. \qquad (13)$$

Valorile lui „m" și „n" pentru anul 1883. Formulele (9) sunt date pentru anul 1750; dela acest an 1750 până la 1883 sunt:

$$t = 1883 - 1750 = 133 \text{ ani.} \qquad (14)$$

Valorile lui „m" și „n" devin:

$$\begin{aligned} m &= 46'',02824 + 0''.00030864 \times 133 = 46''.06928912 \\ n &= 20''.06442 - 0''.00009702 \times 133 = 20''.05151534. \end{aligned} \qquad (15)$$

Calculul numeric exact. In cazul când din datele problemei ar rezulta pentru declinaţiunea „δ“ a stelei o valoare apropiată de 90°, cum ar fi cazul pentru steaua polară, sau altele învecinate, calculul trebue condus în mod cu totul riguros; pentru cazul stelei „α Aurigae“ însă este suficient să utilizăm formulele (10), reduse în membrul al doilea numai la doi termeni.

Calculul ascensiunei drepte în 1915, 0. Considerăm formula (11) unde

$$\alpha_0 = 76^0 . 25' . 30''$$

$$t' - t = 1915 - 1851 = 64 \text{ ani}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n . \sin \alpha_m . \operatorname{tg} \delta_m = 46'', 069289$$

$$+ 20'', 051515 \times \sin 76^0 . 51 \times \operatorname{tg} 45^0 . 53'$$

$$= 46'', 069289 + 20''. 051515 \times 0 . 97378 \times 1 . 03132 = 66'', 20663$$

$$\alpha = 76^0 . 25' . 30'' + 64 \times 66''. 20663 = 77^0 . 36' . 07''. 224$$

Adică: Ascensiunea dreapta în 1915, 0 a stelei α Aurigae este:

$$\alpha = 77^0 . 36' . 07'', 224 = 5^h . 10^m . 24^s . 482. \qquad (16)$$

Calculul declinaţiunei în 1915, 0. Considerăm formula (12) unde:

$$\delta_0 = 45^0 . 50' . 22''$$

$$t' - t = 1915 - 1851 = 64 \text{ ani}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n . \cos\alpha = 20''. 051515 \times \cos 76^0 . 51$$

$$= 20''. 051515 \times 0, 22750 = 4''. 56172$$

$$\delta = 45^0 . 50' . 22'' + 64 \times 4'', 56172 = 45^0 . 53' . 43'', 95$$

Adică: Declinaţiunea în 1915, 0 a stelei α Aurigae este:

$$\delta = 45^0 . 53' . 43''. 95 \qquad (17)$$

II. Să considerăm al doilea grup de formule fundamentale:

$$\sin l = \cos\omega . \sin\delta - \sin\omega . \cos\delta . \sin\alpha$$

$$\cos l . \sin L = \sin\omega . \sin\delta + \cos\omega . \cos\delta . \sin\alpha \qquad (18)$$

$$\cos l . \cos L = \cos\alpha . \cos\delta.$$

Vom lua pentru obliquitatea aparentă a eclipticei la I Ianuarie 1915 valoarea

$$\omega = 23^0 . 27' . 09''.$$

Mă voi folosi în calcul de formulele brute (18) ne făcându-le calculabile cu logaritmi, întru cât voi utiliza maşina de calcul. Scrim valorile naturale:

$$\sin \omega = \sin 23^0 . 27' . 09'' = 0 . 39799$$

$$\cos \omega = \cos 23^0 . 27' . 09'' = 0 . 91739$$

$$\sin \alpha = \sin 77^0 . 36' . 07'' = 0 . 97668$$

$$\cos \alpha = \cos 77^0 . 36' . 07'' = 0 . 21471$$

$$\sin \delta = \sin 45^0 . 53' . 44'' = 0 . 71807$$

$$\cos \delta = \cos 45^0 . 53 . 44 = 0 . 69597.$$

Calculul latitudinei. Făcând substituirile în formula întâia din grupul (18), obţinem:

$$\sin l = 0{,}91739 \times 0{,}71807 - 0{,}39799 \times 0{,}69597 \times 0{,}97668$$

$$\sin l = 0{,}38822 \; ; \; l = 22^0 . 50' 37'', 7 \; ; \; \cos l = 0{,}92156$$

Calculul longitudinei. Făcând substituirile în formula a doua din grupul (18), obţin:

$$\sin L = \frac{0 . 39799 \times 0 . 71807 \times 0 . 91739 \times 0 . 69597 \times 0 . 97668}{0,\, 92156}$$

$$\sin L = 0,\, 98677 \; ; \; L = 80^0 . 40' . 12'' \; ; \; \cos L = 0,\, 16212$$

Verificare. Făcând substituirile în formula a treia din grupul (18), obţin:

$$0 . 92156 \times 0 . 16212 = 0 . 21471 \times 0 . 69597$$

$$0 . 14941 \cong 0 . 14943.$$

Coordonatele ecliptice pentru 1 Ianuarie 1915 ale stelei α Aurigae (Capela) sunt:

$$l = 22^0 . 50' . 37'' . 7 \; ; \; L = 89^0 . 40' . 12'' . 0.$$

CESAR D. ORĂŞANU.

PROBLEMA 2822. *S'a măsurat exact ipotenuza unui triunghiu dreptunghic şi i s'au calculat catetele.*

S'a găsit suma catetelor cât 1,5 ipotenuza.

Care este minimul erorii ce s'a putut face la calculul catetei la care s'a greşit cu mai mult.

VICTOR ŞERBĂNESCU.

Notând, cu a, b, c, valorile exacte ale celor 3 laturi ale triunghiului dreptunghic în A şi cu e_b şi e_c erorile ce s'au făcut la calculul celor 2 catete, avem:

$$b + e_b + c + e_c = 1{,}5a$$

$$\therefore \quad e_b + e_c = 1{,}5a - (b + c)$$

$$\therefore \quad e_b + e_c = a\,[1{,}5 - (\sin B + \cos B)].$$

Termenul $\sin B + \cos B$ are valoarea maximă $\sqrt{2}$ pentru $B = \frac{\pi}{4}$ şi deci:

$$\sin B + \cos B \leqq \sqrt{2} < 1{,}5 \quad \therefore \quad 1{,}5 - \sin B - \cos B > 0 \quad \therefore \quad e_b + e_c > 0.$$

Această inegalitate arată că eroarea cea mai mare în valoare absolută este totdeauna pozitivă, ceea ce exprimă că la cateta la care s'a greşit cu mai mult, eroarea este în plus.

Fie $e_b > 0$ eroarea cea mai mare în valoare absolută. Vom deosebi 2 cazuri:

$$1.\ e_c < 0 \quad \text{şi} \quad 2.\ e_c > 0.$$

Cazul 1. $e_c = -e'_c < 0 \quad e'_c > 0$

$$e_b = a\,[1{,}5 - (\sin B + \cos B)] + e'_c$$

$$\therefore \quad e_b \geqslant a\,[1{,}5 - (\sin B + \cos B)]$$

$$\text{min. } e_b \geqslant \text{min. } a\,[1{,}5 - (\sin B + \cos B) = a\,(1{,}5 - \sqrt{2}) \quad (1)$$

Cazul 2. $e_b \geqslant e_c > 0 \quad \therefore \quad e_b \geqslant \frac{e_b + e_c}{2}$ (2)

pe de altă parte avem:

$$e_b = a\,[1{,}5 - (\sin B + \sin C)] - e_c\,. \quad (3)$$

Inlocuind valoarea lui e_b dată de relaţia (3) în inegalitatea (2) se obţine:

$$e_b \geqslant \frac{a\,[1{,}5 - \sin B - \cos B]}{2}$$

$$\therefore \text{ min. } e_b \geqslant \text{min. } \frac{a\,(1{,}5 - \sin B - \sin C)}{2} = \frac{a\,(1{,}5 - \sqrt{2})}{2}$$

$$\therefore \text{ min. } e_b = \frac{a\,(1{,}5 - \sqrt{2})}{2} \sim 0{,}0429a. \qquad (4)$$

Dintre cele 2 minime date de relaţiile (1) şi (4) cel dat de relaţia (4) are valoarea cea mai mică.

Rezultă că minimul erorii ce s'a făcut la calculul catetei la care s'a greşit cu mai mult este:

$$a\,\frac{1{,}5 - \sqrt{2}}{2} \sim 0{,}0429a.$$

VICTOR ŞERBĂNESCU.

A rezolvat problema d-l L. K. KRIECENOFCHER.

PROBLEMA 3659. *Să se demonstreze că dacă o funcţiune, simetrică în raport cu* n *variabile, păstrează o valoare constantă, atunci oricare altă funcţiune, simetrică în raport cu aceleaşi variabile, admite un maximum sau un minimum absolut, pentru cazul când variabilele iau valori egale între ele.*

GH. ZAPAN.

Problema este un caz particular al unei teoreme mai generale a lui CAUCHY: *mai multe funcţiuni simetrice de* x, y, z,..., u *rămânând constante, o altă funcţiune simetrică de* x, y, z,..., u *e maximă sau minimă, când variabilele* x, y, z,..., u *sunt egale.*

Notă. Această problemă a apărut în Mai 1928; în aceeaşi lună şi în acelaşi an în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. VIII, pag. 36 d-l C. STAN rezolva aceeaşi problemă sub formă de notă. Această coincidenţă ne-a semnalat-o d-nii A. BURICHOVICI (Galaţi) şi P. I. GHIŞOIU (Bucureşti).

GH. TH. GH.

PROBLEMA 6109. *Un funcţionar merge la serviciu cu tramvaiul; coborând la staţia* A, *trebue să meargă o bucată pe jos în acelaşi sens; coborând la staţia* B, *trebue să meargă în sens opus.*

La care staţie ar fi mai bine să coboare? Discuţie.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de d-nii: RADU SPIRU HARET (Classe de Première Licée Français de Bucarest), PETRE D. COLUMBEANU (bacalaureat, Bucureşti), VASILE D. PĂLĂCEANU (Şcoala ofiţeri de geniu Bucureşti), VIRGIL G. CONSTANTINESCU (Slatina).

Fie C poziţia serviciului situat pe dreapta AB ($AC=a$, $CB=b$), V *viteza tramvaiului*, v *viteza funcţionarului.*

Timpul t_1 necesar funcţionarului pentru a ajunge la serviciu prin coborâre în *staţia* A este:

$$t_1 = \frac{a}{v}$$

Timpul t_2 necesar funcţionarului pentru a ajunge la serviciu prin coborâre în *staţia* B este:

$$t_2 = \frac{a+b}{V} + \frac{b}{v}.$$

Pentru ca coborârea în A să fie mai avantajoasă trebueşte ca:

$$t_1 < t_2 \quad \text{sau} \quad \frac{a}{v} < \frac{a+b}{V} + \frac{b}{v}.$$

Condiţia este îndeplinită întotdeauna, *indiferent* de valorile mărimilor V şi v, pentru $a < b$.

Pentru $a > b$ se impune însă ca:

$$v > V\frac{a-b}{a+b}.$$

Pentru ca coborârea în B să fie mai avantajoasă trebueşte ca:

$$t_1 > t_2$$

adică:

$$\frac{a}{v} > \frac{a+b}{V} + \frac{b}{v}.$$

Rezultă condiţiile $a > b$ şi $v < V\frac{a-b}{a+b}$.

Cu datele de mai sus putem forma următorul tablou:

$a < b$	Funcţionarul trebue să coboare în A	
$a > b$	Coboară în A dacă:	$v > V\frac{a-b}{a+b}$
	Coboară în B dacă:	$v < V\frac{a-b}{a+b}$
	Pentru: $v = V\frac{a-b}{a+b}$ staţia de coborâre este indiferentă.	

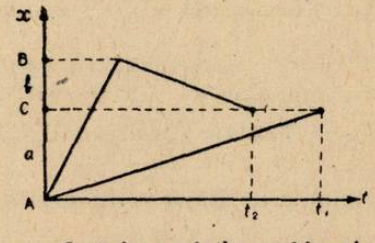
LICEUL GRIGORE LAZĂR SIBIU BIBLIOTECA PROFESORILOR

D-l RADU SPIRU HARET propune şi o interesantă construcţie grafică. In adevăr, se pot lua drept axe de coordonate timpul şi spaţiul şi construi dreptele:

$x = vt$ (funcţionarul coboară în A)

$x = Vt$ (funcţionarul coboară în B)

$$x = a + b - v\left(t - \frac{a+b}{V}\right).$$



Se obţin astfel timpurile t_1 şi t_2. In cazul figurii $t_1 > t_2$ şi deci coborîrea în B este mai avantajoasă.

Incheiem soluţia problemei prin închinarea unui gând pios regretatului său propunător COMANDOR I. LINTEŞ mort într'un nenorocit accident la 21 Iulie 1946.

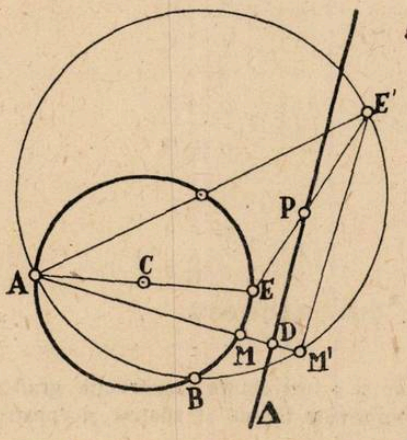
AL. ST.

PROBLEMA 6155. *Se dă un cerc* (C), *pe el un punct fix* A *şi un alt punct fix* P *în planul cercului.* Fie Δ *o dreaptă variabilă ce trece prin* P. *Perpendiculara dusă din* A *pe* Δ *taie cercul* (C) *a doua oară în* M.

Se cere locul geometric al simetricului punctului M *faţă de dreapta* Δ.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție geometrică. Fie C centrul cercului (C) și E punctul diametral opus lui A în acest cerc. Este evident că dreapta EM este perpendiculară pe AM și deci paralelă cu Δ. Să luăm punctul E′ simetric cu E față de P, deci E′ e un punct fix.



Se poate demonstra elementar, prin egalitatea

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{PE'}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{DM'}}$$

că E′M′ este paralelă cu Δ și deci perpendiculară pe AM. Unghiul AM′E′ fiind drept și punctele A și E′ fixe, locul geometric descris de M′ este cercul de diametru AE′.

Observări. a) Fie B al doilea punct comun cercului (C) și cercului AM′E′. Socotind punctul B ca aparținând primului cerc rezultă că EB ⊥ AB. Socotind același punct ca fiind pe al doilea cerc rezultă E′B ⊥ AB. Deducem că punctele E′, E, B sunt în linie dreaptă.

b) Din observația de mai sus ($\sphericalangle ABP = 90^0$) mai rezultă că și cercul loc geometric al lui D, având pe AP ca diametru, trece tot prin punctul B.

Altă soluție geometrică dată de d-l TRAIAN V. MUSTĂCESCU (Șc. Polit. București).

Pe aceiași figură se observă că unghiurile BMA și BDA sunt constante având ca măsură $\frac{1}{2}$ arc AB respectiv în cercul (C) și în cercul ABD. Rezultă că triunghiul BMD rămâne mereu asemenea cu el însuși, ceea ce atrage după sine $\frac{\overline{MD}}{\overline{MB}} = k = \text{const.}$ Atunci însă $\frac{\overline{MM'}}{\overline{MB}} = \frac{2\overline{MD}}{\overline{MB}} = 2k = \text{const.}$ și cum $\sphericalangle BMM' = \text{const.}$ triunghiul AMM′ rămâne și el asemenea cu el însuși, adică $\sphericalangle BM'M = \text{const.}$ Dar dacă $\sphericalangle BM'A$ este constant punctul M′ descrie un cerc ce trece prin A și B. Prin particularizarea secantei AM se determină poziția acestui cerc.

Observații. 1°. O altă soluție geometrică foarte bună a fost dată de d-l MIRCEA D. POPA.

2°. Au trimes soluţii analitice bune d-nii: GAVRIL SÂMBOANU (student matem.), CEZAR N. S. BOERESCU, C. V. PANTELIMON, SILVIO E. FANCIOTTI, MIRCEA D. PETCULESCU (studenţi-ingineri Bucureşti), MIRCEA A. SĂVESCU (Col. „Sf. Sava" Bucureşti), ALEX. GH. MORAITE (elev part. cl. VIII Buc.), MIHAI R. CONSTANTINESCU (liceul „Sf. Petru şi Pavel" Ploeşti), DUMITRU S. MARINESCU (Ploeşti), IOAN I. NOVAC, GEORGE V. MANOLESCU (liceul „N. Bălcescu" Brăila), GEORGE M. NICOLAE (Col. Naţ. „Carol I" Craiova), A. E. DONEAUD (liceul „Titu Maiorescu" Bucureşti), MIRCEA G. IOSIFESCU (liceul Ploeşti), V. C. BĂRBULESCU (Argeş), D. I. CRĂCEA (liceul „Radu Greceanu", Slatina), DAN E. VASILIU (liceul „Mihai Viteazu", Bucureşti), ŞT. GR. FIRESCU (liceul „Fraţii Buzeşti", Craiova).

PROBLEMA 6203. *In triunghiul* ABC *ducem două paralele la* AB *la distanţa n de ea şi două paralele la* AC *la distanţa m de ea. Se formează astfel, prin intersecţia lor, un paralelogram de centru* A. *Diagonalele acestui paralelogram sunt conjugate în unghiul* BAC. *Raportul în care ele împart pe* BC *este* $n\,\overline{AB} : m\,\overline{AC}$. *Raportul în care isogonalele lor taie pe* BC *este* $m\,\overline{AB} : n\,\overline{AC}$. *Caz particular* $m = \overline{AC}$, $n = \overline{AB}$.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de d-nii: C. BOERESCU (Politehnica, Bucureşti), I. CĂPRARU, GH. GRIGORE, M. MIHĂLCIOIU (liceul militar, Craiova), V. PĂLĂCEANU (şcoala Ofiţeri geniu, Bucureşti), V. STANCIU (liceul militar, Craiova), P. TEODORESCU (liceul Matei Basarab, Bucureşti).

Paralelele dintr'un punct la laturile şi diagonalele unui paralelogram formează un fascicol armonic.

Fie P unul din vârfurile paralelogramului; paralela din P la latura BC taie pe AB, AC în B', C'; avem

$$\frac{\overline{PB'}}{\overline{PC'}} = \frac{\text{aria } APB'}{\text{aria } APC'} = \frac{\overline{AB'}.n}{\overline{AC'}.m} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{n}{m}$$

ceea ce justifică primul punct al problemei.

Distanţele unui punct de pe isogonală la laturile unghiului stau în raportul invers $m : n$.

In cazul particular regăsim proprietăţi cunoscute ale medianei şi simedianei.

EXERCIȚII

35. *Să se rezolve ecuația*

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

LT.-COL. E, ST. IACOB.

R. Ecuația dată împărțită cu x^4, se scrie

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0. \qquad (1)$$

Avem

$$x + \frac{1}{x} = y \;\; ; \;\; x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \; ; \; x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y \; ; \; x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$$

așa că după înlocuire, (1) devine

$$y^4 + y^3 - 3y^2 - 2y = y\,(y+2)\,(y^2 - y - 1) = 0$$

care se rezolvă imediat.

36. *Să se arate că în orice triunghiu, avem*

$$\Sigma \frac{\cos 2A}{\sin A} = \frac{R\,(p^2 + r^2 + 4Rr) - 4pS}{2RS}.$$

LT.-COL. E. ST. IACOB.

R. Se ține seamă de relațiile cunoscute

$$\cos 2A = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2} \;\; ; \;\; \sin A = \frac{a}{2R} \;\; ; \;\; \Sigma ab = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$$abc = 4RS.$$

37. *Dacă* $a + b + c = 2p$, *atunci.*

$$4\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c) =$$
$$1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c$$

$$4\cos p \cos(p-a) \cos(p-b) \cos(p-c) =$$
$$-1 + 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c$$

M. R. CONSTANTINESCU.

R. avem succesiv

$$4\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c) = -[\cos a - \cos(b+c)][\cos a - \cos(b-c)] =$$
$$-\cos^2 a + \cos a\,[\cos(b+c) + \cos(b-c)] - \cos(b+c)\cos(b-c) =$$
$$1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c.$$

La fel

$$4\cos p \cos(p-a) \cos(p-b) \cos(p-c) = [\cos a + \cos(b+c)][\cos a + \cos(b-c)] =$$
$$\cos^2 a + \cos a\,[\cos(b+c) + \cos(b-c)] + \cos(b+c)\cos(b-c) =$$
$$-1 + 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c.$$

38. *Să se arate că ori care ar fi triunghiul de laturi a, b, c şi cu cercurile tritangente de raze r, r_a, r_b, r_c, expresiunea*

$$E = \frac{m(ab - 2rr_c)}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{n(bc - 2rr_a)}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{p(ca - 2rr_b)}{c^2 + a^2 - b^2}$$

rămâne constantă, numerele m, n, p fiind constante.

C. CORDUNEANU.

R. Din relaţia

$$(a + c - b)(a + b - c) = 4rr_c$$

se scoate

$$bc - 2rr_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

şi alte 2 analoage, pe care ducându-le în E găsim

$$E = \frac{m + n + p}{2}.$$

39. *Într'un triunghiu oarecare avem*

$$\Sigma \sqrt{\frac{(r_a - r)(r_b - r)}{(r_a + r_b)(r_c + r_a)}} = 1.$$

ILIE N. CONSTANTINESCU.

R. Se ţine seama de relaţiile cunoscute

$$r_a - r = 4R\sin^2\frac{A}{2}, \quad r_b + r_c = 4R\cos^2\frac{A}{2}, \ldots$$

$$\Sigma \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1.$$

40. *In planul unui triunghiu există o singură dreaptă suport pentru care componentele oricărei forţe pe laturile triunghiului dat sunt egale.*

EM. MARINESCU.

R. Ecuaţia baricentrică a forţelor F_a, F_b, F_c ce acţionează pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, este [1]:

$$\frac{F_a}{a}\alpha + \frac{F_b}{b}\beta + \frac{F_\gamma}{c}\gamma = 0$$

Cum

$$F_a = F_b = F_c$$

avem

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0.$$

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 26, articolul d-lui GH. D. SIMIONESCU.

41. *Să se calculeze derivatele funcțiunilor*

$$y_n = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \quad , \quad z_n = e^{x e^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

ING. TH. ONIGA.

R. Avem

$$y_n = x^{y_{n-1}} \quad , \quad z_n = e^{x^{z_{n-1}}}$$

$$\therefore \quad Ly_n = y_{n-1} Lx \quad , \quad Lz_n = \left(x^{z_{n-1}}\right)$$

$$\frac{y_n'}{y_n} = (y_{n-1})' Lx + \frac{y_{n-1}}{x} \; ; \; \frac{z_n'}{z_n} = \left(x^{z_{n-1}}\right)'.$$

Apoi

$$v_{n-1} = x^{z_{n-1}} \quad \therefore \quad Lv_{n-1} = z_{n-1} Lx \quad \text{și} \quad \frac{v_{n-1}'}{v_{n-1}} = z_{n-1}' Lx + \frac{z_{n-1}}{x}.$$

Se continuă pe această cale pentru y_n'', y_n''', ... și z_n'', z_n''', ...

PROBLEME PROPUSE

6381. Să se găsească un patrat perfect de douăsprezece cifre, știind că suma tranșelor lui de câte patru cifre este egală cu patratul sumei celor trei tranșe de câte două cifre ale rădăcinii.

Exemplu:

$320029^2 = 102418560841$ cu $1024 + 1856 + 0841 = (32 + 00 + 29)^2$.

G-L GH. BUICLIU.

6382. Să se găsească, pe cale geometrică, locul centrului cercului circumscris și al ortocentrului triunghiului ABC, care are unghiul A fix și suprafața constantă.

OTILIA GEORGESCU ROEGEN.

6383. Să se găsească punctele A, B, C, D din același plan, cunoscând centrele cercurilor ABC, BCD, CDA și DAB.

D. V. STOICA.

6384. Există vreo valoare a lui n pentru care produsul

$$P = (1 + i)(2 + i)(3 + i) \ldots (n + i) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

să fie real?

VIRGIL GHIȚESCU.

6385. 1°. Fie $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, polinoame de gradul n; $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n cantităţi distincte reale.

Să se arate că polinoamele:

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} P_1'(x) & P_1(a_1) & P_1(a_2) \ldots . P_1(a_n) \\ P_2'(x) & P_2(a_1) & P_2(a_2) \ldots . P_2(a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n+1}'(x) & P_{n+1}(a_1) & P_{n+1}(a_2) \ldots P_{n+1}(a_n) \end{vmatrix}$$

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} P_1''(x) & P_1(a_1) & P_1(a_2) \ldots . P_1(a_n) \\ P_2''(x) & P_2(a_1) & P_2(a_2) \ldots . P_2(a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n+1}''(x) & P_{n+1}(a_1) & P_{n+1}(a_2) \ldots P_{n+1}(a_n) \end{vmatrix}$$

nu pot avea rădăcini comune.

2°. Dacă $P_i(x)$ sunt polinome cel mult de gradul $m < n$, $F_1(x)$ şi $F_2(x)$ sunt identic nule.

3°. Dacă $P_i(x)$ sunt polinome de gradul n având cel puţin o rădăcină comună, polinoamele $F_1(x)$ şi $F_2(x)$ sunt de asemenea identic nule.

4°. Dacă $P_i(x)$ sunt polinoame de gradul $n+m$ şi au o rădăcină comună, multiplă de ordinul m, $(m > 3)$, polinoamele $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_2'(x)$ au suma rădăcinilor simple în progresie aritmetică.

5°. Păstrând notaţiile dela punctul 1° şi luând $n = 3$, să se cerceteze cum sunt aşezate numerele

$$\frac{a_1+a_2}{2}, \quad \frac{a_1+a_3}{2}, \quad \frac{a_2+a_3}{2}$$

în raport cu intervalele dintre rădăcinile polinomului $F_1(x)$ respectiv.

C. IONESCU-BUJOR.

6386. Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2b & 2ab+a^2 & b+2a & 1 \\ b^2c & 2bc+b^2 & c+2b & 1 \\ c^2a & 2ca+c^2 & a+2c & 1 \end{vmatrix}.$$

VIRGIL CLAUDIAN.

6387. Fie M un punct în planul triunghiului (T). Se consideră: *a)* Hiperbola echilateră (H) circumscrisă triunghiului (T) şi trecând prin M; *b)* Parabola (π) înscrisă în triunghiul (T) şi a cărei directoare trece prin M. Să se arate că:

1°. Tangentele duse din M parabolei (π) sunt paralele cu asimptotele hiperbolei (H).

2°. Punctul M, focarul parabolei (π) şi cel de al patrulea punct comun hiperbolei (H) cu cercul circumscris triunghiului (T), sunt colineare.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6388. Fie A, B două puncte pe un diametru Δ al cercului O; o dreaptă mobilă paralelă cu Δ întâlneşte cercul în M şi N. Locul geometric al intersecţiei dreptelor AM, BN este o conică, trecând prin capetele diametrului perpendicular pe Δ. Dacă B este simetricul, faţă de centru, al inversului C al punctului A, conica se reduce la un cerc.

Dacă $\overline{OD} = \overline{AC}$ şi E este inversul lui D, centrul cercului loc geometric este simetricul lui O faţă de E.

N. N. MIHĂILEANU.

6389. Se dă o bară cotită sub un unghiu drept ABC situată într'un plan vertical, vârful B al unghiului drept fiind punctul cel mai de sus. Braţele BA şi BC ale barei fac câte 45° cu verticala punctului B. Pe porţiunea AB este situat un mic inel de greutate G, foarte aproape de B. Pe porţiunea BC este situat un alt inel identic cu primul inel şi legat de el cu un fir de lungime l. La început firul este perfect întins, deci inelul al doilea este aproape la distanţa l de B pe bara BC. Sistemul este lăsat liber, fără frecări, din această poziţie. Să se determine mişcarea.

GABRIELA ŢIŢEICA.

6390. Un observator A descrie un cerc (C) de rază R, iar un diapazon B execută o mişcare circulară, raza cercului fiind R'. Ştiind că vitezele unghiulare ale mişcărilor sunt constante (ω şi ω') şi că planele cercurilor formează un unghiu φ, să se determine frecvenţa sunetului diapazonului recepţionat de observator. Înălţimea sunetului diapazonului este n.

IOSIF HITZIG.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Geometria

		Pag.
N. Blaha	Proprietăţi ale triunghiurilor	201
H. M. Bodnărescu	Asupra triunghiurilor pseudo isoscele	105
A. Dobrescu	Două relaţiuni între distanţele mutuale ale unor puncte	265
P. P. Drăghicescu	Pe marginea unei note	361
D. V. Ionescu	Aplicaţii ale noţiunilor de geometria maselor la demonstrarea câtorva teoreme	267
N. N. Mihăileanu	Două conice ataşate unui patrulater	237
Al. V. Niculescu	Teoreme [1]) din geometria triunghiului	137
G-l Gh. I. Popescu	Proprietăţi ale punctelor isogonale de pe diametrele cercului circumscris unui triunghiu	27

2. Algebra

M. Adam	Relaţiuni între câteva funcţiuni simetrice	393
N. Gaiu	Asupra unei ecuaţii algebrice	25
Ş. Gheorghiu	Asupra problemei 5894	140
C. Ionescu-Bujor	Asupra unor transformări omografice	169

3. Perspectiva

Ad. Gheorghiu	Perspectiva directă şi teorema lui DESARGUES.	329

4. Mecanica

M. Pătroianu	Poziţia de echilibru relativ în problema atracţiei Newtoniene a două puncte materiale.	233
Al. Stoenescu	O problemă de mecanică	365
V. Vâlcovici	Multiplicitatea sistemelor de vector	70

1) Cu o notă de *Ş. Gheorghiu* la pag. 138.

5. Analiza şi Teoria funcţiilor

		Pag.
D. I. Mangéron	Asupra unei clase de ecuaţii diferenţiale de ordin superior	207

6. Istoria Matematicelor

V. Marian	Un extras din aritmetica lui GASPAR SCHOTT tipărit la Cluj	111

7. Diverse

Gazeta Matematică . . .	Donaţii pentru *Gazeta Matematică*	35
Gazeta Matematică . . .	Comemorarea lui ION IONESCU	66
C. Iacob	Congresul internaţional de mecanică aplicată la Paris	143

8. Necrologuri

I. S. Antoniu	Profesorul-Inginer I. IONESCU	65
P. Sergescu	NICULAE ABRAMESCU.	233
G-l Gr. Zapan.	COMANDORUL I. LINTEŞ	67

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

. . . . .	Lista membrilor soc. *Gazeta Matematică*. .	5
. . . . .	Membrii decedaţi.	24

2. Premii şi concursuri

Al. A. Roşu, D. A. Stan .	Premiile, bursele şi publicaţiile societăţei *Gazeta Matematică*	33
Delegaţia	Concursul *Gazeta Matematică* din 1947 .	36, 77, 212
Al. Bunescu, Lt-Col. Ed. Dragomirescu - Buzne, Lt. C-dor A. Stan . .	Raport pentru acordarea premiului „G-ral SCARLAT PANAITESCU“	37
Al. Bunescu, P. Sergescu, Ş. Ţiţeica	Raport p. decernarea premiului „V. CONTA“	116
I. S. Antoniu, I. Ionescu, P. Sergescu.	Raport pentru decernarea premiului de istoria matematicelor	144

		Pag.
E. N. Botea, Ş. Gheorghiu, C. Ionescu-Bujor . . .	Raport pentru acordarea premiului „NICOLAE BOTEA"	172
I. S. Antonlu, G-l Gh. Buicliu	Raport p. premiul de aritmetică „I. IONESCU"	241
Al. Bunescu, Al. Roşu, D. Stan	Raportul comisiunei pentru premiul ING. „AL. ROŞU"	275
Gh. D. Simionescu . . .	Rezultatul concursului *Gazeta Matematică* din 1947	297
I. S. Antoniu, G-l Gh. Buicliu	Raport pentru premiul de algebră „A. G. IOACHIMESCU"	303
I. S. Antoniu, G-l Gh. Liteanu, Al. V. Niculescu	Raport asupra acordării premiului de trigonometrie „V. CRISTESCU"	333
Ş. Gheorghiu, N. N. Mihăileanu, O. N. Ţino . . .	Raport p. decernarea premiului „G. ŢIŢEICA"	370
Al. Bunescu, Al. Stoenescu, Gabriela Ţiţeica, . . .	Raport asupra decernării premiului de mecanică „SPIRU HARET"	401

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

23. *O. N. Ţino*	Asupra problemei 2731	371

2. Geometria

3. *P. P, Drăghicescu* . .	O generalizare	79
9. *Em. E. Marinescu* . .	Asupra notei „Despre centrele izodinamice"	172
5. *N. N. Mihăileanu* . .	Asupra problemei 5321	116
14. *M. D. Popa*	Asupra problemei 5275	241
7. *V. Thébault*.	O teoremă a lui NEUBERG şi GOB.	146
19. *V. Thébault*.	Un punct remarcabil din planul unui triunghiu	304

3. Algebra

12. *M. Adam*	O formă remarcabilă a ecuaţiei care are ca rădăcini puterile rădăcinilor unei ecuaţii	216
18. *Ş. Gheorghiu*	Asupra unei desvoltări în serie	276
20. *V. Ghiţescu*	Notă asupra exerciţiului 39, Vol. XLIX, G. M.	305
1. *I. St. Teodorescu* . .	Rezolvarea ecuaţiei de gradul al treilea . .	38

Pag.

4. Trigonometria

13. *Ilie N. Constantinescu* Asupra expresiunilor sin $(a \pm b)$ şi cos $(a \pm b)$[1] 219
17. *M. Ghermănescu*. . . Un caz de rezolvare al patrulaterului . . . 276
8. *G-l Gh. Liteanu* . . . Asupra identităţilor dela Cap. VI. *Culegere de probleme de Trigonometrie* 147
21. *P. P. Teodorescu* . . Asupra exerciţiului 8 din G. M., Vol. LII . 333

5. Geometria analitică

15. *N. Ciorănescu*. . . . O construcţie prin puncte a parabolei. . . 242
16. *Ş. Gheorghiu* . . . . Asupra notei precedente 243
11. *Ş. Gheosghiu* . . . . Notă asupra patratului 213
2. *C. Ionescu-Bujor* . . Generalizarea axului radical 39

6. Analiza şi Teoria funcţiilor

26. *G. G. Constantinescu*. Asupra problemei 5237 402
24. *Şerb. Gheorghiu*. . . Notă asupra unei clase de ecuaţii de ordin superior. 373
22. *M. Ghermănescu*. . . Asupra unor ecuaţii diferenţiale 335

7. Mecanica

4. *M. Ghermănescu*. . . Asupra problemei 4547 80
10. *Gabriela Ţiţeica*. . . Asupra problemei 6063 174

8. Istoria Matematicelor

6. *D. I. Mangéron* . . . Acum o sută de ani în lumea matematică . 117

9. Diverse

25. *V. Claudian*. . . . . O chestie de prioritate în legătură cu problema 5926 402
24. *M. D. Popa*. . . . . În loc de erată. 401

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul *Gazetei Matematice* din 1947. Probele scrise 307
Facultatea de ştiinţe din Bucureşti. Algebra axiomatică 41
Politehnica din Bucureşti. Examene de admitere . . . 82, 175, 219, 244, 277, 336, 375

---

1) Cu o notă la fine de *G-l Gh. Liteanu.*

E. BIBLIOGRAFIE

Pag.

1. Lucrări și reviste recenzate

G-l Gh. Buicliu . . . . Intermédiaire de recherches mathématiques. 315
Ad. Gheorghiu . . . . M. ST. BOTEZ. Geometria descriptivă . . . 279
Ad. Gheorghiu . . . . M. ST. BOTEZ. Aplicațiile geometriei descriptive 280
Al. Stoenescu . . . . G. S. GEORGESCU. Călăuza atelierului mecanic 404
Al. Stoenescu . . . . D. GERMANI și C. BUDEANU. Forță de inerție 83
Gabriela Țițeica . . . . AL. STOENESCU. Teoria relativității 376
V. Vâlcovici . . . . A. GH. IOACHIMESCU. Mecanica rațională. . 338
T. Vescan. . . . . V. MARIAN, R. ȚIȚEICA. Curs de fizică generală 316

2. Lucrări nerecenzate

A. Gloden. . . . . Table des solutions de la congruence $x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ pour $450000 < p < 500000$ 221
Max Morand . . . . Introduction mathématique aux théories physiques modernes 376
I. I. Stamate . . . . Exerciții de matematici generale. 280
I. I. Stamate . . . . Reprezentări grafice. 246
I. Vardala . . . . Nouvelles idées et hypothèses au sujet des notions et des principes de la mécanique rationnelle. 317
T. Vescan. . . . . Az atom energia 246

3. Extrase, Suplimente, Teze

M. Botez . . . . Contribuție pentru o simplificare a sistemului de proecție MONGE într'un caz special. . 148
M. Botez . . . . Remarcă asupra metodei KUBOTA 148
M. Botez . . . . Sur une surface cerclée particulière 148
Al. Gheorghiu . . . . Folosirea deplasărilor clasice în calculul cadrelor 245
Al. Gheorghiu . . . . Planșeu cu grinzi încrucișate la construcția palatului regal 246
A. Gloden . . . . Formes linéaires des nombres dont la 8e puissance se termine dans le systeme décimal par un nombre donné de 1, 2, 3 chiffres. 376
A. Gloden . . . . Le centenaire de la découverte de Neptune par LE VERRIER 316
A. Gloden . . . . Note concernant les traveaux D'EDDINGTON 316
A. Gloden . . . . Par la repartition spatiale et le nombre des étoiles fixes 316

		Pag.
A. Gloden	Table des factorisations des nombres x^4+1 dans l'intervale $1000 \leqslant x \leqslant 3000$.	121
D. I. Mangéron	Notes de mécanique rationelle	221
D. I. Mangéron	Opera ştiinţifică a lui G. M. MITTAG-LEFFLER	221
D. I. Mangéron	Opera ştiinţifică a „Şcoalei" galileene	341
D. I. Mangéron	Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles	221
F. Marcus	Sur les cycles de LAPLACE	246
F. Marcus	Sur les réseaux avec les invariants absolus constants	246
Al. Stoenescu	Extinderea unei metode întrebuinţate la studiul fenomenelor mecanice	341
Al. Stoenescu	Generalizarea formulei lui BINET	341
Al. Stoenescu	Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant.	341
Al. Stoenescu	Sur le système de forces sous l'action desquelles un mobile parcourt une trajectoire donnée	341
C. C. Teodorescu	Probleme de rezistenţa materialelor	341
T. Vescan	Considérations de la dissymetrie structurale par rapport au principe de la moindre action de la théorie D'EINSTEIN.	221
T. Vescan	Problema locului teoriei clasice a relativităţei generalizate în desvoltarea teoriilor fixe	221
T. Vescan	Une conection de la loi de la force de VAN der WAALS appliquée au calcul des tensions superficielles	341

3. Reviste periodice

Acta Bolyai . . . 337
Analele Româno-Sovietice . . . 245, 403
Association Française pour l'avancement des sciences . . . 313
Boletin Matematico . . . 278
Buletinul Politehnicei din Bucureşti . . . 42
Buletinul Politehnicei „G. ASACHI" din Iaşi . . . 314
Časopis pro Pěstováni Matematikly a Fysiky . . . 315
Intermédiaire des recherches mathématiques . . . 42, 220, 315, 403
Mathematica . . . 245
Mùzeum Füzetek . . . 220, 278
Revista Matematică din Timişoara 42, 83, 121, 148, 176, 220, 279, 315, 338, 376, 403
Revista Ştiinţifică „V. ADAMACHI" . . . 42, 220, 338

F. CERERI [1])

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
1	24 (XXI)	?
4	24 „	?
5	24 „	?
7	59 „	?
8	59 „	?
10	91 „	. . . 176
11 [2])	144 „	?
12	145 „	?
13	145 „	219 (XXI) ?
14	183 „	?
15	219 „	?
16	254 „	?
17	294 „	264 (XXXVIII) ?
20	420 „	?
23	17 (XXII)	?
24	75 „	?
26	161 „	?
27	187 „	?
28	213 „	?
29	231 „	?
30	258 „	?
31	277 „	?
32	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV) ?
33	308 „	?
34	40 (XXIII)	?
35	40 „	?
36	65 „	?
37	86 „	211 (XXII) ?
38	112 „	?
39	137 „	?
40	157 „	?
41	185 „	?
42	211 „	?
43	235 „	?
44	259 „	?
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 (XXV)	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII) ?
83	160 „	?
84	197 „	?
85 [3])	197 „	. . . 222
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
92	57 (XXVIII)	?
93	57 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 „	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?

1) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns.

2) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

3) I s'a mai dat un răspuns şi în Vol. XLII, pag. 299.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
122	306 (XXX)	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	84
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	377
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 „	19 (XXXIII) ?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	148
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 (XLI)	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	42
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
270	90 (XLIII)	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	?
299	315 „	?
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 „	?
304	641 „	?
305	30 (XLVII)	?
306	135 „	?
307 [1]	171 „	?
308	221 „	?
310	373 „	?
311	373 „	?
313	518 „	?
315	564 „	?
316	30 (XLVIII)	?
317	71 „	?
318	166 „	?
319	414 „	?
320	454 „	?
325	243 (XLIX)	?
327	346 „	?

1) La pag. 171, Vol. XLVII a fost propusă cu numărul greşit 306.

Nr. cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
328	434 (XLIX)	?
329	508 „	?
330	569 „	?
331	611 „	?
333	732 (XLIX)	?
335	317 (L)	?
336	469 „	?
337	181 (LI)	?
338	181 „	?
339	323 „	?
340	602 „	?
341	246 (LII)	317
342	280 „	?
343	405 „	?

G. DIVERSE

Adunările societății *Gazeta Matematică* 149, 246, 377
† Carol Tomek 222
Cedarea dreptului de autor 150
Comemorarea lui I. Ionescu 405
Concursul *Gazetei Matematice* din 1947 318
Gestul unui premiat al *Gazetei Matematice* 318
Jubileul științific al d-lui P. Montel 222
O circulară a Ministerului Educației Naționale 318
Personale 341
Premii pentru concursul *Gazetei Matematice* din 1947 377
Redacționale 43, 149, 280
Sporirea bibliotecei *Gazeta Matematică* 121, 341, 377

H. PROBLEME PROPUSE ȘI REZOLVATE

a) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest volum

N. Abramescu 6277
M. Adam . . . 6313, 44, 63, 8
Th. Angheluță . . . 6303, 15, 26
A. Avramescu 6299
R. Bădescu 6332
B. Barbălat 6292, 337
I. A. Barbu 6312
C. I. Boerescu 6324, 73
G-l Gh. Buicliu . 5129, 6270, 84, 90, 305, 10, 22, 30, 40, 52, 62, 71, 81
V. Claudian . . 6276, 307, 29, 38, 49, 53, 65, 77, 86
M. R. Constantinescu . . . 6296
C. Coșniță . . . 6282, 306, 23, 69
C. V. Costăchescu 6380
E. Crăciunescu 6339
A. Dobrescu 6285, 318
P. P. Drăghicescu . . 6281, 335, 43
I. B. Florescu . . . 6301, 17, 21, 51
R. Georgescu 6348, 79
N. Georgescu-Roegen . . . 6367
Otilia Georgescu-Roegen . 6356, 82
Ad. Gheorghiu 6325
Gh. Th. Gheorghiu 6298
Șerb. Gheorghiu . . 6274, 84, 304, 28, 66, 87
M. Ghermănescu 6300, 59
V. Ghițescu 6384
Gh. A. Grigore 6302
I. Hitzig 6390
Lt.-Col. E. St. Iacob . . . 6350
C. Ionescu-Bujor . . 6334, 75, 85
C. Ionescu-Țiu 6275, 333
I. Linteș 6280, 309
G-l Gh. I. Liteanu 6314
Em. E. Marinescu 6273, 95, 363, 74
I. V. Măties 6271
V. Mehedincu 6291
Em. Mereuță 6286
St. S. Mihăiescu 6357
N. N. Mihăileanu 6388
C. Mihu 6293, 316
Em. Mortun 6327
Ing. F. Nedelcu 6297, 341
Mariana F. Nedelcu 6364
Al. Pantazi 6272
St. C. Pantazopol 6336, 78
M. D. Popa 6311
G-l Gh. Popescu 6355
V. Șerbănescu 6320
M. V. Soare 6287
Al. Stoenescu 6289, 319, 70

D. V. Stoica 6372, 83
I. St. Teodorescu 6358
P. P. Teodorescu 6345, 60
V. Thébault 6283
Gabriela Țițeica . . . 6278, 389
A. I. Varga 6308, 31, 46
N. Vasilescu-Karpen . . . 6279
M. Al. Vasilescu-Stabu . . 6361
I. C. Vasiliu 6294, 342
V. Vasu 6376
E. Wegener 6347
G-l Gh. Zapan 6354

b) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest volum

Aritmetica și Teoria numerelor . . . 5129, 6270, 1, 80, 90, 1, 2, 300, 10, 20, 1, 30, 40, 50, 1, 2, 60, 1, 71, 81
Geometria 6272, 3, 81, 2, 3, 92, 3, 5, 8, 302, 11, 22, 3, 4, 5, 33, 4, 5, 41, 2, 3, 53, 4, 5, 63, 4, 72, 3, 4, 82, 3
Algebra 6274, 84, 5, 97, 303, 4, 13, 5, 7, 26, 31, 2, 7, 44, 5, 56, 7, 67, 8, 75, 6, 7, 84, 5, 6
Trigonometria 6275, 86, 94, 6, 305, 12, 4, 27, 36, 46, 58, 9, 65, 78
Geometria analitică 6276, 7, 88, 98, 306, 7, 16, 8, 28, 9, 38, 9, 47, 8, 62, 6, 79, 87, 8
Mecanica 6278, 9, 89, 309, 19, 69, 80, 9
Analiza și Teoria funcțiilor . . . 6308, 49
Electricitate 6299
Fizica matematică 6390

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
485 [3]	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 [4]	172 (VI), 238 (XVI)	NR
676	148 (VII)	
1000 [5]	220 (IX), 438 „	NR
1056 [6]	100 (XI)	NR
1146 [7]	76 (XII)	NR
1156	100 (XII)	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul și la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacția posedă soluțiuni care nu au fost publicate.

3) Vezi erata pag. 128, Vol. V.

4) Soluția problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai așteaptă discuția la punctele cerute în nota de la finele acelei soluții. A se vedea articolul dela pag. 402, Vol. XLIV.

5) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

6) A se vedea pentru anamorfoză articolul dela pag. 80, Vol. XI.

7) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată, soluția dela pag. 77, Vol. XLVI neräspunzând adevăratei înterpretări a enunțului.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
1367	128 (XIV)	NR
1398	224 „	
1450	352 „	
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1632	159 (XVI)	
1637	160 „	
1650	200 „	150
1676	279 „	
1702	360 „	
1711	399 (XVI) / 372 (XXXI)	
1735 [1])	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	
1764 [2])	120 „	NR
1790	240 „	NR
1823	400 „	405
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1898	199 (XVIII)	
1914 [3])	239 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1945 [4])	320 „	
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	NR
2055	200 „	
2056	200 „	408
2065	239 „	
2070 [5])	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2106	358 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2108	359 (XIX)	
2110	359 „	
2118	399 „	
2133	439 „	
2147	462 „	319
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222 [6])	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2246 [7])	320 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2284	439 „	
2290	439 „	
2301	462 „	
2302	462 „	NR
2311	40 (XXI)	
2338	120 „ / 422 (XXXI)	
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2422	399 „	
2423	399 „	177
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2462	62 (XXII)	
2466	63 „	
2477	95 „	

1) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

2) Pentru definiția momentelor statice polare, a se vedea G. M., Vol. XVII, pag. 87.

3) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

4) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

5) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

6) Pentru calculul determinantului din enunț a se vedea articolul dela pag. 126, Vol. XX și nota dela pag. 172, Vol. XX.

7) Soluția dela pag. 262, Vol. XXI nefiind exactă, se așteaptă o nouă soluție. — Pentru îndrumare a se vedea nota dela pag. 109, Vol. XLVII și observarea dela pag. 112, Vol. XLVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2497	144 (XXII)	
2500	144 „	
2537	287 „	NR
2539	288 „	121
2553	47 (XXIII)	
2569	120 „	
2573	144 „	
2586	216 „	
2591 [1])	240 „	
2593	264 „	
2599	288 „	281
2602 [2])	318 (XXXI)	
2609 [3])	32 (XXIV)	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2645	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2664	24 (XXV)	
2675	63 „	
2684	80 „	
2688	80 „	
2692 [4])	108 „	
2713	143 „	
2731	191 „	320
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	
2778	104 „	
2789	135 „	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	342
2822	216 „	414
2827	247 „	
2850	335 „	
2886	104 (XXVII)	NR
2909	221 „	
2912	222 „	NR
2922	236 „	
2926 [5])	264 „	NR
2936	343 „	NR
2955	416 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3054	360 „	
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3085 [6])	480 „	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3134 [7])	199 „	
3150	240 „	
3161	318 „	NR
3173	358 „	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3249	160 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	NR
3296	359 „	

1) A se vedea punctul 4º pag. 244, Vol. XXXVIII şi punctul 9º pag. 441, Vol. XXXIX.

2) Înlocueşte problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

3) Soluţia dată la pag. 458, Vol. XXXIX nefiind satisfăcătoare, se aşteaptă o nouă soluţie la această problemă.

4) Vezi erata pag. 144, Vol. XXV.

5) Vezi erata pag. 360, Vol. XXXIII.

6) Vezi problema analoagă 3155 rezolvată la pag. 192 Vol. XXXI.

7) A se vedea soluţia parţială dela pag. 254 şi nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3298	359 (XXX)	NR
3304	399 „	NR
3308	400 „	. . . 343
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3320	440 „	
3340	40 (XXXI)	
3389	240 „	
3405	319 „	
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	
3429	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 [1])	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3488	159 „	
3493	160 „	
3495	199 „	
3499	199 „	
3506	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	
3533	320 „	
3535	359 „	NR
3536 [2])	438 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3542	360 (XXXII)	NR
3545	398 „	NR
3551 [3])	39 (XXXIII)	NR
3584	79 „	
3597	120 „	
3607 [4])	159 „	
3620	199 „	
3622 [5])	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	
3632 [6])	279 „	
3640 [7])	280 „	. . 85
3644	319 „	
3653	359 „	NR
3657	359 „	
3658	360 „	
3659	360 „	. . . 415
3660	360 „	
3664	399 „	
3677	440 „	. . . 477
3681 [8])	478 „	
3682	478 „	
3689	480 „	NR
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	. . 247
3700	40 „	NR
3706	79 „	
3713 [9])	119 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3736	200 „	
3749	240 „	
3762	319 „	
3764	319 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3780	360 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	

1) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

2) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.

3) Inlocueşte enunţul dela pag. 399, Vol. XXXII.

4) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.

5) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

6) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

7) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

8) Pentru rezolvare a se vedea articolul dela pag. 161, Vol. XXX şi problema 1128 rezolvată la pag. 306 Vol. XXXV.

9) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3793	439 (XXXIV)	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 [1])	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3844	159 „	NR
3849	160 „	
3853	199 „	
3863	239 „	
3864	239 „	
3867	240 „	
3876	279 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3909	400 „	NR
3934	39 (XXXVI)	
3939	40 „	
3950 [2])	80 „ 246 (XLIX)	
3961 [3])	159 „	
3975	200 „	
3983	238 „	
4010	320 „	
4013	359 „	NR
4022	398 „	322
4028	400 „	
4035	440 „	
4041 [4])	38 (XXXVIII)	
4045	479 (XXXVI) / 142 (XL)	
4053 [5])	39 (XXXVII)	
4056	79 „	
4059	40 „	
4060	40 „	
4067	80 „	351
4074	119 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4075	120 (XXXVII)	
4080	120 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4096	200 „	
4104 [6])	758 (LI)	
4105	240 (XXXVII)	
4107	240 „	
4111 [7])	279 „	
4112	279 „	
4118	280 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	
4148 [8])	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4167	479 „	NR
4169	480 „	
4172	39 (XXXVIII)	
4184	79 „	
4185	79 „	249
4194	119 „	
4199	120 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	
4214	198 „	
4234	279 „	
4236	280 „	
4245	319 „	380
4249	320 „	NR
4250 [9])	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	.86
4256	359 (XXXVIII)	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	
4285 [10])	479 „	

1) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

2) Rezolvată la pag. 246, Vol. XLIX. A se rectifica tabla de materii a Vol. XLIX și următoarele.

3) In tabla de materii Vol. XLIX a fost trecută din eroare ca rezolvată.

4) Inlocuește enunțul dela pag. 479, Vol. XXXVI. A se vedea problema rezolvată la pag. 29, Vol. XXXIX și erata 1) dela pag. 80, Vol. XXXIX.

5) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

6) Inlocuește enunțul de la pag. 239 Vol. XXXVII.

7) Vezi lămuriri la pag. 499, Vol. XLIX.

8) Vezi erata pag. 200, Vol. XXXVIII.

9) Inlocuește problema 4250 dela pag. 480 Vol. XXXVIII.

10) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4287	480 (XXXVIII)	
4289	480 „	
4290 [1])	383 (XXXIX)	NR
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4316	120 „	
4319 [2])	120 „	. . 223
4326	159 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	
4340	200 „	NR
4350	240 „	
4352	286 „	
4356	287 „	
4358	288 „	NR
4360	334 „	
4363	335 „	NR
4370	336 „	
4373	383 „	
4384	431 „	NR
4393	478 „	
4395 [3])	479 „	NR
4402	480 „	
4404	526 „	
4407	527 „	
4411	528 „	
4416	46 (XL)	
4426	48 „	
4435	96 „	
4445	143 „	
4446	143 „	
4449	144 „	
4450	144 „	
4458	191 „	
4468	239 „	
4473	240 „	
4478 [4])	285 „	
4480	286 „	
4484	287 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4486 [5])	288 (XL)	
4487	334 „	NR
4489	334 „	NR
4490	335 „	. . . 123
4492	335 „	NR
4494	336 „	
4496	336 „	
4509	384 „	
4511	430 „	NR
4513	430 „	
4515	431 „	
4520	432 „	
4525	478 „	
4533	480 „	
4534	480 „	NR
4548	573 „	
4553 [6])	574 „	
4557	575 „	
4558	576 „	
4559	116 (XLI)	NR
4560 [7])	116 „	
4561	116 „	NR
4566	118 „	
4568	118 „	
4571	119 „	
4573	119 „	
4576	119 „	
4578	120 „	
4581	166 „	
4587 [8])	262 „	
4590	168 „	
4593	215 „	
4598 [9])	216 „	
4601	216 „	
4603	262 „	NR
4607 [10])	263 „	
4613	264 „	
4614	264 „	NR
4615	310 „	
4620	311 „	
4625	312 „	

1) Inlocueşte problema 4290 dela pag. 380 Vol. XXXVIII.

2) Vezi articolul dela pag. 25, Vol. LII.

3) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

4) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

5) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

6) *I s'a dat o soluţie* la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302., Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei, pentru cazul p şi q imaginari.

7) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

8) Inlocueşte problema 4587 dela pag. 168, Vol. XLI.

9) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

10) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4631	359 (XLI)	
4634	360 „	
4637	360 „	
4638 [1])	360 „	
4640	406 „	
4641	407 „	
4644	407 „	
4647	408 „	
4657	454 „	
4660	455 „	NR
4664 [2])	503 „	
4670	504 „	
4672	504 „	
4673	504 „	153
4683	551 „	
4685 [3])	552 „	
4686	552 „	NR
4688	598 „	
4690	598 „	
4695	600 „	252
4696	600 „	NR
4698	600 „	NR
4703	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4726	110 „	
4729	111 „	
4731 [4])	112 „	
4734	112 „	
4741	167 „	
4742	167 „	
4753	223 „	
4755	224 „	
4765	279 „	
4768	280 „	
4770	280 „	
4772	334 „	
4779	336 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4780	336 (XLII)	
4783	390 „	
4785	390 „	
4788 [5])	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4793	392 „	
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	
4815	504 „	
4817	504 „	
4821	558 „	
4825	559 „	
4826	559 „	
4836	615 „	
4839 [6])	616 „	NR
4840	616 „	
4848	671 „	
4849	671 „	
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	
4866	56 „	
4870	110 „	
4880	166 „	
4889	168 „	
4894	222 „	
4897	223 „	
4898	223 „	
4901	224 „	NR
4909	279 „	
4913	280 „	NR
4914 [7])	501 (XLV)	
4917	334 (XLIII)	
4922 [8])	335 „	NR
4923	335 „	
4928	390 „	
4929 [9])	390 „	NR
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4944	447 „	

1) A se vedea şi articolele dela pag. 288 şi 401, vol. XXXVIII.

2) A se vedea şi problema analoagă 5762 rezolvată la pag. 476, Vol. XLVIII.

3) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

4) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

5) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

6) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

7) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

8) A se vedea şi articolul dela pag. 286, Vol. XLII.

9) Numărul problemei rezolvate la pag. 494 este 4926 iar nu 4929.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4946	447 (XLIII)	
4949 [1])	448 „	NR
4953 [2])	614 „	NR
4954	502 „	
4955	503 „	
4958	503 „	
4967	559 „	
4968	559 „	253
4969	559 „	
4973	560 „	
4974	560 „	
4977	614 „	
4981	615 „	
4984	616 „	
4991 [3])	102 (XLVII)	
4992	671 (XLIII)	
4993	671 „	
4995	671 „	
4997	672 „	
5002	54 (XLIV)	
5006	55 „	
5009	55 „	NR
5010	56 „	
5012	56 „	
5013	56 „	
5016	109 „	
5021	110 „	
5022	111 „	
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	
5030	166 „	
5031	166 „	
5033	166 „	
5034	167 „	
5037	167 „	NR
5040	168 „	
5043	168 „	NR
5046	222 „	
5051	223 „	
5053	223 „	NR
5059	277 „	
5060	277 „	
5064	278 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5068	278 (XLIV)	
5069	279 „	
5072	280 „	
5073 [4])	280 „	
5074	334 „	
5075 [5])	335 „	
5076	335 „	
5079	335 „	
5082	335 „	
5085	336 „	NR
5086	336 „	
5091	390 „	
5092	390 „	
5093	390 „	
5094	391 „	NR
5106	445 „	
5110	446 „	
5111	446 „	
5117	448 „	
5121	501 „	
5123	501 „	
5126	502 „	
5127	502 „	NR
5129 [6])	262 (LII)	
5130	503 (XLIV)	
5136	558 „	
5137	558 „	
5138	559 „	
5139	559 „	
5140	559 „	
5142	559 „	353
5144	560 „	
5145	560 „	
5146	560 „	
5158	615 „	
5161	616 „	
5162 [7])	616 „	
5167	669 „	
5169	670 „	
5170	670 „	
5173	671 „	
5177	672 „	
5178	672 „	NR
5182	53 (XLV)	

1) A se vedea punctul IV al articolului de la pag. 568, Vol. XLVI.

2) I s'a modificat enunțul dela pag. 502, Vol. XLIII.

3) Inlocuește problema 4991, propusă la pag. 670, Vol. XLVI. A se vedea și erata dela pag. 152, Vol. XLVII.

4) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

5) Vezi erata pag. 392. Vol. XLIV.

6) Inlocuește enunțul dela pag. 503, Vol. XLIX.

7) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5183	53 (XLV)	
5184	54 „	NR
5192	55 „	
5196 [1])	109 „	NR
5197 [2])	110 „	
5204	111 „	
5205	111 „	
5206	111 „	
5209	112 „	
5212	166 „	NR
5216	167 „	
5217	167 „	
5220	168 „	NR
5226	221 „	
5227	221 „	254
5230	221 „	NR
5236	223 „	
5245	278 „	
5248	279 „	NR
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5258	334 „	
5261	334 „	
5262 [3])	334 „	
5267	335 „	223
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5284	392 „	NR
5286	392 „	178
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5294	447 „	
5295	447 „	NR
5296	447 „	380
5309	503 „	
5312	503 „	
5322	558 „	
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	
5332	613 „	154
5333	613 „	
5334	614 „	
5335	614 „	
5342	615 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5343	616 (XLV)	
5344	616 „	NR
5349	670 „	NR
5351	670 „	
5354	671 „	
5355	671 „	281
5357	671 „	NR
5358	671 „	
5360	672 „	NR
5366	54 „	
5367	54 „	
5370	55 „	NR
5371	55 „	
5376	56 „	NR
5380 [4])	110 „	
5381 [5])	110 „	
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5388	112 „	NR
5395	166 „	155
5397	166 „	
5405	168 „	NR
5408	221 „	NR
5410	222 „	
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5416	223 „	
5419	224 „	
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5425	278 „	NR
5426 [6])	389 „	
5427	278 „	
5429	279 „	
5430	279 „	
5432	280 „	
5433	280 „	284
5435	280 „	
5440	334 „	
5441	334 „	
5443	335 „	
5448	336 „	NR
5449	336 „	
5450	336 „	383
5456	390 (XLVI)	
5458	390 „	

1) A se vedea Vol. XLIX pag. 701, soluția problemei 5716 analoagă cu 5196.
2) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.
3) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.
4) Vezi erata pag. 168, Vol. XLVI.
5) Vezi complectarea enunțului la pag. 248, Vol. XLVII.
6) Inlocueşte problema 5426 dela pag. 278, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5459	391 (XLVI)	
5460	391 „	180
5462	391 „	
5465	392 „	
5466	392 „	NR
5467	445 „	
5470	446 „	NR
5472	446 „	NR
5478	447 „	
5479	448 „	NR
5481	448 „	NR
5484	503 „	NR
5485 [1])	503 „	
5487	503 „	
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	
5492	504 „	
5493	504 „	
5494	504 „	
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	
5500	558 „	
5503	558 „	
5506	559 „	
5508	560 „	
5509	560 „	
5512	614 „	
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	
5520	616 „	
5521 [2])	616 „	
5522	616 „	
5524	616 „	
5525	616 „	
5527	664 „	
5528	669 „	NR
5534	670 „	
5539	671 „	
5542	54 (XLVII)	NR
5545	54 „	
5547	55 „	
5551	55 „	
5558	102 „	
5560	103 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost Propusă	Rezolvată
5561	103 (XLVII)	
5563 [3])	103 „	
5564	103 „	
5567	104 „	
5568	104 „	NR
5571	150 „	
5572	151 „	
5573	151 „	182
5574	151 „	
5576	151 „	
5577	152 „	
5578	152 „	
5581	199 „	
5582	199 „	NR
5585	199 „	
5589	200 „	
5591	200 „	
5593	246 „	
5595	246 „	
5596	247 „	
5597	247 „	
5598	247 „	
5599	247 „	
5600	247 „	
5601	248 „	
5607	204 „	
5608	294 „	
5609	295 „	
5612	295 „	290
5616	296 „	
5619	342 „	
5620	342 „	157
5621	343 „	
5623	343 „	
5624	343 „	
5625	343 „	
5633	390 „	
5934	390 „	
5635	391 „	
5636	391 „	
5639	392 „	
5643	438 „	
5646	439 „	
5647	439 „	NR
5649	439 „	
5650	439 „	
5651	440 „	NR
5655	486 „	NR
5658	486 „	

1) Vezi erata dela pag. 560, Vol. XLVI.
2) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.
3) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5662	487 (XLVII)	
5663	488 „	
5664	488 „	
5668	533 „	NR
5670	534 „	
5671	534 „	NR
5672	534 „	NR
5673	534 „	
5674	535 „	
5677 [1])	536 „	
5678	536 „	NR
5680	582 „	
5681	582 „	
5682	582 „	NR
5683	583 „	
5687	583 „	
5690	584 „	NR
5693	46 (XLVIII)	
5696	47 „	
5697	47 „	
5699	48 „	256
5700	48 „	
5701	48 „	125
5704	93 „	
5707	94 „	
5708	94 „	43
5709	94 „	NR
5712	95 „	
5713	96 „	NR
5719	143 „	
5724	144 „	44
5728	190 „	NR
5731	191 „	NR
5732	191 „	160
5733 [2])	191 „	
5734 [3])	191 „	
5735	192 „	
5736 [4])	525 „	NR
5737 [5])	192 „	NR
5738	192 „	NR
5739	238 „	
5740	238 „	
5742	238 „	NR
5743	238 „	
5744	238 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5745	239 (XLVIII)	
5746	539 „	NR
5748	240 „	NR
5749	240 „	NR
5751	286 „	NR
5752	286 „	
5757	287 „	
5758	287 „	
5759 [6])	288 „	NR
5764	334 „	
5765	334 „	
5766 [7])	335 „	NR
5767	335 „	
5770	335 „	
5771	336 „	
5772	336 „	88
5777	381 „	NR
5779	382 „	
5780	382 „	NR
5782	383 „	
5783	383 „	
5784	384 „	
5787	384 „	NR
5789	430 „	
5792	431 „	
5795	431 „	NR
5797	432 „	161
5799	432 „	NR
5803	478 „	
5805	479 „	
5806	479 „	NR
5807	479 „	
5808	479 „	
5809	479 „	NR
5813	526 „	
5814	526 „	NR
5816	526 „	NR
5817	526 „	
5818	527 „	NR
5819	527 „	
5820	527 „	NR
5821	528 „	NR
5822	528 „	
5823	528 „	NR
5824	528 „	

1) Vezi erata dela pag. 584, Vol. XLVII.

2) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.

3) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.

4) Inlocueşte enunţul dela pag. 192, Vol. XLVIII.

5) Vezi erata dela pag. 288, Vol. XLVIII.

6) Vezi erata pag. 384, Vol. XLVIII. Un caz particular este problema 2545 rezolvită la pag. 174 Vol. XLIX.

7) O problemă analoagă este problema 4357, rezolvată la pag. 693, Vol. XLIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5826	575 (XLVIII)	
5829	575 „	NR
5830	575 „	
5834	576 „	
5835	576 „	
5838	54 (XLIX)	
5839	55 „	
5841	55 „	
5843	55 „	
5844	56 „	
5845	56 „	
5846	56 „	
5847	56 „	
5848	56 „	
5850	110 „	
5851	110 „	99
5852	110 „	
5853	110 „	NR
5854	111 „	
5855	111 „	
5858	112 „	NR
5859	112 „	
5860	198 „	
5861	198 „	
5863	198 „	NR
5864	198 „	
5866	199 „	NR
5867	199 „	
5868	199 „	
5869	199 „	
5871	200 „	
5873	200 „	
5876	264 „	
5878	265 „	
5880	265 „	
5881	265 „	
5882	266 „	
5883	266 „	
5884	266 „	
5886	267 „	127
5887	267 „	
5889	267 „	
5890	321 „	
5892	322 „	NR
5893 [1]	376 „	
5895	322 „	
5897	322 „	
5900	323 „	
5901	323 „	NR
5902	324 „	
5903	324 „	
5907	377 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5908	377 (XLIX)	
5910	377 „	NR
5911	378 „	
5912	378 „	354
5914	378 „	
5915	379 „	
5918	379 „	
5922	460 „	
5923	461 „	NR
5924	461 „	
5925	461 „	
5927	462 „	
5928	462 „	
5929	462 „	
5930	463 „	
5932	464 „	NR
5933	464 „	
5935	533 „	NR
5936	533 „	
5938	534 „	
5939	534 „	
5941	534 „	
5942	534 „	
5943	535 „	
5944	535 „	
5945	535 „	
5946	535 „	NR
5947	535 „	
5948	535 „	
5950	589 „	
5951	589 „	
5952	590 „	
5953	590 „	
5955	590 „	
5957	590 „	
5958	591 „	
5960	591 „	
5962	591 „	
5963	592 „	NR
5964	592 „	
5966	650 „	
5967	650 „	
5968	650 „	
5969	650 „	
5970	650 „	
5972	651 „	45
5974	651 „	
5975	651 „	
5977	651 „	NR
5978	652 „	NR
5979	652 „	NR
5980	705 „	

1) Completează enunțul dela pag. 322, Vol. XLIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5982	706 (XLIX)	
5983	706 „	
5984	706 „	
5985	707 „	
5986	707 „	
5988	707 „	
5989	707 „	NR
5990	707 „	
5991	708 „	
5992	708 „	
5993	708 „	46
5994	708 „	NR
5995	762 „	
5996 [1])	762 „	
5997	763 „	
5998	763 „	NR
5999	763 „	
6000	763 „	
6001	764 „	
6003	764 „	NR
6004	764 „	
6005	764 „	
6006	53 (L)	
6007	53 „	
6008	53 „	
6010	54 „	NR
6012	54 „	
6014	55 „	NR
6016	55 „	
6017	56 „	
6018	56 „	
6021	110 „	
6022	110 „	NR
6023	110 „	NR
6024	110 „	
6025	110 „	
6027 [2])	111 „	
6028	111 „	
6030	111 „	
6031	112 „	
6032	112 „	NR
6033	112 „	
6034	112 „	NR
6035	112 „	
6036	112 „	
6037	165 „	
6038	165 „	NR
6039	165 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6040	166 (L)	
6041	166 „	
6042	166 „	
6043	166 „	
6044	166 „	
6045	167 „	
6048	167 „	
6050	168 „	
6051	205 „	
6052	205 „	
6053	205 „	
6054	205 „	
6055 [3])	238 „	
6056	238 „	
6057 [4])	206 „	
6058	206 „	
6059	206 „	
6061	207 „	
6064	208 „	NR
6065	208 „	
6066	238 „	.355
6069	239 „	
6070	239 „	.386
6071	239 „	
6072	239 „	
6074	240 „	
6075	270 „	
6076	270 „	
6077	270 „	
6078	270 „	
6080	272 „	
6081	272 „	
6083	272 „	
6084	303 „	
6085	303 „	
6088	304 „	
6091	304 „	
6092	304 „	57
6093	334 „	
6094	334 „	
6095 [5])	335 „	NR
6097	336 „	
6098	336 „	
6099	336 „	
6100	336 „	.291
6101	336 „	
6102	366 „	
6103	367 „	NR

1) A se vedea problema analoagă 2865 rezolvată la pag. 392 Vol L.
2) A se vedea Gazeta Matematică pag. 280, Vol. XLVIII şi pag. 70 Vol. LI.
3) Inlocueşte enunţul dela pag. 205, Vol. L.
4) A se vedea articolul dela pag. 109, Vol. LI.
5) Vezi şi nota matematică dela pag, 313, Vol. LI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6104	367 (L)	. . .185
6105 [1])	406 „	
6106	367 „	
6107	368 „	
6108	368 „	NR
6109	368 „	. . . 416
6110	368 „	
6111	368 „	
6112	406 „	. . 99
6113	406 „	NR
6114 [2])	302 (LI)	NR
6115	407 (L)	. . .129
6116	407 „	
6118	408 „	NR
6119	408 „	NR
6120	446 „	
6121	446 „	
6123	447 „	
6126	448 „	NR
6127	448 „	NR
6128 [3])	448 „	
6129	487 „	
6130	487 „	
6131	487 „	
6132	487 „	
6133	488 „	
6134	488 „	
6135	488 „	
6136	488 „	
6138	242 (LI)	NR
6139	243 „	. . .388
6140	243 „	
6141	243 „	
6142	243 „	NR
6143	243 „	
6144	244 „	
6145	244 „	
6146	244 „	
6147	244 „	. . .186
6148 [4])	245 „	
6149	245 „	
6150	245 „	RN
6152	246 „	
6153	246 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6155	247 (LI)	. . .417
6156	247 „	
6157	247 „	. . .226
6158	248 „	
6159 [5])	248 „	
6160	302 „	
6161	302 „	NR
6162	302 „	
6163	302 „	
6164	303 „	NR
6165 [6])	342 „	
6166 [7])	303 „	. . .189
6167	303 „	
6168	304 „	
6169	304 „	NR
6170	343 „	NR
6171	343 „	
6172	343 „	
6173	343 „	
6174	343 „	
6175 [8])	344 „	
6176	344 „	
6177	344 „	. . .164
6178	344 „	. . . 59
6179	375 „	NR
6180	375 „	NR
6181	375 „	
6182	375 „	
6184	375 „	. . .190
6185	375 „	
6186	376 „	
6187	376 „	. . 228
6188	376 „	NR
6189	405 „	
6190	405 „	
6191	406 „	
6192	406 „	
6193	406 „	
6194	406 „	. . .131
6195	406 „	
6196	407 „	NR
6198	409 „	NR
6199	582 „	
6200	582 „	

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 367, Vol L.
2) Inlocueşte enunţul dela pag. 407 Vol. L.
3) Vezi erata dela pag. 488, Vol. L.
4) Vezi erata dela pag. 303, Vol. LI.
5) Vezi erata dela pag. 624, Vol. LI.
6) Inlocueşte enunţul dela pag. 303, Vol. LI.
7) Vezi erata dela pag. 376, Vol. LI.
8) Vezi erata dela pag. 376, Vol. LI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6201	582 (LI)	
6202	583 „	
6203	583 „	419
6204	583 „	
6205	583 „	
6206	583 „	229
6207	583 „	
6208	584 „	
6209	584 „	
6210	584 „	190
6211	618 „	
6212	619 „	NR
6213	619 „	
6214	619 „	NR
6215	619 „	
6216	619 „	258
6217	619 „	NR
6218 [1])	620 „	
6219	620 „	192
6220	655 „	NR
6221	655 „	
6222	655 „	
6223 [2])	814 „	
6224	655 „	NR
6225	656 „	133
6226	656 „	
6227	656 „	
6228	656 „	
6229	656 „	NR
6230	689 „	
6231	689 „	
6232	690 „	
6233	690 „	
6234	690 „	
6235	690 „	
6236	691 „	
6237	691 „	NR
6238	691 „	194
6239 [3])	692 „	NR
6240	692 „	
6241	692 „	NR
6242	727 „	NR
6243	727 „	
6244	727 „	
6245	727 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6246	727 (LI)	NR
6247	728 „	
6248	728 „	
6249 [4])	728 „	
6250	728 „	
6251	728 „	195
6252	759 „	
6253	759 „	
6254	759 „	
6255	759 „	
6256	760 „	NR
6257	760 „	
6258	760 „	
6259	760 „	NR
6260	814 „	
6261	814 „	NR
6262	814 „	
6263	814 „	
6264	814 „	
6265	815 „	
6266	815 „	NR
6267	816 „	261
6268	816 „	
6269	816 „	
6270	62 (LII)	323
6271	62 „	
6272	62 „	
6273	63 „	
6274	63 „	NR
6275	63 „	NR
6276	63 „	NR
6277	64 „	NR
6278	64 „	
6279	64 „	
6280	102 „	
6281	102 „	
6282	102 „	
6283	103 „	NR
6284	103 „	NR
6285	104 „	
6286	104 „	
6287	104 „	
6288	104 „	
6289 [5])	134 „	
6290 [6])	134 „	

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 655, Vol. LI.
2) Vezi erata dela pag. 728, Vol. LI.
3) Vezi erata pag. 816, Vol. LI.
4) A se vedea soluţia dela pag. 76, Vol. LII.
5) Inlocueşte enunţul dela pag. 104, Vol. LII.
6) A se vedea erata dela pag. 232, Vol. LII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6291	134 (LII)	NR
6292 [1])	167 „	
6293	135 „	
6294	135 „	
6295	135 „	
6296	136 „	
6297	137 „	
6298 [2])	262 „	
6299	137 „	NR
6300	166 „	
6301	167 „	NR
6302	167 „	NR
6303	167 „	
6304	167 „	
6305	167 „	
6306	168 „	NR
6307	168 „	NR
6308	168 „	NR
6309	168 „	
6310	198 „	
6311	198 „	
6312	198 „	
6313	198 „	NR
6314 [3])	199 „	
6315	199 „	
6316	199 „	NR
6317	200 „	NR
6318	200 „	NR
6319	200 „	
6320	230 „	NR
6321	230 „	NR
6322	230 „	NR
6323	231 „	
6324	231 „	
6325 [4])	326 „	
6326	232 „	NR
6327	232 „	
6328	232 „	
6329	232 „	NR
6330	232 „	
6331	262 „	
6332	262 „	NR
6333	263 „	NR
6334	263 „	
6335	263 „	
6336	263 „	
6337	264 „	NR
6338	264 „	
6339	264 „	NR
6340	295 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6341	295 (LII)	
6342	295 „	NR
6343	295 „	
6344 [5])	295 „	NR
6345	296 „	
6346	296 „	
6347	296 „	
6348	296 „	NR
6349	296 „	
6350	326 „	
6351	326 „	NR
6352	327 „	NR
6353	327 „	
6354	327 „	
6355	327 „	
6356	328 „	
6357	328 „	
6358	328 „	NR
6359	328 „	NR
6360	358 „	NR
6361	358 „	NR
6362	358 „	NR
6363	358 „	NR
6364	358 „	NR
6365	359 „	NR
6366	359 „	
6367	360 „	NR
6368	360 „	NR
6369	360 „	
6370	360 „	NR
6371	390 „	NR
6372	390 „	NR
6373	390 „	NR
6374	390 „	NR
6375	391 „	NR
6376	391 „	NR
6377	392 „	NR
6378	392 „	NR
6379	392 „	NR
6380	396 „	NR
6381	422 „	NR
6382	422 „	NR
6383	422 „	NR
6384	422 „	NR
6385	423 „	NR
6386	423 „	NR
6387	424 „	NR
6388	424 „	NR
6389	424 „	NR
6390	424 „	NR

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 134, Vol. LII.
2) Inlocueşte enunţul dela pag. 137, Vol. LII.
3) A se vedea erata dela pag. 232, Vol. LII.
4) Inlocueşte enunţul dela pag. 231, Vol. LII.
5) Pentru rezolvare a se vedea articolul dela pag. 393, Vol. LII.

I. EXERCIŢII [1])

1. Repartizarea exerciţiilor pe materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 1(61), 10(165), 11(165), 16(262), 17(293), 22(324), 29(356), 30(356), 34(389), 38(421).
Geometria . . . . . 2(61), 6(101), 24(324), 25(324), 38(421).
Algebra . . . . . 3(62), 5(101), 13(197), 14 [2])(197), 18(293), 26(325), 31(357), 32(357), 35(420).
Trigonometria . . . . . 4(100), 7(102), 9(133), 12(166), 19(293), 20(293), 21(293), 27 [3])(315), 33(357), 36(420), 37(420), 39(421).
Analiza şi Teoria funcţiilor 28 [2])(326).

1. Repartizarea exerciţiilor pe autori

M. Adam 13
I. A. Barbu 19
Ilie N. Constantinescu . . 24, 39
M. R. Constantinescu . . . 34, 37
C. Corduneanu 27, 38
P. P. Drăghicescu 2
I. B. Florescu 30
V. Ghiţescu 3, 5
E. St. Iacob 4, 6, 10, 32, 35, 36
M. G. Iosifescu 20
Em. Marinescu 40
Al. Gh. Moraite 9
I. I. Novac 33
Th. Oniga 41
I. N. Pisanca 23
M. D. Popa 15, 25
Sofronie Ştefănescu 17
T. Stoicescu 7, 11, 16, 22
I. St. Teodorescu 21
P. P. Teodorcscu . . . 12, 26, 31
Al. I. Ţigănoiu 18
M. Al. Vasiliu-Stabu . . . 1, 29
E. Wegener 14, 28

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 25, 85, 121, 320.
Abel 313.
Abramescu N., 6, 64, 88, 89, 90, 98, 127, 233, 234, 235, 236, 237, 245, 279.
Adam M., 6, 197, 198, 219, 295, 360, 400.
Adams, 120.
Agârbiceanu I., 246.
Agronomof N., 361.
Alaci V., 6, 42, 83, 160, 176, 221, 279, 315, 338.
Alaudo, 105.
Albescu C. N., 6.
Aldea V. Minea, 254.
Aldea N. N., 6.
Alexandrescu Octav, 6.
Alexiu I., 6.
Almăjanu P., 377.
Amărăşteanu F. M., 6.
Anaxagora, 84.
Andonie Gh. 6.
Andreescu M., 161.
Andrei Şt., 6.
Andrei A. Şt., 212.
Andrievici N., 155.
Andronescu Pl. 6.
Andronic I., 155.
Angelescu A., 235, 299.
Angheluţă Th., 5, 6, 25, 26, 39, 167, 169, 170, 199, 217, 219, 222, 223, 231, 245, 290, 349, 351, 380, 381, 393, 395, 399.
Aniţescu N., 6.
Antonescu Filofteia, 6.
Antoni P. C., 338.
Antoniu Corn, 6.
Antoniu S. I., 5, 6, 35, 66, 145, 241, 297, 304, 318, 333.
Apăteanu Camil, 246.
Apert R., 314.
Apolonius, 79.
Appel, 317.
Arghiriade Em., 6.
Aristot, 84.
Armean Ion, 7.
Armeanca I., 7.
Atanasiu Marcel, 7.
August M., 246.
Avram N. C., 221, 246.
Avramescu A., 7, 136.
Avramescu C., 7.

Bachmann P., 151.
Bădescu Em. Aurel, 7.

1) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exerciţiul al cărui număr precede paranteza).

2) Vezi erata la pag. 360.

3) A se vedea rectificarea în nota dela pag. 276

Bădescu A. L., 7.
Bădescu R., 7, 262.
Bădilă I., 377.
Bădulescu Alexandra, 7, 297.
Bădulescu I. Vasile, 7.
Baidaff Ig. B., 7.
Băghină V. V., 212, 300.
Băiatu D., 246.
Bajardi J-de 149.
Bălan G. Şt., 7.
Bălan E., 7.
Banciu I., 25.
Baran Fr., 7.
Bănescu N., 176.
Barbaiani A. M., 100, 185, 189.
Barbălat B., 7, 134, 166, 264.
Barbély S., 221.
Barbilian D., 7, 105, 245,
Barbu A. I., 100, 121, 164, 190, 198, 261, 293, 323.
Bărbulescu Mihail, 246.
Bărbulescu C. V., 419.
Barisien N. E., 405, 408.
Bârsu I. T., 321.
Bârzescu C. Al., 229.
Bârzotescu A., 189.
Bassake, 148.
Bayar [1]), 148.
Bayard [1]), G., 148. 149.
Bayard [1]), G., 148, 149.
Bazacov Gh., 7.
Bedreag C. C., 42.
Bedreag C. M., 253.
Beleş E. Ion, 246.
Belgodère P., 315.
Belian R., 320.
Beneş I., 377.
Beneş P., 7.
Benneton G., 314.
Bercovici Martin, 7.
Berdan C., 35, 231, 249, 355, 388.
Bernouilli, 264, 326.
Beschea R., 189.
Binet, 245, 341.
Bite P., 337
Blaha N., 206.
Blichfeldt, 315.
Bodnărescu M. H., 106.
Boerescu N. C., 130, 131, 135, 164, 189, 194, 196, 226, 230, 261, 389, 390, 419.
Bogdan P. C., 314.
Bogdan A. N., 148.
Boiangiu D. D., 149, 323.
Boldur E., 314.
Borbély V. S., 278, 337.
Borneanu G., 7.
Borş C., 246.
Boţan V. N., 314, 338.
Botea G. Em., 8, 172
Botez Gustav, 8.
Botez Şt. M., 8, 148, 279, 280, 314.
Bouligand G., 222.
Bourlet, 147.
Bouvaist R., 121, 305.
Bouvard, 120.
Braşoveanu D. G., 59, 100, 190 228, 356.
Bratu Gh., 25, 235.
Bratu I. Mariana, 8. 36, 297.
Brenner N. A., 8.
Brocard, 139, 140, 141, 185.
Broglie Louis de, 143.
Bruckner V., 25.
Bucurescu I. Lt. C-dor, 8.
Budeanu I. C., 8.
Buicliu Gh. G-l., 5, 8, 57, 59, 62, 88, 104, 131, 134, 167, 198, 222, 223, 229, 230, 241, 249, 252, 262, 295, 297, 304, 315, 321, 323, 327, 356, 358, 388, 390, 408, 422.
Bujoreanu N., 8.
Bunescu D. A., 5, 8, 38, 116, 153, 276, 297, 401.
Bunescu D. E., 8.
Bungescu I. Col., 8.
Bungeţeanu Preduţa, 22.
Burada T., 149.
Buradescu T., 8,
Burghele C., 42,
Burichovici A., 415.
Burileanu Şt. G-l., 8.
Burlacu E., 38.
Buşilă Ad., 8.
Buşilă D. C., 8.
Buşilă G. I., 25.
Buznea D. D., 354.
Buzuloiu C. V., 212.

Călăşiţa I. Mioara, 212.
Calinicenco N., 314, 338.
Călinescu Valentin, 246.
Calistru C, 314.
Câlniceanu Gh., 246.
Cambureanu V. A., 246.
Cambureanu V. D., 8, 36.
Cambureanu V. V., 8.
Canciu Gh., 19.
Cantuniar I. Cr., 100, 164, 180, 181, 182, 189, 355.
Cantuniar I., 246.
Căpraru I., 419.
Capriel I., 9, 36.
Caracostea D. A., 9.
Caracudovici Florica, 9.
Caracudovici Margareta, 297.
Carafoli E., 9, 144.
Caramalău V. E., 174, 401.
Caraman E., 9.
Caranfil G. N., 9.
Cârlănescu C., 9.
Carnot Sadi, 338.
Cârstea S. M., 356.
Cârstoiu I., 144.
Cartianu Gh., 9.
Cassian Gh. G-l. 9.
Cauchy, 119, 245, 415.
Cayley, 119.
Cazacu N. C., 9.
Cazanacli V. P., 9.
Ceauşescu F. V., 9, 88, 380,
Cernescu A. N., 213.
Cernescu A. P., 212, 299, 377.
Cesaro, 349.
Cetăţeanu St., 9, 155, 254, 354.
Ceva J., 78.
Chabanty C., 313.
Chatelet A, 313.
Chefneux, 149.
Cheleş E., 9.
Chevalier A., 117.
Chiellini A., 207, 212.
Chiraleu S. I., 355.
Chiriac C., 129.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9.
Chiţulescu I. I., 9, 297, 311.
Choquet G., 313.
Cioc M., 9.
Ciochină N. I., 314.
Ciolănescu Ion, 246.
Ciorănescu C., 297.
Ciorănescu I. N., 5, 10, 243, 245, 297, 322.
Ciorapciu F. M., 9.
Claudian V., 5, 10, 63, 168,

1) Acelaşi cu *Bajardi J.* de

232, 264, 296, 297, 327, 359, 392, 402, 423.
Climescu C. Al., 10, 314.
Coatu C., 10.
Cocea Gh. Th., 190.
Codreanu Şt., 177.
Columbeanu D. P., 59, 100, 133, 226, 416.
Columbescu D. P., 280.
Comberousse Ch., 139.
Combette E., 342.
Comşa C., 133.
Constant., 377.
Constantin Cel Mare, 377.
Constanţie 377.
ConstantinescuGeorgelng. 10.
Constantinescu Gh.Gh., 10, 154, 403.
Constantinescu N. Ilie, 59, 220, 228, 324, 421.
Constantinescu R. M., 33, 34, 59, 100, 129, 135, 155, 159, 164, 186, 190, 195, 226, 228, 248, 257, 261, 275, 276, 323, 355, 356, 389, 405, 408, 419, 420.
Constantinescu N. N. 246.
Constantinescu Paul, 129, 189, 192, 213, 228, 261,
Constantinescu Paulina, 246.
Constantinescu T., 10.
Constantinescu G. Virgil, 189, 194, 213, 228, 229, 323, 389, 416.
Constantinescu Gh. Virgiliu, 212.
Constantinescu Z., 10.
Corbeanu Şt., 232.
Corduneanu C. C., 59, 100, 129, 195, 213, 228, 261, 298, 325, 377, 389, 421.
Coriolis, 83, 84, 315, 367.
Coşereanu N. I., 10.
Coşniţă C., 102, 168, 222, 230, 360, 362.
Costăchescu V.C.Lt.C-dor, 10. 35, 392.
Costache Nicolae, 246.
Costescu G., 84.
Costinescu D., 10.
Cotariu D. M., 33, 100, 318, 323,
Crăcea I. D., 213, 228, 229, 323, 389, 419.
Crăciuneanu C. Lt. C-dor, 10.
Crăciunescu Em., 264.
Crăciunescu Mioara, 10.
Creangă I., 10.
Cremona, 339.
Crintea M., 133.
Cristescu Iulia, 105.
Cristescu V., 150, 228, 234, 299, 361.
Cubat H. A., 161.
Cumea [1], 84.
Curea J., 245.

Dabija Fl. Emil, 212, 300,
D'Alembert, 60, 83, 303.
Daniil Mitropolit, 84.
Danilă T., 246, 405.
Darboux G., 236, 245.
Darmois G., 314.
Dăscălescu Hr., 10, 35.
Davidescu Ana, 10.
Deac C., 155.
Debever R., 314.
Delange H., 313.
Delaunay, 119.
Delphea [1], 84.
Denjoy A., 363.
Desargues, 329, 332,
Descartes, 35, 126, 246.
Dezsö L., 278.
Diaconescu C. C., 59.
Diaconescu V. C. G-l, 377.
Diaconescu A. I., 212.
Diaconescu D. I., 10
Diaconu C. C., 190, 185, 190, 356.
Diaconu G. V., 59, 100, 129, 213, 228, 261, 323, 389.
Dieudonné J., 313.
Dimitriu Anton, 33.
Dinescu P. Al., 11.
Dini, 314.
Dirichilet, 118, 245, 313.
Dobrescu D. Andrei, 5, 11, 99, 104, 172, 200, 261.
Dobrescu D. Paul, 11, 88.
Dodu A. E., 323.
Donciu T. N., 11.
Doneaud E. André, 189, 213, 229, 389, 419.
Donţu G. G., 291.
Drăgan M., 245, 338.
Drăghicescu Elena, 46.
Drăghicescu P. P., 34, 44, 45, 61, 88, 102, 117, 129, 183, 223, 241, 249, 263, 283, 289, 295, 323, 355, 365, 380, 383.
Dragomir I, Dan Vladimir, 212.
Dragomirescu - Buzne Ed. 11, 38.
Drâmbă C., 245.
Drăniceanu Eugenia, 11.
Drosescu Gh. I., 11.
Duhamel, 143.
Dulfu P., 320.
Dumas M., 314.
Dumitrescu Ad., 133.
Dumitrescu Arghir D., 11, 86.
Dumitrescu I. Gh., 11.
Dumitrescu C. I., 11.
Dumitrescu Gh. M., 221.
Dumitrescu N., 246.
Dumitrescu F. Sorin, 100, 189.
Dumitrescu I. Teodor, 11.
Dumitrescu Valeriu, 229.
Dumitrescu C. I. Călin, 228, 254.
Dumitriu C. I., 237.

Eckstein V., 252, 253.
Eddington, 316.
Eftimie D. C., 157, 254, 377, 383, 385.
Eftode M. Ad., 133, 190, 192, 194, 212.
Einstein, 278, 376.
Emilian St. D., 42
Emmerich, 105.
Empedocle, 84.
Enăchescu Gr. I., 161.
Enescu George, 323.
Enescu G. Ionel, 247.
Enulescu O., 281.
Euclide, 145.
Euler, 29, 30, 31, 46, 56, 142, 147, 246, 260, 261, 304, 317.

Făcăoaru Gh. I., 212, 300.
Fanciotti F. Gh., 189, 195, 229, 419.

1) *Sibila.*

Făgărăşeanu M., 133.
Farcaş T., 338.
Fatou P., 317.
Felix C. G-l, 11.
Fényes I., 278, 337.
Fermat, 389.
Ferrand Jacqueline, 313.
Feuerbach, 30.
Fibonacci, 343, 390.
Fichera G., 314.
Fila E., 278.
Fila J., 221.
Filimon Fl. I., 100.
Finţescu Al., 342.
Firescu Gr. Şt., 133, 228, 419.
Flexi Cusută Sofia, 11.
Florescu V. E., 212.
Florescu B. I., 167, 200, 230, 298, 326, 342, 351, 356.
Florescu M. U., 11.
Florescu L. V., 252.
Florian P., 133.
Florian Z., 25.
Focşa Vladimir, 11.
Focşeneanu I. M. Lt. Col., 5, 11, 123.
Fortunescu C. D., 189, 228.
Fotino Sc., 298, 299, 330.
Fourier, 118, 315.
Francu D., 11.
Frechet M., 314.
Fundăţeanu C. I., 25.

Gabriel Marie, Frère (F. G. M.), 128, 129, 139, 166, 185, 325.
Gabrielescu R., 11, 36.
Gafencu Rodica, 11.
Gaiu Gh. N., 12, 27, 297.
Galbură Gh., 12.
Gâlcă I. T., 12.
Gall F., 115.
Gall St., 377.
Galle, 120.
Galois E., 117, 118, 314, 334.
Gauss, 118, 340.
Gauthier L., 314.
George M. Nicolae, 90, 100.
Georgescu Calipso, 12.
Georgescu S. G., 35, 341, 404.
Georgescu I. N., 12.
Georgescu N. N., 12.
Georgescu Răducanu, 296, 392.
Georgescu-Roegen N., 5, 12, 297, 311, 360, 370.
Georgescu Otilia Roegen, 12, 297, 306, 308, 422.
Georgescu Val. N., 12.
Georgian N. N., 212.
Gérardin A., 314.
Gereanu Ana, 12.
Gergonne, 149.
Germani Dionisie [1] 12, 83, 144, 365.
Ghenea Al., 246.
Gheorghieş Al. G-l, 12, 35.
Gheorghiev Gh., 314.
Gheorghiţă I. St., 59, 194, 226.
Gheorghiu C Ad., 5, 12, 279, 280, 326, 333.
Gheorghiu Al., 12, 245, 246.
Gheorghiu V. C., 338.
Gheorghiu Th. Gh., 12, 136, 252, 253, 262, 379, 380, 415.
Gheorghiu S. I., 12.
Gheorghiu A. Mircea, 25.
Gheorghiu A. Şerb., 5, 12, 43, 44, 63, 103, 123, 129, 130, 138, 157, 167, 172, 182, 184, 206, 216, 241, 244, 258, 261, 277, 291, 293, 297, 312, 317, 359, 375, 424.
Gheorghiu G. Virgiliu, 314.
Gheorghiu V. V., 207.
Ghermănescu M., 12, 39, 40, 82, 125, 166, 245, 276, 328, 336, 386, 388.
Ghermani D. [1], 11, 366.
Ghica Al., 12.
Ghica Ion, 84.
Ghika Al., 245.
Ghimuş D. A. Col., 13.
Ghiocel V., 88, 246.
Ghiolu D. Stavri, 13, 320.
Ghircoiaşu V. N., 13, 245.
Ghişoju I. P., 13, 415.
Ghiţescu Sp., 13.
Ghiţescu V., 13, 62, 101, 194, 195, 306, 422.
Gligor N. I., 46, 253.
Gloden A., 121, 221, 316, 376.
Gob, 146.
Golescu Iordache, 176.
Golescu Radu, 176.
Goursat E., 317.
Grigore A. Gh., 100, 129, 167, 189, 190, 226, 261, 323, 355, 356, 419.
Grigorescu C., 13, 36.
Grigorescu E., 320.
Grigorescu Ion, 13.
Grigoliu I. Doru, 212.
Grosu Ion, 13, 35.
Grumăzescu M. Cpt., 100.
Grünbaum M., 178.
Guerricke Otto von, 108.
Gugiuman I., 42.
Guichard, 139.
Guţu I, A., 13.
Guţu I. I., 13.
Gutzu V., 13.
Gyulai Z., 337.

Hadamard J., 139, 313, 314.
Haimovici M., 245, 314.
Halpern, 314.
Hamburger L., 121, 320.
Hamilton, 340.
Hangan D. M., 13.
Hangan M. Sanda, 189, 194, 213, 229, 389.
Haret Sp. R., 213, 299, 377.
Haret Spiru, 189, 195.
Haret G. Spiru, 13.
Haret Virginia, 218.
Harghel E. I., 226.
Heil M., 107.
Heraclit, 84.
Herbert V., 300.
Herschel N., 120.
Hilbert D., 42, 118.
Hlavaty V., 314.
Hospital, 346.
Hruska V., 315.
Hulubei T., 86.
Hurezeanu M. R., 212.
Hurwitz, 25, 27.

Iacob Caius, 13, 35, 144, 149, 165, 176, 245.
Iacob St. E., Lt. Col., 13, 84, 100, 101, 102, 253, 323, 326, 357, 377, 420.
Iacovache Aurelian, 13.
Iancu I., 354.
Ianovici Virgil, 42.

1) Acelaşi *Germani D.*

Ianus [1]), 377.
Ilie A. Ion, 252.
Iliescu Gh., 5, 13, 297.
Iliescu Tr. G-l, 13.
Imre L., 337.
Ioachimescu Gh. A., 25, 234, 298, 299, 338.
Ioachimescu A. Gh., 13, 341.
Ioan Ana, 13.
Ioan Gh., 246.
Ioan Z. Gh., 246.
Ionescu Al. Avocat, 66.
Ionescu Z. Al., 14.
Ionescu V. D., 5, 14, 245, 269, 274.
Ionescu V. Fl., 14.
Ionescu Gh. Ing., 246.
Ionescu P. H., 14, 297.
Ionescu Ion, 5, 14, 42, 65, 66, 67, 105, 145, 154, 155, 221, 234, 241, 254, 298, 299, 300, 405.
Ionescu C. Ion, 377.
Ionescu N. Mihail, 14.
Ionescu I. Paul, 14.
Ionescu Tib., 14.
Ionescu Teodor, 246.
Ionescu-Bujor C., 5, 14, 40, 46, 171, 172, 228, 263, 297, 391, 423.
Ionescu-Ţiu D. C., 5, 14, 36, 63, 263, 297, 310.
Ionescu-Zane D. Gh., 14.
Iosifescu G. M., 34, 100, 189, 195, 213, 228, 229, 294, 299, 419.
Irimescu I., 279, 314.
Istrati C. C-dor, 14, 320.
Ivancea I. M., 14.
Ivănescu C., 380.

Jacobi, 118.
Janet M., 313.
Joliot Fr., 143.
Jordan C., 118, 315.
Joungman, 305.
Julia G., 207.
Jurist Gh. Vlad, 129, 161, 290, 291.

Kahane Arno, 178.
Kamke E., 207, 212.
Kaufman N., 14, 343, 351.
Kaufmann S., 39, 40.
Kinsky I., 164, 194, 195, 226, 228.
Kircher A., 108.
Klang I. Al., 189.
Klein F., 119.
Knichal Vl., 315.
Korous J., 315.
Kotzig A., 315.
Krasner M., 314.
Kriecenofcher K. L., 415.
Kronecker, 315.
Kubota, 148.

Lagrange, 340.
Lalescu Tr., 234.
Lambert H. I., 329.
Laplace P. S., 245, 410.
Lascaride A. 149.
Lazăr Gh., 176.
Lazu C., 14.
Le Verrier, 120, 316.
Legendre M. A., 147.
Leibnitz W. G., 42.
Lelong P., 313.
Lemoine E., 305.
Lemoyne T., 314.
Leon Al. M., 100.
Leonida D., 14.
Leoveanu Const., 377.
Levy P., 314.
Libois P., 314.
Lincourt, 149.
Link F., 315.
Linteş G. I. C-dor, 25, 67, 68, 69, 102, 320, 355, 416, 417.
Liouville J., 117.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 14, 45, 148, 150, 168, 199, 220. 228, 297, 333.
Livada F. Gr., 15.
Longchamps G. de, 146.
Lorentz, 376.
Lucas Ed., 43.
Luculescu C., 15.

Macovei Ioan, 15.
Mahrenholz J., 161.
Malaxa C. Elena, 15.
Malaxa N., 15.
Malcoci C., 15.
Malecot G., 314.
Man A., 133.
Manafu V., 15, 36, 401.
Măncescu N. I., 213, 300, 323.
Manciu Corneliu, 246.
Manea Gh., 246.
Mangéron I. D., 15, 42, 121, 212, 221, 338, 341.
Maniţiu Emilian, 246.
Manoilescu M., 15.
Manolescu V. G., 189, 190, 229, 419.
Manoliu V. L., 190.
Manu I., 15.
Mărăcine B., 15.
Marcovici E., 153.
Marcu D. V., 212, 246.
Marcus F., 245, 246.
Mareş T., 15.
Margulius M., 123.
Marian V., 15, 115, 145, 298, 299.
Marinescu S. D., 15, 35, 132, 419.
Marinescu E. Em., 46, 56, 62, 129, 130, 135, 172, 174, 185, 189, 190, 261, 355, 358, 370, 390, 421.
Marinescu C. Marinel, 100.
Marinescu Stelian, 355.
Martac V. R., 155.
Marteş Gr., 254.
Mărtoiu C. C., 212.
Mateescu Cr., 15.
Mateescu Dan, 15.
Mateescu I. Ion, 15.
Mătieş V. I., 15, 62.
Mavrodin D. D., 15, 380.
Mayer O., 314.
Mazilu P. C., 88.
Mehedincu V., 15, 134.
Melas P., 320.
Menelaus, 78, 267, 268.
Mereuţă E., 16, 88, 104, 155, 157.
Mereuţă V., 16.
Mersene M., 107.
Merwart E., 314.
Metea G. R., 225.
Meyer, 208.
Michel Ch., 122.
Miclescu A. Lt. Col., 16.
Miclescu Ion, 246.
Mihăescu M., 355.
Mihăiescu S. Şt., 16, 46, 56, 328.
Mihăilă N., 16.
Mihăileanu N. N., 5, 16, 117, 123, 164, 178, 180, 185, 189, 240, 251, 297,

1) *Zeu.*

299, 300, 338, 380, 402, 424.
Mihăilescu Tr., 245.
Mihalache G. C., 133.
Mihălcioiu S. M. 212, 229, 419.
Mihalopol C., 16, 36.
Mihoc Gh., 16.
Mihu C., 16, 135, 186, 188, 199.
Minea V. Aldea, 159.
Mineur Ad,, 199, 232.
Miquel, 129, 130, 204, 206.
Mircea M. E., 16.
Mirescu P., 16,
Mişicu V. M., 59, 189, 389.
Mititelu C. Cl., 16.
Mititelu C. I., 16.,
Mittag-Leffler M., 221.
Miu M. I., 16.
Möbius, 119.
Modâlcă S. Em., 246, 385.
Moisil Gr., 144.
Moivre, 78.
Molnar J., 221, 278, 279.
Monge G., 119.
Montel P., 222, 245, 314.
Moraite Gh. Al., 100, 133, 164, 189, 355, 419.
Morand M., 376.
Moraru Iul., 42.
Morley, 376.
Morţun Gh. Em, 16, 231.
Moscuna O., 221.
Munteanu T. I., 46, 59, 100, 189, 194, 213, 228, 261, 299, 379, 389.
Mustăcescu V. Tr., 129, 164, 189, 190, 418.

Nanul A. Şt., 189, 213, 229.
Neamţu P., 16,
Neculce E., 16.
Nedelcu Fl., 136, 295, 298, 319, 377.
Nedelcu F. Mariana, 212, 358.
Negoescu N., 16.
Negrea A. M., 252, 254, 353, 380.
Negură G. Şt., 16.
Neicu M., 17.
Nestor G. D., 17.
Neuberg J., 105, 106, 146, 147.
Neuman F., 314.
Newton, 145, 301, 316, 342, 379, 394, 396.
Nichifor A. G., 25.
Nicolae M. G., 419.
Nicolau Al., 17.
Nicolau H. C., 17, 123.
Nicolau T. M., 17.
Nicolescu Miron, 17, 222, 245, 314.
Nicolescu I. R., 17.
Niculescu V. Al., 17, 140, 297, 333, 341, 342.
Niculescu Cr., 17.
Niculescu V. Gh., 376.
Niewenglowski B., 268.
Novac I. I., 132, 195, 357, 419.
Novacu Val. 17.

Onicescu O., 17, 245.
Oniga Gh. Th., 17.
Orănescu O. 17, 247, 249.
Orăşanu D. C., 17.
Orăşeanu Gr., 17, 35.
Ovidiu, 291.

Pălăceanu D. V., 100, 132, 161, 189, 191, 323, 389, 416, 419.
Panaite N. Th., 17.
Pantazi Al., 17, 62, 297, 309, 320.
Pantazopol C. Şt. 251, 263.
Pantelimon V. C., 45, 100, 155, 355, 419.
Papadopol I. Paul, 176.
Papazoglu Lt. Col., 148, 392.
Parepeanu C. I., 380.
Pârvu A., 18.
Pârvu I., 133.
Păsărică Fl., 18.
Pascal, 43.
Paşcanu Sergiu, 153.
Pastia Sc., 148.
Pătrăscioiu I. M., 45, 46, 129, 323.
Pătraşcu A. Gh., 18, 297.
Pătroianu Mihail, 18, 303.
Pauc Gh., 314.
Pavel Dorin, 18.
Pérès J., 143,
Perieţeanu D., 281, 320.
Perlea G. Dan 18,
Persica [1]), 84.
Persu Aurel, 18.
Petcu A. Valeriu-Pandele, 190.
Petculescu D. M., 100, 164, 189, 190, 226, 252, 419.
Péterfi I., 337.
Petre I. Gh., 212.
Petrescu S. Gh., 18.
Petrescu G. prof., 297.
Petrescu Iulian, 18.
Petrescu P. Lt. Col., 18.
Petrescu St., 245.
Picard E., 118.
Philipide M., 18.
Pirka Z., 315.
Pisanca M. I., 213, 324.
Piska R., 315.
Pitagora, 84, 109.
Piţigoi Gh. Victor, 132, 257.
Platon, 84.
Plücker, 119.
Poenaru-Iatan N., 42.
Poisson, 117, 292.
Pompeiu D., 222, 235, 245.
Pop Al., 18.
Popa C. Marcel, 100, 228.
Popa I. Marin, 149.
Popa D. Mircea, 45, 58, 123, 125, 159, 182, 185, 198. 226, 228, 229, 242, 249, 252, 261, 324, 353, 380, 401, 418.
Popescu I. Barbu, 228, 323, 356.
Popescu N. Corneliu, 18.
Pepescu Fl., 155.
Popescu I. G. G-l, 28, 32, 327.
Popescu L. Ilie, 129, 189, 213, 228.
Popescu M. I., Lt.-Col, 18,
Popescu Ovidiu, 18.
Popescu Şt., 314.
Popescu A. Stelian, 59.
Popescu A. Victor, 18.
Popescu-Botoşani Gh., 18.
Popescu-Zorica Al., 18, 254.
Popovici C., Prof., 245.
Popovici C. C., 19.
Popovici Const., Ing., 246.
Popoviciu I. Gavrilă, 19.
Popoviciu Tib., 5, 19.
Popp Alex., 246.

1) *Zeiţă.*

Popp G., 19.
Popp Gh., 377.
Popp N. C-dor, 19.
Popp I. Tr., 19, 297.
Portocală M., 19, 36.
Postelnicu Mircea, 19.
Potopeanu Gh. G-l, 19.
Praporgescu N., 19, 150, 153.
Predoescu I. M., 88.
Predoescu M. Tr., 19, 88.
Profiri N., 19.
Protopopescu Gr. G-l, 19.
Provinceanu M., 19.
Ptolomeu, 78.
Puşcaşu Silviu, 189, 195.
Puskas T., 337.

Raabe, 143,
Racliş N. R., 377.
Radoslav Gh. I., 155.
Rădulescu Marcel, 19.
Rădulescu I. Mircea, 19.
Rădulescu Vlad, 246.
Ralet D. Francesco, 229.
Răuţu C. T., 59.
Reischer L. H., 354.
Revici T., 19.
Ribaucour, 245.
Ripianu D., 98, 183.
Ristea Gh. Gh., 212, 300.
Ritter, 339.
Rizescu T. Gh., 19.
Rizescu T. Ion, 19.
Roban Vintilă, 246.
Rociu Margareta, 19.
Rogoz I., 323.
Rohr I. A., 253.
Romanczai J., 337.
Roşu Al. A., 20, 35, 275, 276, 297.
Roşu V. C., 100, 129, 213, 228, 300.
Roşu V., 20.
Rouché E., 139.
Rulea G, 100.
Ruzvan I. T., 20.

Sager N. I., 380.
Şaichin O. Ad., 291, 293.
Sălăgeanu A., 20.
Saligny M., 20.
Salmon, 119.
Sâmboan Gavril, 419.
Şandru I. V., 195.
Sandu-Ville C., 315.
Sapatino-Const., 246.
Săpunaru S. Gh., 20.
Sarian M., 20, 297.
Sarola Al., 133,
Sarusi F., 337.
Şaur I., 20.
Săvescu A. M., 133, 190, 195, 419.
Savin C. I., Cpt., 20, 353.
Sbârnea Gh. 155.
Schilleru-Dili C. I., 20, 35.
Schileru Gr., 246.
Schlesinger, 252.
Schlömilch O., 208.
Schott C., 107, 108, 115.
Schrödiger, 337.
Schwartz St., 315.
Şcodrano Al., 149.
Segal J., 380.
Segre, 236.
Seni Dinu, 190, 213, 229.
Şerban C. S-Lt., 189.
Şerbănescu Floricel, 20.
Şerbănescu Gh. V., 20, 230. 342, 414, 415.
Şerbu C. C., 222.
Sergescu B., 25.
Sergescu P., 5, 20, 105, 116, 144, 145, 222, 337, 341.
Seulescu Gh., 148.
Sevret, 397, 398.
Sfinţescu I. C., 20.
Simionescu G. D., 5, 20, 116, 123, 132, 241, 281, 284, 289, 297, 301, 309, 312, 383, 417, 421.
Simionescu Mircea, 20.
Simon I., 315.
Simson, 29, 31, 46, 47, 78, 129, 130, 250, 258, 260, 261.
Sirinian Mendrey, 21, 35.
Şleahtenea D., 21.
Smântânescu A., 21.
Soare V. M., 59, 100, 104, 133, 164, 189, 195, 257, 261, 389.
Socrate, 84
Sonnenreich Dora, 86.
Soons, 105.
Şova C. I., 21.
Stoicovici E. Dr., 42.
Staicu I. C., 129.
Stamate I. I., 21, 99, 246, 261, 280, 379.
Stamatescu I. G., 21.
Stan I. Ana, 297.
Stan I. Aurelian, 5, 21, 38, 297, 308.
Stan C., 415.
Stan A. D., 21, 35, 153.
Stan V. Ilie, 21.
Stăncescu N. Virgiliu, 247.
Stanciu A. V. P., 59, 100, 133.
Stanciu Valeriu, 190, 194 419.
Stancu S. Marin, 21.
Stancu S. Mircea, 21.
Stănculescu I. I., 21.
Stănculescu Romaşcan Georgeta, 21.
Stănescu N. Virgil, 213, 247.
Stănilă D. B. G., 100, 195, 229.
Staudt, von, 119.
Ştefănescu D. N. Lt., 21, 155, 252.
Ştefanescu I. Sofronie, 212.
Ştеiner, 119, 161, 163.
Štěpánsky V., 315.
Stoenescu I. Al., 5, 21, 49, 61, 80, 82, 84, 86, 104, 134, 154, 190, 192, 195, 200, 297, 313, 338, 341, 360, 369, 376, 377, 401, 404, 417.
Stoenescu D. Mirel, 45, 225. 252, 354.
Stoian I. D-tru, 43, 129, 213, 238, 323.
Stoica D. Al., 21.
Stoica V. D., 5, 22, 241, 260, 276, 298, 390, 422.
Stoicescu T. Teodor, 25, 102, 165, 228, 262, 324.
Stoika V. V., 22.
Stoilov S., 22, 222.
Stratilescu Gr. I., 377.
Streder I., 252.
Stroescu I., 144.
Strub C., 314.
Stuparu Const., 12.
Şuţu Gr, 149.
Sylon, 41.
Szymanski P., 245.

Tafrali O., 84.
Tambs Lyche R. M., 379.
Tănăsescu M. Ar. G-l, 22.
Tănăsescu S. C., 100, 189, 194, 195, 261.
Tănăsescu A. T., 22.
Ţapu N. V., 155,
Tauber Al., 342.

Taylor, 410.
Teodor P. P., 213, 247.
Teodoreanu V., 22.
Teodorescu C. C. Ing., 22, 42, 298, 341.
Teodorescu N. Dorin, 254.
Teodorescu D. Ioana, 22.
Teodorescu St. I., 22, 59, 288, 289, 294, 328.
Teodorescu N. Prof., 341.
Teodor7scu V. N., 25.
Teodorescu P. P., 43, 46, 59, 129, 133, 166, 185, 189, 190, 228, 229, 247, 256, 296, 323, 325, 334, 355, 357, 359, 389, 419.
Teodoru Şerban, 377.
Terek A. Al. 279, 280.
Thales, 84.
Thébault V., 103, 121, 146, 147.
Theodoru H., 22.
Thierrin H. G., 22.
Ţigănoiu I. Al, 293.
Tilică C. Şt., 22, 155, 254, 354.
Timotin A., 46.
Tincu C. C., 100.
Ţino N. O., 5, 22, 370, 373.
Ţintea M. I., 22.
Ţiţeica Gabriela, 5, 22, 64, 175, 192, 194, 338, 341, 376, 401, 424.
Ţiţeica George, 66, 185, 226, 234, 235, 298, 299, 303, 338.
Ţiţeica G. Radu, 22, 298, 316.
Ţiţeica Şerban, 22, 116, 298.
Thomson W., 118.
Toma I. I, 133.
Tomek C., 222.
Tomescu Şt. I., 23.
Topa E., 42.
Toporescu E., 298.
Toricelli, 185.
Trismegistul Hermes, 84.
Tucidide, 84.
Tudor C. Em., 212
Tudoran M. Lydia, 155,
Tudoran M., 23.
Tullea C. Gh., 23.
Tutunaru D., 246.

Udrea C. I., 133, 213, 283, 300.
Ulescu A., 23, 36.
Ureche A. V., 176.

Văduva Fl. M., 355.
Vâlcovici V., 23, 77, 83, 84, 144, 245, 341.
Valiron G., 313.
Van der Waal, 341.
Vandermonde, 136.
Vardala I., 23.
Vargă I. A., 59, 100, 132, 168, 189, 229. 249, 262, 291, 293, 296.
Vargă I., 337.
Varlam P., 149.
Vasilache I., 23.
Vasilescu C. Gr., 23.
Vasilescu C. I., 23.
Vasilescu I. T., 23.
Vasilescu-Karpen N., 64, 144, 178, 180.
Vasilescu-Stabu A. M., 23, 61, 355, 356, 358.
Vasiliu M. Const., 23.
Vasiliu E. Dan, 213, 229, 323, 419.
Vasiliu G. Dan, 23.
Vasiliu G. D-tru, 44, 155, 159, 283.
Vasiliu C. E., 23.
Vasiliu M. Florin-Minea, 212.
Vasiliu D. Gh., 23, 353.
Vasiliu C. I., 23, 135, 161, 163, 295, 298.
Vasiliu Mihai, 24, 300, 342.
Vasiliu Mircea, 377.
Vasu Vasile, 24, 391.
Vencov St., 338.
Vescan T. T., 24, 221, 246, 278, 279, 341.
Viciu A. A., 24.
Villat H., 143.
Vişa E., 5, 24, 43, 280, 376, 403.
Visser T., 317.
Vlasie M. Gh., 356.
Vogt A., 150, 152.
Voinea P. R., 155, 377.
Voltaire, 291.
Vrânceanu G. Prof., 341.
Vrânceanu Gh. Gh., 33, 59, 129, 353, 355, 389.

Waring, 397, 398.
Wedderburn M. J., 42.
Wegener N. E., 45, 86, 88, 98, 100, 127, 161, 194, 195, 197, 225, 226, 228, 252, 253, 254, 283, 291, 296, 326, 356, 380.
Weierstrass K., 118.
Woinarovski R., 24.

Zaharia O. Ioan, 24.
Zamfirescu C. Gr., 25.
Zamfirescu G. I. Maior, 24, 354, 355.
Zapan Gh., 24, 320, 415.
Zapan Gr. G-l, 24, 70, 253, 320.
Zenon, 84.
Ziff M., 88.
Zlatcu St., C., 24.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărţi, Extrase, Teze

Pag.

N. Abramescu. . . . . Algebra de clasa a VIII-a 234
N. Abramescu. . . . . Curs de geometrie analitică 236
N. Abramescu. . . . . Curs de geometrie infinitezimală 236
N. Abramescu. . . . . Formule fundamentale din geometria triunghiului 235

*) In acest capitol nu sunt menţionate lucrările citate la *Bibliografie* şi la *Diverse*, rubrica Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

Pag.

N. Abramescu . . . . . Lecţiuni de geometrie analitică 89, 90
Academia Română . . . GEORGES ŢIŢEICA. Oeuvres. Tome I . . . 298
A. Angelescu . . . . . Lecţiuni de calcul diferenţial 299
Th. Angheluţă . . . . . Curs de algebră superioară . 25, 26, 39, 217, 219, 290, 381, 393, 395.
P. Appel & Goursat . . . Théorie des fonctions algébriques 317
P. Bachmann . . . . . Die Lehre von der Kreistheilung 151
P. Bănescu . . . . . Marele vornic IORDACHE GOLESCU 176
N. A. Bogdan . . . . . Oraşul Iaşi 148
Cesaro . . . . . Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis 349
E. Combette . . . . . Cours d'Arithmétique 342
C. Coşniţă . . . . . Coordonées barycentriques 222, 362
G. Costescu . . . . . Bucureştii vechiului regat 84
V. Cristescu . . . . . Culegere de probleme de trigonometrie . 45, 147, 150, 220, 228, 253, 299.
I. C. Dumitriu . . . . . Culegere de probleme de geometrie analitică 237
F. G. M. . . . . . (Frère GABRIEL MARIE). Compléments de Trigonometrie 128, 166
F. G. M. . . . . . (Frère GABRIEL MARIE). Exercices de Géometrie 125, 139, 185
F. G. M. . . . . . (Frère GABRIEL MARIE). Exercices de Trigonometrie 325
Sc. Fotino . . . . . Contribuţii la studiul acusticei marilor săli 298, 299, 300.
Sc. Fotino . . . . . Geometria descriptivă 299
M. Ghermănescu . . . . Probleme şi propoziţii de dinamica punctului 125
M. Ghermănescu . . . . Trigonometrie plană 386, 388
M. Hell . . . . . Elementa Mathematica 111
A. G. Ioachimescu . . . Mecanica raţională 299
I. Ionescu . . . . . Beton armat 298, 299
I. Ionescu . . . . . Maxime şi minime geometrice 299, 300
Jacobi . . . . . Werke 118
C. Jordan . . . . . Traité des substitutions et des équations algebriques 118
G. Julia . . . . . Exercices d'Analyse 207
E. Kamke . . . . . Differential gleichungen 207, 212
F. Klein . . . . . Program 119
I. H. Lambert . . . . . Freye Perspective oder Anweisung jeden Aufriss von freyen Stucken und ohne Grundriss zu verfestigen 329
I. Linteş . . . . . Teoria indicatorilor 69
G-l Gh. Liteanu . . . . Culegere de probleme de trigonometrie sferică 150
E. Lucas . . . . . Théorie des nombres 443
V. Marian . . . . . Elementele lui EUCLIDE 298, 299

		Pag.
Ch. Michel	Compléments de géometrie moderne	122
N. N. Mihăileanu	Corespondenţa omografică	299, 300
N. N. Mihăileanu	Raportul anarmonic	299
N. N. Mihăileanu	Transformarea prin inversiune	299, 300
N. N. Mihăileanu	Transformarea prin polare reciproce	299, 300
Ad. Mineur	Trigonométrie	199, 232
B. Niewenglowski	Cours de géometrie analytique	268
R. Nogués	Cours de mathétatiques spéciales sous forme de problèmes	46
P. I. Papadopol	GH. LAZĂR şi opera sa	176
Plücker	System der geometrie des Raumes	119
E. Rouché & Ch. de Comberousse	Traité de géometrie	139
O. Schlömilch	Zur Theorie des hohen Differentialquotienten	208
C. Schott	Arithmetica practica generalis	111, 115
C. Schott	Mechanica hydraulica-pneumatica	112
C. Schott	Cursus mathematicus seu absoluta omnium mathematicorum disciplinarum encyclopaedia in libros XXVIII digesta	112
C. Schott	Compendium Arithmeticae practicae generalis ex curso mathematica	115
C. Schott	Mathesis Caesarea s. Amusis Ferdinandae ad. Problemata universae matheseos	112
C. Schott	Organum mathematicum	112
Al. Stoenescu	Probleme de calcul vectorial	377
Al. Stoenescu	Probleme de dinamică	377
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie	185, 303
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie analitică	299
A. Vogt	Leçons sur la résolution algébrique des équations	150, 152

2. Periodice

Annali di Matematica 236
Boll. Un. Mat. It. 25
Bulletin de la Société Mathématique de France 379
Bulletin scientifique de l'Académie Roumaine 236
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 119, 120, 236
Crelle's journal 118
Educational Times 305
Gazeta Matematică . 28, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 42, 43, 66, 67, 68, 69, 70, 76, 77, 79, 101, 105, 116, 134, 141, 145, 146, 148, 149, 165, 169, 172, 176, 178, 184, 197, 201, 204, 212, 219, 220, 222, 233, 234, 237, 241, 269, 275, 276, 294, 297, 298, 299, 300, 304, 305, 317, 318, 323, 333, 335, 349, 361, 370, 373, 377, 380, 399, 401, 402, 405, 421.
Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii 37, 69

Pag.

Intermédiaire des mathématiciens 105
Journal de G. de Longchamps 146
Journal de mathématiques pures et appliquées 117
Mathematica 236, 237
Mathesis 105, 106, 147, 305
Nouvelles Annales de Mathématiques 236
Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della R. Università di Cagliari 212
Revista Aeronauticei. 69
Revista Matematică din Timişoara 402, 415
România Aeriană 69
The Thohoku Mathematical Journal. 27
Traveaux sur l'histoire des Mathématiques 341
Zeitschrift für Mathematik und Physik 208

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Problema 6278	64
Problemele 1650, 2423, 6314, 6290	232
Paginele 150, 151, 152	232
Problema 6304	264
Paginele 225, 228, 229	264
Problema 6321	328
Paginele 239, 240, 276, 280, 325, 326	328

M. SUPLIMENTE

Supliment la Nr. 9. Darea de seamă asupra reuniunei care a încheiat al 37-lea Concurs al *Gazetei Matematice* . . . . . 8 pagini

N. PUBLICAŢIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii, Vol. XIII, 9 numere . 160 pagini
Mecanica raţională de A. Gh. Ioachimescu revăzută şi adăogită de Gabriela Ţiţeica şi Al. Stoenescu.

O. PLANŞE ŞI FOTOGRAFII

Fotografia lui I. Ionescu . . . . . Pag. 65
„ „ I. Linteş . . . . . „ 67
„ „ N. Abramescu . . . . . „ 233

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela d-nii;

Bucur Al. N. (6315); *Columbeanu D. P.* (6278, 79, 319); *Constantinescu R. M.* (6072, 354, E, N); *Constantinescu G. Virgil* (Slatina) (5129, 969, 6036, 39, 80, 83, 101, 05, 09, 11, 33, 34, 40, 60, 74, 99, 221, 27, 30, 33, 43, 49, 52, 61, 64, 88, 302, 14, 22, 23, 24, 33, 40, 46, 50, 54, E, P); *Enescu George* (3312, 4753, 5076, 6007, 36, 88, 233, 312, 14, 15, 50, 54, 60, E, N); *Hangan M. Th.* (6333); *Ionescu-Bujor C. Claudiu* (6350); *Petcu A. Valeriu* (5076, 6081, 296, 314, E, P); *Popescu I.* (5927); *Şerban C.* Lt. (6378); *Soare V. M.* (6378); *Stanciu Val.* (P); *Teodorescu P. P.* (E, P); *Vargă I. Anton* (6327, 54).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus, de geometrie, a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţie.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *« Gazeta Matematică »*.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Corespondenţii cari cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimet pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate, eventual numere izolate.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I—X, XII, şi XIV—XVIII sunt epuizate.

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei —

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţională* . . . . . Lei —

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ral Gh. I. Liteanu.* Lei —

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I-a . . . . . Lei —

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei —

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia I-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor.* . . Lei —

XXIII. **Gazeta Matematică** 1895—1945 (Decada 5-a). *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (288 pag.) . . . . . Lei —

XXIV. **A. G. Ioachimescu,** *Mecanica raţională,* Curs predat la Şcoala Politehnică din Bucureşti, revăzut şi adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Ţiţeica* şi *Al. Stoenescu* . . . . . Lei —

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei —

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei —

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei —

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulelor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei —

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei —

PENTRU BIBLIOTECI ŞI AUTORITĂŢI TOATE PREŢURILE SE TRIPLEAZĂ

Pentru volumele din Colecţia şi Bibliotecile din *Gazeta Matematică* de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preţ pentru taxele de expediţie.

„GAZETA MATEMATICĂ“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru Vol. LIII abonamentele provizorii sunt:

Pentru profesori, studenţi şi elevi. . . . . Lei 360

Pentru autorităţi şi biblioteci . . . . . Lei 1.000

Preţurile definitive pentru cărţi şi abonamente se vor anunţa în Nr. 1, Vol. LIII.

„SUPLIMENTUL CU EXERCIŢII“ al Gazetei Matematice apare la 1 ale fiecărei luni dela 1 Noembrie 1946 la 1 Iunie 1947 inclusiv. Costul abonamentului pentru Vol. XIV se va anunţa în Nr. 1 dela 15 Septembrie.

Abonamentele se pot plăti la cont CEC Nr. 26220 sau se pot trimite unde se trimite şi corespondenţa, pe adresa:

Societatea „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 42.187.